

# 信号処理とフーリエ変換 第12回

～畳み込み～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/>

2021年12月15日

# 目次

## ① 本日の内容・連絡事項

## ② 畳み込み (続き)

- 畳み込みの基本的な性質の証明
- 畳み込みの例
- 畳み込みの Fourier 変換
  - $\mathbb{R}$  上の関数 — 普通の Fourier 変換の場合
  - $\mathbb{R}$  上の周期関数 — Fourier 係数の場合
  - $\mathbb{Z}$  上の周期関数 — 離散 Fourier 変換の場合
  - $\mathbb{Z}$  上の関数 (数列) — 離散時間 Fourier 変換の場合
- 微分との関係とその応用
  - 畳み込みと微分の関係
  - メモ 積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)
  - 応用: 熱方程式の初期値問題
  - 熱方程式の基本解の性質

- 本日のテーマは「畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積」というもの (講義ノート [1] の§7)。その重要性を理解すること自体が重要なかもしれない。Fourier 解析は、Fourier による熱伝導現象の解析が発端になったとされているが、熱伝導方程式の初期値問題の解法を例として取り上げる。

実はこれから最後の講義まで、畳み込みの話ということも出来るかもしれない (次回のタイトルは「デジタル・フィルター」であるが)。

- レポート課題 2 を忘れないように。冬休み前の Zoom オフィスアワーは 12/21(火)12:00-13:00 が最後。その次は 1/11(火)12:00-13:00 です。メールでの質問は冬休み中も受け付けます。)

## 7 畳み込み (続き) 定義の復習

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  を次式で定める。

$$(1) \quad f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}).$$

周期  $2\pi$  の関数  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  を次式で定める。

$$(2) \quad f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  を次式で定める。

$$(3) \quad f * g(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

周期  $N$  の関数  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  を次式で定める。

$$(4) \quad f * g(n) := \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

## 7.2 畳み込みの基本的な性質の証明

交換法則、結合法則など、前回紹介した畳み込みの基本的な性質を証明するのは、(零因子の非存在<sup>1</sup>以外は) 微積分の良い演習問題である。

結合法則の証明を試みよう。積分の順序交換 (Fubini の定理) により

$$\begin{aligned}(g * f) * h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g * f)(x - y)h(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g((x - y) - u)f(u) du \right) h(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g((x - u) - y)h(y) dy \right) f(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g * h(x - u)f(u) du \\ &= (g * h) * f(x).\end{aligned}$$

すなわち  $(g * f) * h = (g * h) * f$ . ゆえに交換法則を用いて

$$(f * g) * h = (g * f) * h = (g * h) * f = f * (g * h).$$

---

<sup>1</sup>これはとても難しい。

## 7.3 畳み込みの例 電荷の作る静電場の電位

原点に置かれた単位点電荷の作る電場の電位 (ポテンシャル・エネルギー) は

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}|}.$$

$U$  の勾配  $\times(-1)$  が電場になる:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

ここで  $\epsilon_0$  は真空の誘電率である。SI 単位系では

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \doteq 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m} \quad (c \text{ は真空中の光速}).$$

- 原点に電荷  $Q$  が置かれているならば  $u(\mathbf{x}) = QU(\mathbf{x})$
- 点  $\mathbf{y}$  に電荷  $Q$  が置かれているならば  $u(\mathbf{x}) = QU(\mathbf{x} - \mathbf{y})$
- 点  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$  に電荷  $Q_1, \dots, Q_N$  が置かれているならば  $u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N Q_j U(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j)$ .
- 空間に電荷が連続的に分布していて、密度が  $q(\mathbf{y})$  とするとき

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} U(\mathbf{x} - \mathbf{y})q(\mathbf{y})d\mathbf{y} = U * q(\mathbf{x}).$$

単位点電荷というもっとも簡単な場合の解から、畳み込みによって一般の解が表される。

## 7.4 畳み込みの Fourier 変換

「はじめに」で話したように、どの Fourier 変換でも、

$$\mathcal{F}[f * g] = \text{定数 } \mathcal{F}f \mathcal{F}g$$

が成り立つ。

対象となる関数	名前	公式
$\mathbb{R}$ 上の関数	普通の Fourier 変換	$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f \mathcal{F}g$
$\mathbb{R}$ 上の周期関数	Fourier 係数	$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}f \mathcal{F}g$
$\mathbb{Z}$ 上の周期関数 (周期 $N$ )	離散 Fourier 変換	$\mathcal{F}[f * g] = N \mathcal{F}f \mathcal{F}g$
$\mathbb{Z}$ 上の関数	離散時間 Fourier 変換	$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}f \mathcal{F}g$

スライドにはすべての場合を載せる。2つくらい説明してみる。

- 証明は、積分 or 和の順序交換をしてから、変数変換するが基本方針。
- 周期関数の場合、周期性を使うところがある。

## 7.4.1 $\mathbb{R}$ 上の関数 — 普通の Fourier 変換の場合

$$(5) \quad \mathcal{F}[f * g](\xi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}g(\xi).$$

証明  $h := f * g$  とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) e^{-ix\xi} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-ix\xi} dx \right) g(y) dy. \end{aligned}$$

右辺の ( ) 内の広義積分を  $\lim$  で表してから、変数変換する。 $u = x - y$  とおくと、 $dx = du$ ,  $x = u + y$ ,  $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+y)\xi} = e^{-iu\xi} e^{-iy\xi}$  であるから

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-ix\xi} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x-y) e^{-ix\xi} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R-y}^{R-y} f(u) e^{-iu\xi} e^{-iy\xi} du \\ &= e^{-iy\xi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R-y}^{R-y} f(u) e^{-iu\xi} du = e^{-iy\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\xi} du. \end{aligned}$$

(積分の上端、下端に  $y$  が現れるけれども、結局は消えてしまう。)



## 7.4.1 $\mathbb{R}$ 上の関数 — 普通の Fourier 変換の場合 証明の続き

元の式に代入して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-iy\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi} du \right) g(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi} du \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\xi} dy \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}g(\xi). \quad \square\end{aligned}$$

## 7.4.2 $\mathbb{R}$ 上の周期関数 — Fourier 係数の場合

周期  $2\pi$  の関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  の Fourier 変換  $\mathcal{F}f$  とは、 $f$  の Fourier 係数である:

$$\mathcal{F}f(n) = \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$\mathcal{F}f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  である。

周期  $2\pi$  の関数  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f$  と  $g$  の畳み込み  $f * g$  を

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める。

$f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$  である (チェックは簡単)。

$$(6) \quad \mathcal{F}[f * g](n) = \mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n).$$

証明  $h := f * g$  とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx} dx \right) g(y) dy. \end{aligned}$$

右辺の ( ) 内を置換積分する。 $u = x - y$  とおくと、 $x = -\pi$  のとき  $u = -\pi - y$ 、 $x = \pi$  のとき  $u = \pi - y$ 、 $x = u + y$ 、 $dx = du$ 、 $e^{-inx} = e^{-in(u+y)} = e^{-inu}e^{-iny}$  であるから、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx} dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-in(u+y)} du = e^{-iny} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-inu} du.$$

## 7.4.2 $\mathbb{R}$ 上の周期関数 — Fourier 係数の場合 証明 続き

関数  $u \mapsto f(u)e^{-inu}$  は周期  $2\pi$  であるから、 $[-\pi - y, \pi - y]$  での積分は  $[-\pi, \pi]$  での積分に等しい。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)e^{-inx} dx = e^{-iny} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu} du.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( e^{-iny} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu} du \right) g(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu} du \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny} dy \\ &= \mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n). \quad \square\end{aligned}$$

## 7.4.3 $\mathbb{Z}$ 上の周期関数 — 離散 Fourier 変換の場合

$N \in \mathbb{N}$  に対して  $\omega := e^{2\pi i/N}$  とおく。周期  $N$  の周期数列  $f = \{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  に対して、 $f$  の Fourier 変換とは、離散 Fourier 変換にほかならない。すなわち

$$\mathcal{F}f(n) = \hat{f}(n) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定まる  $\mathcal{F}f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  を、(周期数列)  $f$  の “Fourier 変換” と呼ぶ。

これは周期  $N$  の数列である:  $\hat{f}(n+N) = \hat{f}(n)$ .

一方、周期  $N$  の数列  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f$  と  $g$  の畳み込み  $f * g$  を

$$f * g(n) := \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める。 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $N$  の周期数列である。

実は

$$(7) \quad \mathcal{F}[f * g](n) = N\mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n).$$

## 7.4.3 $\mathbb{Z}$ 上の周期関数 — 離散 Fourier 変換の場合

証明  $h := f * g$  とおくと

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(j) \omega^{-nj} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} f(j-k) g(k) \right) \omega^{-nj} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{N-1} f(j-k) \omega^{-nj} \right) g(k).\end{aligned}$$

右辺の ( ) 内の  $\sum$  を変数 (添字) 変換する。  $l = j - k$  とおくと、  $j = 0$  のとき  $l = -k$ ,  $j = N - 1$  のとき  $l = N - 1 - k$ ,  $j = l + k$ ,  $\omega^{-nj} = \omega^{-in(l+k)} = \omega^{-n\ell} \omega^{-nk}$  であるから、

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k) \omega^{-nj} = \sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell) \omega^{-n\ell} \omega^{-nk} = \omega^{-nk} \sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell) \omega^{-n\ell}.$$

数列  $\ell \mapsto f(\ell) \omega^{-n\ell}$  は周期  $N$  の周期数列であるから、  $\ell = -k, -k + 1, \dots, N - 1 - k$  に対する和は  $\ell = 0, 1, \dots, N - 1$  に対する和に等しい。

$$\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell) \omega^{-n\ell} = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \omega^{-n\ell}.$$

## 7.4.3 $\mathbb{Z}$ 上の周期関数 — 離散 Fourier 変換の場合 証明続き

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \omega^{-nk} \sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell) \omega^{-n\ell} \right) g(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \omega^{-nk} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \omega^{-n\ell} \right) g(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \omega^{-n\ell} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \omega^{-nk} \\ &= N \mathcal{F} f(n) \mathcal{F} g(n). \quad \square\end{aligned}$$

## 7.4.4 $\mathbb{Z}$ 上の関数 (数列) — 離散時間 Fourier 変換の場合

数列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  に対して、 $X(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-in\omega}$  ( $\omega \in \mathbb{R}$ ) を  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  の離散時間 Fourier 変換と定義したが、これが数列の “Fourier 変換” である。  
すなわち、 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\xi} \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

で定まる  $\mathcal{F}f = \widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  を、(数列)  $f$  の “Fourier 変換” と呼ぶ。これは周期  $2\pi$  の周期関数である。

一方、 $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f$  と  $g$  の畳み込み  $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  を次式で定める。

$$f * g(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

実は

$$(8) \quad \mathcal{F}[f * g](\xi) = \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi).$$



## 7.4.4 $\mathbb{Z}$ 上の関数 (数列) — 離散時間 Fourier 変換の場合

証明  $h := f * g$  とおくと

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \right) e^{-in\xi} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\xi} \right) g(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)e^{-il\xi} e^{-ik\xi} \right) g(k) \\ &= \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)e^{-il\xi} \right) \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\xi} \right) \\ &= \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi). \quad \square\end{aligned}$$

## 7.5 微分との関係とその応用

### 7.5.1 畳み込みと微分の関係

微分可能な関数の畳み込みについては、次の公式が成り立つ。

$$(9) \quad \frac{d}{dx}(f * g) = \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx}.$$

これを示すには、積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換) を正当化すれば良い。

$\mathbb{R}$  で定義された周期性を仮定しない関数の場合

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f * g)(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x-y)g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-y)g(y) dy \\ &= \frac{df}{dx} * g(x). \end{aligned}$$

(積分記号下の微分を正当化については、次のスライドでコメントする。)

## 7.5.2 メモ 積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)

$F: [a, b] \times [\alpha, \beta] \ni (x, \xi) \mapsto F(x, \xi) \in \mathbb{C}$  が  $C^1$  級ならば

$$\frac{d}{d\xi} \int_a^b F(x, \xi) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \xi} F(x, \xi) dx \quad (\xi \in [\alpha, \beta]).$$

これは微積のテキストに載っていることが多い。

広義積分の場合は少し難しい。次の定理は、普通は Lebesgue 積分で教わる。

$$(10) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} F(x, \xi) \right| \leq \varphi(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx < +\infty$$

を満たす  $\varphi$  が存在する場合は

$$\frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \xi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} F(x, \xi) dx \quad (\xi \in [a, b]).$$

Fourier 変換の場合、 $F(x, \xi) = f(x)e^{-ix\xi}$ ,  $\left| \frac{\partial}{\partial \xi} F(x, \xi) \right| = |-ixe^{-ix\xi} f(x)| = |xf(x)|$  であるから、

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| dx < +\infty$$

が成り立てば OK. 定理の証明は難しいが、定理を使うこと自体は簡単である。

## 7.5.3 応用: 熱方程式の初期値問題 (1)

**熱 (伝導) 方程式**の初期値問題:  $f$  が与えられたとき、次式を満たす  $u$  を求めよ。

$$(12a) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$(12b) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

…… 熱的に絶縁された、無限に長い一様な棒の熱伝導のモデルである (単位は適当に選ぶとする)。 $u(x, t)$  は時刻  $t$ , 位置  $x$  での棒の温度、 $f$  は初期温度分布である。

解法の要点:  $x$  について Fourier 変換して、変数  $t$  についての常微分方程式にする。

$u(x, t)$  を  $x$  について Fourier 変換したものを  $\hat{u}(\xi, t)$  とおく。すなわち

$$(13) \quad \hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}[u(x, t)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}, t > 0).$$

$u(x, 0) = f(x)$  の両辺を Fourier 変換すると

$$(14) \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

## 7.5.3 応用: 熱方程式の初期値問題 (2)

$u_t = u_{xx}$  の両辺を Fourier 変換しよう。

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x, t)](\xi) = (i\xi)^2 \mathcal{F}[u(x, t)](\xi) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u_t(x, t)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-ix\xi} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t)\end{aligned}$$

であるから

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t).$$

(14), (15) は、常微分方程式の初期値問題である。これは容易に解ける。

$$(16) \quad \hat{u}(\xi, t) = e^{-t\xi^2} \hat{u}(\xi, 0) = e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi).$$

(つまり  $\frac{dy}{dx} = ay, y(0) = y_0 \Rightarrow y = y_0 e^{ax}$  ということ。)

## 7.5.3 応用: 熱方程式の初期値問題 (3)

$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f \mathcal{F}g$  という公式を思い出そう。Fourier 変換が  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\xi^2}$  となる関数  $G(x, t)$  があれば、(16) は

$$\hat{u}(\xi, t) = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{G}(\xi, t) \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[G(\cdot, t) * f](\xi)$$

と書き換えられる。両辺を逆 Fourier 変換して  $u(\cdot, t) = G(\cdot, t) * f$ 。すなわち

$$(17) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) f(y) dy.$$

$G(\cdot, t)$  は逆 Fourier 変換で求められる。

$$G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^* \left[ e^{-t\xi^2} \right] (x).$$

公式  $\mathcal{F} \left[ e^{-ax^2} \right] (\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$  より  $\mathcal{F}^* \left[ e^{-a\xi^2} \right] (x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$ 。ゆえに

$$(18) \quad G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

## 7.5.3 応用: 熱方程式の初期値問題 (4)

以上で解けた。まとめておくと

$$(19) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$(20) \quad G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0).$$

これが熱方程式の初期値問題 (12a), (12b) の解の公式である。

適当な仮定をおいたとき、この  $u$  が確かに (12a), (12b) の解であること、また解の一意性が成り立つことが証明できる (この講義では省略する)。

$G$  は熱方程式の初期値問題の**基本解** (the fundamental solution to the heat equation), **Green 関数** (Green function), あるいは**熱核** (heat kernel), **Gauss 核** (Gaussian kernel) と呼ばれる。非常に有名な関数である。

## 7.5.4 熱方程式の基本解の性質

(再掲 20) 
$$G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0).$$

任意の  $t > 0$  に対して

$$G(x, t) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) dx = 1$$

が成り立つ。

$G$  は、平均 0, 分散  $2t$  の正規分布の確率密度関数に等しい。

$t (> 0)$  を固定したとき、 $x \mapsto G(x, t)$  のグラフは釣鐘状の曲線で、 $x = 0$  でピークになっている。

$x$  軸との間で囲まれた部分の面積が 1 になっている (実は、温度の積分は熱量で、初期値が持っていた熱量が保存されることを意味する)。

分散  $2t$  は時間に比例して増加する。時間の経過とともに、裾が広がっていくわけである。

$t$  を固定して、 $x \mapsto G(x, t)$  のグラフを描いて、時間の経過とともにそれがどう変化するか、イメージを頭の中に残すと良い。百聞は一見にしかずで自分の手を動かして見ることを勧める。



## 7.5.4 熱方程式の基本解の性質

色々なソフトウェアでグラフが描ける。

Mathematica で熱方程式の基本解を見る

```
G[x_, t_] := Exp[-x^2/(4 t)]/(2*sqrt[Pi*t]);  
g=Plot[Table[G[x,t], {t, 0.1, 1.0, 0.1}], {x, -5, 5}, PlotRange->All];  
Manipulate[Plot[G[x, t], {x, -5, 5}, PlotRange->{0, 3}], {t, 0.01, 2, 0.01}]
```

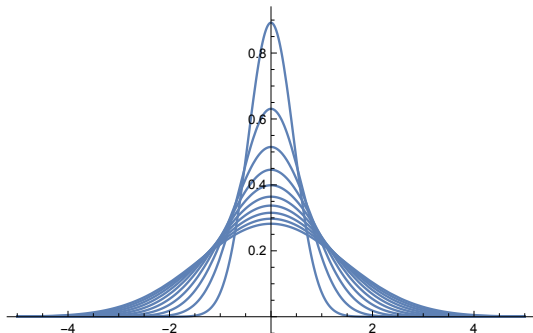


図 1: 熱方程式の基本解  $G(\cdot, t)$  ( $t = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ )

## 7.5.4 熱方程式の基本解の性質

gnuplot でアニメーションを作ってみよう。まず

```
anim.gp
plot [-10:10] [0:1] G(x,t)
t=t+dt
if (t<Tmax) reread
```

のようなファイル “anim.gp” を用意しておいて (Visual Studio Code や Atom のようなテキスト・エディターで作れば良い)、gnuplot で

```
gnuplot> G(x,t)=exp(-x*x/(4*t))/sqrt(4*pi*t)
gnuplot> t=0.1
gnuplot> Tmax=5
gnuplot> dt=0.01
gnuplot> load "anim.gp"
```

(アニメーション GIF を作る)

```
gnuplot> set term gif animate delay 10
gnuplot> set output "heatkernel.gif"
gnuplot> load "anim.gp"
```

$t = 0.1$  から  $0.01$  刻みで  $t = 5$  まで、 $G(\cdot, t)$  のグラフが簡易アニメーションで描ける。

## 7.5.4 熱方程式の基本解の性質

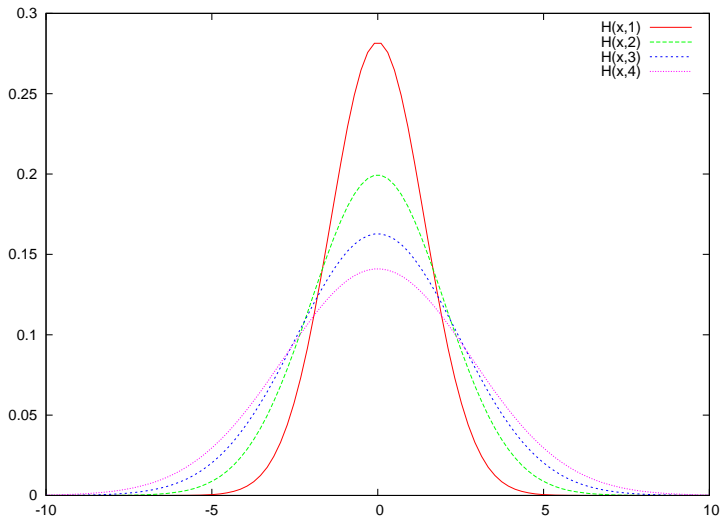


図 2: 熱方程式の基本解  $H(\cdot, t)$  の  $t = 1, 2, 3, 4$  でのグラフ

## 7.5.4 熱方程式の基本解の性質 ほぼ余談

$G$  は、物理的には、時刻 0 で原点に単位熱量が置かれた場合に、その熱が伝導 (拡散) していく状態を表す関数である。

$$G \text{ 自身が熱方程式を満たす: } \frac{\partial}{\partial t} G(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t).$$

$t \rightarrow +\infty$  のとき  $G(x, t) \rightarrow 0$  であるが、 $t \rightarrow +0$  としても 0 以外の点では 0 に収束する。実際、

$$\lim_{t \rightarrow +0} G(x, t) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ +\infty & (x = 0). \end{cases}$$

(ここからは超関数論を前提にした話)

実は  $t \rightarrow +0$  のとき、 $G(x, t)$  は **Dirac のデルタ関数** に収束する:

$$\lim_{t \rightarrow +0} G(x, t) = \delta(x).$$

$G$  は Dirac のデルタ関数を初期値とする熱方程式の初期値問題の解である:

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t), \quad G(x, 0) = \delta(x).$$

(一番上に書いた物理解釈の数学解釈と言える。)

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。(2014～).