# 信号処理とフーリエ変換 第11回

～サンプリング定理, 離散時間 Fourier 変換, 畳み込み～

かつらだ まさし
桂田 祐史

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/

2021年12月8日

# 目次

# 本日の内容・連絡事項

- サンプリング定理、離散時間 Fourier 変換の手短な紹介をし、これまでに現れた “4 つの Fourier 変換” を振り返る。Fourier 変換で重要な畳み込みの説明を始める。
(講義ノート [1] の §5, §6, §7 に該当する。)
- レポート課題 2について説明する。〆切りは 2021/1/12(水曜) 15:10. なるべく今年のうちに質問を済ませることを勧める (12/14, 12/21, 1/11 (いずれも 12:00–13:00) に Zoom オフィスアワーがある)。

# 5 サンプリング定理　5.1 はじめに

連続信号 $x(t)$ をサンプリングして、離散信号 $\{x(nT_s)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を取り出すことにより、元の信号の情報がどれくらい失われるのか、どのくらい保存されているのか、これは重要な問題である。

この問題は、離散 Fourier 変換でも考えたが (定理 7.3)、ここでは周期関数でない $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の Fourier 変換に関する、有名なサンプリング定理 (定理 11.2) を紹介する。その結論を大まかに述べると、ある周波数以上の周波数成分の含まれていない信号は、2 倍 (以上) のサンプリング周波数でサンプリングしたデータから再現できる、という内容である。

(少し違う表現をすると — 信号に含まれる最大周波数の 2 倍より高いサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号を復元できる。)

個人的には、定理 11.2 は確かに正しい命題であるが、応用するにあたって、かなり不自然な内容である (現実との距離が大きすぎる) と考えている。

# 以前言いそびれたこと

離散 Fourier 変換のところで、周期的な信号の再現についての定理 (定理 8.3) を紹介した。最大周波数の 2 倍を超えるサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号が復元可能である、という十分性を示す内容であったが、一方で必要性を示唆する次の事実も紹介しておくべきだった。

## 注意 11.1 (最大周波数のぴったり 2 倍では不足)

例えば周波数 $f$ の正弦波 $x(t) = A\sin(2\pi ft)$ に対して、サンプリング周波数 $f_s = 2f$ でサンプリングすると、サンプリング周期は $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2f}$.

$$x(nT_s) = A\sin(2\pi f \cdot nT_s) = A\sin\left(2\pi f \cdot n\frac{1}{2f}\right) = A\sin(n\pi) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

何とサンプリングしたデータ $\{x(nT_s)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は零数列である。当然復元は不可能である。 □

## 定理 11.2 (サンプリング定理, Nyquist, Shannon, 染谷)

関数 $x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の Fourier 変換

$$X(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

が

$$(\exists W>0)(\forall\omega\in\mathbb{R}:|\omega|\ge W)\quad X(\omega)=0$$

を満たすならば、このような $W$ を任意に一つ取って

$$T:=\frac{\pi}{W}$$

とおくとき、次式が成り立つ。

$$(\forall t\in\mathbb{R})\quad x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\operatorname{sinc}\left[\pi(t/T-n)\right].$$

ただし $\operatorname{sinc}x:=\dfrac{\sin x}{x}$.

# 5.2 サンプリング定理と証明

つまり、周波数 $\dfrac{W}{2\pi}$ 以上の成分を含まない信号は、サンプリング周波数 $f_s := \dfrac{1}{T} = \dfrac{W}{\pi}$ $(= 2 \times \frac{W}{2\pi})$ でサンプリングした離散信号から復元できる。

言い換えると、$f$ 以上の周波数成分を含まない信号は、サンプリング周波数 $2f$ でサンプリングしたデータから復元できる。

# 5.2 サンプリング定理と証明

**証明**　Fourier 変換の反転公式

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (t \in \mathbb{R})$$

に仮定「$|\omega| \geq W \Rightarrow X(\omega) = 0$」を適用すると

(1) $$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^{W} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (t \in \mathbb{R}).$$

この式は周期 $2W$ の関数の Fourier 係数の式に似ている。

**周期 $2W$ の関数 $X$ の Fourier 級数**

$$c_n := \frac{1}{2W} \int_{-W}^{W} X(\omega) e^{-in\frac{2\pi}{2W}\omega} d\omega = \frac{1}{2W} \int_{-W}^{W} X(\omega) e^{-inT\omega} d\omega \quad \left(T = \frac{\pi}{W} \text{ を代入}\right)$$

とおくとき

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+in\frac{2\pi}{2W}\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+inT\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

($-$ を $+$, $+$ を $-$ に置き換えた式が成立する。)

# 5.2 サンプリング定理　証明 (続き)

これから、

$$c_n := \frac{1}{2W}\int_{-W}^{W} X(\omega)e^{+inT\omega}d\omega \tag{2}$$

とおくとき

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inT\omega} \quad (|\omega| \le W). \tag{3}$$

が成り立つことが分かる。$[-W, W]$ の外での $X$ の値を定義し直して、周期 $2W$ の関数としてから Fourier 級数展開した、とみなせる。

(1) $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-W}^{W} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ と (2) を見比べて、

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega(nT)}d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W}x(nT) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}x(nT). \tag{4}$$

($c_n$ が分かれば良いと思ったら、分かった !! )

(3), (4) を (1) に代入して、$\sum$ と $\int$ の順序を交換すると

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^{W} \left( \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-in\omega T} e^{i\omega t} d\omega \right) \\
&= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-W}^{W} e^{i\omega(t-nT)} d\omega \\
&= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot 2W \operatorname{sinc}(W(t-nT)) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(W(t-nT)).
\end{aligned}
$$

ここ (=) で、$\int_{-a}^{a} e^{ibx}\, dx = 2a \operatorname{sinc}(ab)$ $(a > 0,\ b \neq 0)$ を用いた。

$$
W(t-nT) = \frac{\pi}{T}(t-nT) = \pi\left(\frac{t}{T} - n\right)
$$

を用いて $W$ を消去して

$$
x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(\pi(t/T - n)). \quad \square
$$

ファミリーの最後のメンバー、離散時間 Fourier 変換を紹介する。実は、Fourier 級数の理論で本質的には済んでいる。

整数を添字に持つ複素数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を**離散信号** (discrete signal, discrete-time signal) という (Cf. サンプリング定理)。これは $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ という写像とみなせる。$f(n)=f_n$ ということ。離散信号全体の集合を $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ と表す。

$f=\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して、

$$\mathscr{F}f(\omega)=\widehat{f}(\omega):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}\quad(\omega\in\mathbb{R}) \tag{5}$$

で定まる関数 $\mathscr{F}f$ を $f$ の**離散時間 Fourier 変換** (discrete-time Fourier transform) と呼ぶ。

$\widehat{f}$ は周期 $2\pi$ の関数である (確認しよう！)。ゆえに $\omega\in[0,2\pi]$ あるいは $\omega\in[-\pi,\pi]$ で考えれば十分である。

反転公式は

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(\omega)e^{in\omega}\,d\omega\quad(n\in\mathbb{Z}). \tag{6}$$

# 6.1 離散時間 Fourier 変換の定義と反転公式

**証明 1** $f(n)$ は、周期 $2\pi/\omega$ の周期関数 $\widehat{f}$ の、第 $(-n)$ 番目の Fourier 係数と分かる。

Cf. 普通の Fourier 級数

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 周期 $2\pi$ に対し、$c_n := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$ とおくと $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

**証明 2** $\{e^{-in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は直交系である。実際 $m \neq n$ のとき

$$\left(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)\omega}d\omega = 0.$$

$m = n$ のとき

$$\left(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}\right) = \left(e^{-in\omega}, e^{-in\omega}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi.$$

ゆえに (5) は、直交系 $e^{-in\omega}$ による $\widehat{f}$ の展開であるから、その係数 $f(n)$ は

$$f(n) = \frac{\left(\widehat{f}, e^{-in\omega}\right)}{\left(e^{-in\omega}, e^{-in\omega}\right)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\omega)e^{in\omega}\,d\omega. \quad \square$$

# 6.2 Fourier ファミリーの一覧表

これまでに出て来た、Fourier 変換、Fourier 級数 (Fourier 係数)、離散時間 Fourier 変換、離散 Fourier 変換の一覧表を作って整理してみよう。

| 対象 | 操作の名前 | 変換の定義式 | 反転公式 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ 上の関数 | Fourier 変換 | $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$ | $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$ |
| $\mathbb{R}$ 上の周期関数 | Fourier 係数 | $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z})$ | $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ |
| $\mathbb{Z}$ 上の関数 (離散信号) | 離散時間 Fourier 変換 | $\widehat{f}(\omega) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega \in [0,2\pi])$ | $f(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \widehat{f}(\omega)e^{in\omega}\,d\omega$ |
| $\mathbb{Z}$ 上の周期関数 (周期的離散信号) | 離散 Fourier 変換 | $C_n = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} f_j\omega^{-nj} \quad (0 \le n \le N-1),$ $\omega := \exp\dfrac{2\pi i}{N}$ | $f_j = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} C_n\omega^{nj}$ |

しばらく観賞。式が良く似ていることに注目 (“$\int$ は $\sum$ の親戚”)。

その気になれば、もっと似せることも出来る。

- $c_n$, $C_n$ を $\widehat{f}(n)$ と書くとか (実際そうすることもある)。
- $\dfrac{1}{2\pi}$ を 2 つの $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ に分けるとか。$\dfrac{1}{N}$ を 2 つの $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ に分けるとか。
- 離散 Fourier 変換で、$\omega$ を $e^{2\pi i/N}$ で書くとか。
- 名前のつけ方もやり直すとか。

# 6.2 Fourier ファミリーの一覧表

写像の性質も似たところがある。

- どれも変換である (全単射であるから、逆写像が存在する)。
- (少し式を直すと) 内積を保つ (ユニタリ変換)。

# 7 畳み込み　7.1 はじめに

色々な関数 (連続信号, 離散信号) $f$, $g$ に対して、**畳み込み** $f*g$ が定義できる。

$f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して、$f*g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を次式で定める。

$$f*g(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy\quad(x\in\mathbb{R}).\tag{7}$$

周期 $2\pi$ の関数 $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して、$f*g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を次式で定める。

$$f*g(x):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)\,dy\quad(x\in\mathbb{R}).\tag{8}$$

$f,g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ に対して、$f*g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ を次式で定める。

$$f*g(n):=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(n-k)g(k)\quad(n\in\mathbb{Z}).\tag{9}$$

周期 $N$ の関数 $f,g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ に対して、$f*g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ を次式で定める。

$$f*g(n):=\sum_{k=0}^{N-1}f(n-k)g(k)\quad(n\in\mathbb{Z}).\tag{10}$$

**注意**　畳み込みを表す記号として $*$ が定着している。一方、コンピューターのプログラミング言語で、普通の積を表すためにも * が使われる。そのためか、畳み込みを表すのに普通の積の記号 $\cdot$ が使えるだろう、という勘違いした人が大量発生したことがある (おかしな解答が出回った？)。

# 7.1 はじめに

畳み込みは、ある種の積であると考えられ、素性の良い性質を持つ。

$$f * g = g * f, \qquad \text{(交換法則)} \tag{11}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h), \qquad \text{(結合法則)} \tag{12}$$

$$(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g, \qquad \text{(分配法則, 線形性 (i))} \tag{13}$$

$$(cf) * g = c(f * g) \qquad \text{(線形性 (ii))} \tag{14}$$

$$[f \neq 0 \quad \wedge \quad f * g = f * h] \quad \Rightarrow \quad g = h \qquad \text{(零因子の非存在)} \tag{15}$$

# 7.1 はじめに

畳み込みと Fourier 解析との関係では、次が重要である。

1. 畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積に移る。

$$\mathscr{F}[f * g] = \text{定数} \times \mathscr{F} f \mathscr{F} g. \tag{16}$$

(定数が何になるかは、畳み込みや Fourier 変換の定義の流儀による。)

2. 畳み込みには、単位元 (もどき) “デルタ” $\delta$ がある。

$$f * \delta = f. \tag{17}$$

   - 連続信号に対しては、$\delta$ はディラックのデルタ超関数 (普通の関数の範囲をはみ出してしまうので少し扱いにくい)
   - 離散信号に対しては、$\delta = \{\delta_{n0}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\cdots, 0, 0, \underset{n=0}{1}, 0, 0, \cdots\right\}$ (単位インパルス)

3. デルタ $\delta$ の Fourier 変換は定数関数 1 である。また定数関数 1 の Fourier 変換は $\delta$ である。

$$\mathscr{F}\delta = \text{定数} \times 1, \quad \mathscr{F}1 = \text{定数} \times \delta. \tag{18}$$

# 参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).