信号処理とフーリエ変換 第8回

～離散 Fourier 変換 (1)～

桂田 祐史（かつらだ まさし）
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/

2021年11月17日

目次

本日の内容・連絡事項

- これから 3 回、**離散 Fourier 変換**を説明する。講義ノート [1] の§3 の内容である。
  1. 離散 Fourier 係数を説明する。周期関数をサンプリングしたデータから Fourier 係数を近似的に求めたものが、離散 Fourier 係数であり、それを求める操作 (写像) が離散 Fourier 変換とみなせる。離散フーリエ係数の基本的な性質と、Fourier 係数に関するサンプリング定理を紹介する。
  2. 離散 Fourier 変換は $\mathbb{C}^n$ 上の線形変換である。その反転公式を述べて証明する。鍵となるのは選点直交性と呼ばれる性質である。
  3. 音声信号をサンプリングして得たデータ (離散信号) を離散 Fourier 変換する実験を行う。音声データから離散 Fourier 係数を得ること、またその逆変換の両方に FFT が適用できる。
- レポート課題 1 については、とりあえず解説文書を公開する (2021/11/17 15:20)。

3 離散 Fourier 変換

これから説明する**離散 Fourier 変換**は、Fourier 級数の話の離散化として現れる。実際にデータ処理する場合はサンプリングした離散データを扱わざるを得ず、離散 Fourier 変換の応用上の重要性はとても高い。

一方、離散 Fourier 変換は、周期数列についての Fourier 変換であり、Fourier 級数の近似理論にとどまらない意味を持っている。

§2 (普通の Fourier 変換) もそうであったが、複素指数関数のみで説明する (あまり時間に余裕がなく、式を短く書きたいので、三角関数バージョンの説明はサボる)。

3.1 離散 Fourier 係数　サンプリング

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は周期 T とする。f がある程度滑らかならば[1]、次が成り立つ。

(1)
$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}\quad (x\in\mathbb{R}),$$

(2)
$$c_n := \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx\quad (n\in\mathbb{Z}).$$

次式で $\{x_j\}$, $\{f_j\}$ を定める。$x_0, x_1, \cdots, x_N$ は $[0,T]$ の N 等分点となる。

(3)
$$h := \frac{T}{N},\quad x_j = jh,\quad f_j := f(x_j)\quad (j\in\mathbb{Z}).$$

f が周期 T であることから ($x_{j+N}=(j+N)h=jh+T=x_j+T$ なので)

(4)
$$f_{j+N}=f_j\quad (j\in\mathbb{Z}).$$

すなわち $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は周期 N の周期数列である。

信号処理では、f を (連続) 信号、x_j を**標本点**、h を**サンプリング周期** (標本化周期, sampling period)、$1/h$ を**サンプリング周波数** (標本化周波数, sample rate, sampling rate) と呼ぶ。また、信号を測定して $\{f_j\}$ を得ることを**サンプリング** (標本化) と呼ぶ。

[1]注: これまでは原点について対称な区間での積分 $c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$ で表していた。

Fourier 係数 c_n を知りたいとき、$\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ を用いて近似値を計算することを考える。

c_n をどのように近似計算するのが良いか。結論を天下りに述べると

周期関数の 1 周期区間における積分の計算には台形則がベスト
(正しい意味でベスト。しばしば驚異的な高精度が達成される。)

(これは数値解析の常識であるが、説明は省略する。)

$F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ の定積分

$$I = \int_a^b F(x)\,dx$$

に対して

(5)
$$I_N := \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{F(x_{j-1}) + F(x_j)}{2} h \right) = h \left(\frac{F_0}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} F_j + \frac{F_N}{2} \right)$$

をその近似値として採用するのが (複合) **台形公式**である。ただし

(6)
$$h := \frac{b-a}{N}, \quad x_j := a + jh, \quad F_j := F(x_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, N).$$

F が周期 $b-a$ の周期関数であれば、$F(a) = F(b)$ であるから $F_0 = F_N$. ゆえに次式が成り立つ:

(7)
$$I_N = h \sum_{j=0}^{N-1} F_j = h \sum_{j=1}^{N} F_j.$$

$F(x) := \frac{1}{T} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}$ の積分に台形則を適用して、c_n を近似計算したものを C_n (大文字表記) とする:

(8) $$C_n := \frac{1}{T} \cdot h \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j}.$$

(9) $$\omega := e^{i\frac{2\pi}{T}h} = e^{\frac{2\pi i}{N}} \quad \left(\because \frac{h}{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{N} = \frac{1}{N}\right)$$

とおくと (ω は 1 の原始 N 乗根である — すぐ後で後述)

$$e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j} = e^{-in\frac{2\pi}{T}\cdot jh} = e^{-inj\frac{2\pi}{N}} = \omega^{-nj}.$$

ゆえに

(10) $$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}.$$

この C_n を f の**離散 Fourier 係数**と呼ぶ。

補題 8.1 (ω の性質 ⋯ 1 の原始 N 乗根, 冪乗の和)

$N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$ とおくとき、次の (1), (2) が成り立つ。

1. $1 \le m \le N-1$ ならば $\omega^m \ne 1$, $\omega^N = 1$　(ω は 1 の原始 N 乗根).
(ゆえに $m \equiv 0 \pmod N$ ならば $\omega^m = 1$, そうでないならば $\omega^m \ne 1$.)
2. 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \begin{cases} N & (m \equiv 0 \pmod N) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

証明.

1. (常識的だけれど一応) $\theta := \frac{2\pi}{N}$ とおくと、$\omega = e^{i\theta}$, $\omega^m = e^{im\theta}$. $1 \le m \le N-1$ ならば $0 < m\theta < 2\pi$ であるから、$\omega^m = e^{im\theta} \ne 1$. $\omega^N = e^{iN\theta} = e^{2\pi i} = 1$.
2. $m \equiv 0 \pmod N$ であれば、$\omega^m = 1$ であるから $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \sum_{j=0}^{N-1} 1 = N$.　(続く)

□

証明 (続き).

$m \equiv 0 \pmod N$ でなければ、$\omega^m \neq 1$. 初項 1, 公比 ω^m の等比級数の和であるから

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = 1 \cdot \frac{1-\left(\omega^{mN}\right)}{1-\omega^m} = \frac{1-\left(\omega^N\right)^m}{1-\omega^m} = \frac{1-1}{1-\omega^m} = 0.$$

$\square$

定理 8.2 (離散 Fourier 係数の性質)

周期 T の周期関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$h := \frac{T}{N}, \quad \omega := e^{2\pi i/N}, \quad x_j := jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}),$$
$$C_n := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

により $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定めるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

1. $\{C_n\}_n$ は周期 N の周期数列である: $C_{n+N} = C_n$ $(n \in \mathbb{Z})$.
2. f の複素 Fourier 係数 c_n が $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ を満たすならば、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$C_n = \sum_{m\equiv n} c_m \quad \left(= \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{n+pN}\right). \tag{11}$$

$\displaystyle\sum_{m\equiv n}$ は、$m \equiv n \pmod N$ を満たすすべての m についての和を意味する。

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ という条件は、例えば f が連続で区分的に C^1 級であれば満たされる。

証明.

1. $\omega^{-(n+N)j} = \omega^{-nj}\omega^{-Nj} = \omega^{-nj}$ であるから $C_{n+N} = C_n$.
2. $\displaystyle f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$ であるから

$$f_j = f(x_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}j\frac{T}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \omega^{nj}. \tag{12}$$

ゆえに (絶対収束することに注意して)

$$C_n = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1} f_j\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\omega^{-nj}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\omega^{mj}\right)$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sum_{j=0}^{N-1}\omega^{(m-n)j} = \frac{1}{N}\sum_{m\equiv n} c_m N = \sum_{m\equiv n} c_m. \qquad \square$$

3.1 離散 Fourier 係数　離散 Fourier 係数の性質

定理 8.2 の (1) ($\{C_n\}$ は周期 N の周期数列) から、$\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を求めよ、と要求されたとき、連続した N 項、例えば

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{pmatrix}$$

を計算すれば十分である。

“入力” $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ についても同様で、例えば

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

があれば十分である。

問題の舞台は $\mathbb{C}^N$ ということになる。

3.2 Fourier 係数のサンプリング定理

C_n は c_n を近似するように定めたが、本当にそうか？答えは “In a sense, Yes. But, ...”

定理 8.3 (Fourier 係数 (周期関数に対する Fourier 変換) に関するサンプリング定理)

周期 T の関数 $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が、有限 Fourier 級数

$$u(t) = \sum_{n=-M}^{M} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

で表せるとき、すなわち u の Fourier 係数 $\{c_n\}$ について

$$|n| > M \quad \Rightarrow \quad c_n = 0$$

が成り立つとき、$N > 2M$ を満たす N に対して、$\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ は、

$$(\bigstar) \qquad \begin{aligned} C_n &= c_n \quad (0 \le n \le M), \\ C_{N-n} &= c_{-n} \quad (1 \le n \le M), \\ C_n &= 0 \quad (M < n < N - M) \end{aligned}$$

を満たす。(特に、全ての (0 でない) Fourier 係数 $\{c_n\}_{n=-M}^{M}$ は、離散 Fourier 係数 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ から求まる。ゆえに $u(t)$ も完全に再現できる。)

3.2 Fourier 係数のサンプリング定理　vs. 通常のサンプリング定理

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

通常、サンプリング定理と呼ばれるのは、(普通の Fourier 変換に関する) 別の定理 (第 11 回授業で説明する予定) であるが、上の定理 8.3 もそれに近い内容を持っている。(個人的な意見になるが、定理 8.3 の方が現実の (音などの) 現象の説明に便利である。この辺は "通常のサンプリング定理" を紹介したときに再び取り上げよう。)

仮定の自然さについて: Riemann-Lebesgue の定理から、

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$$

であるから、$|n|$ が大きいとき $|c_n|$ が小さいと期待するのは、それなりにもっともである。

しかし、上の定理のように、$|n|$ が大きいとき $c_n = 0$ (ぴったり 0) としてしまうと、f は実解析的となり、非常になめらかな関数ということになる。これは極端かもしれない。不連続関数にも使えるのが Fourier 級数の良いところだったのでは？

(信号処理分野の人は、小さいことと 0 であることの差をおおらかに考えているのかもしれないが、無限がからむので、そんなに簡単ではない…一数学者の意見)

定理 8.3 の証明を書く前に、具体的な M, N に対して主張を確認すると、カラクリが見えてくる (と思う)。

$M = 1$ (つまり $|n| > 1 \Rightarrow c_n = 0$), $N = 10$ の場合、

$$C_0 = \sum_{m\equiv 0} c_m = c_0 + c_{10} + c_{-10} + c_{20} + c_{-20} + c_{30} + \cdots = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0,$$

$$C_1 = \sum_{m\equiv 1} c_m = c_1 + c_{-9} + c_{11} + c_{-19} + c_{21} + \cdots = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1,$$

$$C_9 = \sum_{m\equiv 9} c_m = c_9 + c_{-1} + c_{19} + c_{-11} + c_{29} + c_{-21} + \cdots = 0 + c_{-1} + 0 + 0 + \cdots = c_{-1},$$

$$C_2 = \sum_{m\equiv 2} c_m = c_2 + c_{-8} + c_{12} + c_{-18} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

$$C_8 = \sum_{m\equiv 8} c_m = c_8 + c_{-2} + c_{18} + c_{-12} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

同様にして $2 \le n \le 8$ に対して、 $C_n = 0$ が得られる。

0 でない c_n は、$c_0 = C_0$, $c_1 = C_1$, $c_{-1} = C_9$ と求まる。

一方、$M = 5$ (つまり $|n| > 5 \Rightarrow c_n = 0$), $N = 10$ の場合は

$$C_0 = \sum_{m\equiv 0} c_m = c_0 + c_{10} + c_{-10} + c_{20} + c_{-20} + c_{30} + \cdots = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0,$$

$$C_1 = \sum_{m\equiv 1} c_m = c_1 + c_{-9} + c_{11} + c_{-19} + c_{21} + \cdots = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1,$$

$$C_9 = \sum_{m\equiv 9} c_m = c_9 + c_{-1} + c_{19} + c_{-11} + c_{29} + c_{-21} + \cdots = 0 + c_{-1} + 0 + 0 + \cdots = c_{-1},$$

$$C_2 = \sum_{m\equiv 2} c_m = c_2 + c_{-8} + c_{12} + c_{-18} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = c_2,$$

$$C_8 = \sum_{m\equiv 8} c_m = c_8 + c_{-2} + c_{18} + c_{-12} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = c_{-2},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$C_4 = \sum_{m\equiv 4} c_m = c_4 + c_{-6} + c_{14} + c_{-16} + \cdots = c_4 + 0 + 0 + \cdots = c_4,$$

$$C_6 = \sum_{m\equiv 6} c_m = c_6 + c_{-4} + c_{16} + c_{-14} + \cdots = 0 + c_{-4} + 0 + \cdots = c_{-4},$$

ここまでは調子が良い。ところが

$$C_5 = \sum_{m\equiv 5} c_m = c_5 + c_{-5} + c_{15} + c_{-15} + \cdots = c_5 + c_{-5} + 0 + 0 + \cdots = c_5 + c_{-5} \quad \text{(混じる)}.$$

$C_5 = c_5$ も $C_5 = c_{-5}$ も成り立たない。c_5 と c_{-5} は簡単に求まりそうにない。

少し考えると、$M = 5$ であっても、$N > 10$ であれば、うまく行く ((★) が成り立つ) ことが分かる。落ち着いて一般化すると、$N > 2M$ であれば (★) が成り立つ。 □

定理 8.3 の証明.

定理 8.3 (2)

$$C_n = \sum_{m \equiv n} c_m = c_n + \sum_{p=1}^{\infty} \left(c_{n+pN} + c_{n-pN} \right).$$

を用いる。$0 \le n \le M$ であれば、

- $n + pN \ge N > 2M > M$ であるから、$c_{n+pN} = 0$.
- $n - pN \le M - N < -M$ であるから、$c_{n-pN} = 0$.

ゆえに $C_n = c_n$.
残りも同様にして証明できる。 □

次のことはぜひ頭に入れて欲しい。

$0 \le n \ll N$ であるとき、

- c_n の近似は C_n
- c_{-n} の近似は C_{N-n}　(C_{N-n} は c_{N-n} ではなく、c_{-n} の近似である)

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).