信号処理とフーリエ変換 第5回

～Fourier 級数と微分との関係～

かつらだ　まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/

2021年10月20日

目次

本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の主に§1.5 の部分 (Fourier 級数と微分との関係) の内容を講義します。

  (f の Fourier 係数と f' の Fourier 係数の関係 (割と簡単)、f の滑らかさ (≒何回微分できるか) と f の Fourier 級数の収束の "良さ" との関係 (ざっくりとでも分かってくれたら))
- レポート課題 1
  - 公式の問題文は 10 月 20 日 15:20 までに公開する。
    `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/kadai1.pdf`
  - 締め切りは 11 月 10 日 15:20。Oh-o! Meiji で提出。
  - フォーマットは A4 サイズの PDF。原則として単一のファイル。やむを得ず複数のファイルとする場合は、表紙で区別できるようにする。
  - 課題の内容については、前半部分は前回の講義動画でコメントしてあります。

言いたいこと (A の Fourier 級数が B であることを $A\sim B$ と書くことにして)

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

とするとき

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}inc_ne^{inx}.$$

これは項別微分して出来る式なので、覚える苦労はない (定理 5.1, 5.3)。

関数 f の複素 Fourier 係数 (上の c_n) を $\mathscr{F}[f](n)$ と書くことにすると

$$(\star)\qquad \mathscr{F}[f'](n)=in\mathscr{F}[f](n).$$

この公式は、普通の Fourier 変換の公式 $\mathscr{F}[f'](\xi)=i\xi\mathscr{F}[f](\xi)$ (後述) と対応する。

これらは Fourier 級数、Fourier 変換の微分方程式への応用において重要である。

($\star$) を利用して、連続かつ区分的 C^1 級の関数の Fourier 級数が一様収束することが証明できる (定理 5.6)。

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係

f の Fourier 級数、f' の Fourier 級数が出て来るので、この節では次のような記号を用いる。

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,$$
$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{inx}}\, dx.$$

定理 5.1 (微分と Fourier 係数の関係)

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 周期 2π かつ C^1 級ならば

$$a_n(f') = \begin{cases} nb_n(f) & (n\in\mathbb{N}) \\ 0 & (n=0), \end{cases} \qquad b_n(f') = -na_n(f) \quad (n\in\mathbb{N}).$$

$$c_n(f') = inc_n(f) \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係

定理 5.1 の証明　アイディア一発「部分積分」

$f(x)\cos nx$ が周期 2π であるから、$x=\pm\pi$ での値が同じなので $[f(x)\cos nx]_{-\pi}^{\pi}=0$. これを用いると

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\;dx = \frac{1}{\pi}\left[[f(x)\cos nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n\sin nx)dx\right] \\ &= n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\;dx = \begin{cases} nb_n(f) & (n\ge 1) \\ 0 & (n=0). \end{cases} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} b_n(f') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\;dx = \frac{1}{\pi}\left[[f(x)\sin nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(n\cos nx)dx\right] \\ &= -n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\;dx = -na_n(f). \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\;dx = \frac{1}{2\pi}\left[\left[f(x)e^{inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot(-ine^{-inx})dx\right] \\ &= -in\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\;dx = -inc_n(f). \quad \square \end{aligned}$$

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係　例

Fourier 級数は、不連続な関数にも適用できることが重要である。

上の定理は関数が C^1 級でない場合にも拡張できる。次の例をみてみよう。

例 5.2 (連続かつ区分的に C^1 級の関数とその導関数の Fourier 級数)

第 2 回の授業で、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 2π で

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x \quad (-\pi \le x < \pi)$$

を満たすとき、f と g の Fourier 級数展開が

$$\text{(1)} \qquad f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right),$$

$$\text{(2)} \qquad g(x) \sim 4\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

であることを示した。

f は C^1 級ではない (グラフはところどころトンガっている) が、(1) の右辺を項別微分すると、(2) の右辺になる。これは偶然ではない。少し複雑にはなるが、この例にも適用できるような定理を述べよう。

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係

定理 5.3 (微分と Fourier 係数の関係 (拡張版))

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 2π, 連続かつ区分的に C^1 級ならば

$$a_n(f')=\begin{cases} nb_n(f) & (n\in\mathbb{N}) \\ 0 & (n=0), \end{cases} \qquad b_n(f')=-na_n(f) \quad (n\in\mathbb{N}).$$

$$c_n(f')=inc_n(f) \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

(証明は次のスライドで行う。)

話が少し細かすぎるように感じられるかもしれないが、Fourier 級数には微妙な議論が必要になる場合があるので、本質的なことと考えられる。

定理の仮定から f の連続性を除くと、これらの公式は導かれなくなる。

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係

区分的に C^1 級とはどういうことか、これまでも使って来たが、(証明をするので) きちんとした定義を述べる。

- $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ が**区分的に C^1 級**とは、ある有限数列 $\{x_j\}_{j=0}^N$ が存在して、
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$
かつ各 $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$ に対して、f は開区間 (x_{j-1}, x_j) で C^1 級で、極限
$$(3) \qquad \lim_{x \to x_{j-1}+0} f(x), \quad \lim_{x \to x_j-0} f(x), \quad \lim_{x \to x_{j-1}+0} f'(x), \quad \lim_{x \to x_j-0} f'(x)$$
が存在することをいう。
- **周期関数** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が**区分的に C^1 級**とは、1 周期区間 $[a,b]$ に対して、f (の $[a,b]$ への制限) が $[a,b]$ で区分的に C^1 級であることをいう。

言葉の意味の確認: 区分的に C^1 級とは

$f\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ が連続な場合は、区分的に C^1 級とは、ある有限数列 $\{x_j\}_{j=0}^N$ が存在して、

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b,$$

かつ各 $j\in\{1,2,\cdots,N\}$ に対して、f を $[x_{j-1},x_j]$ に制限すると C^1 級であることと同値である。特に区間の端点 x_{j-1}, x_j において片側微分係数

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(x_{j-1}+h)-f(x_{j-1})}{h},\quad \lim_{h\to-0}\frac{f(x_j+h)-f(x_j)}{h} \tag{4}$$

が存在する、ということである。

f は $[a,b]\setminus\{x_j\mid j=1,\dots,N\}$ で微分できる。x_j では f' は定義できない (かもしれない) が、それ以外の点では f' は定義できて、f' は $[a,b]$ で (広義) 積分可能である。

f が定理 5.3 の仮定を満たすとき、ある $\{x_j\}_{j=0}^N$ が存在して

$$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_N=\pi,$$

各 $j=1,\cdots,N$ に対して f を $[x_{j-1},x_j]$ に制限すると C^1 級であり、f' は x_j 以外では定義され、$f'(x)\cos nx$, $f'(x)\sin nx$, $f'(x)e^{-inx}$ は $[-\pi,\pi]$ で広義積分可能であり、$a_n(f')$, $b_n(f')$, $c_n(f')$ が定まる。

定理 5.3 の証明　f は連続かつ区分的に C^1 級であるから

$$(\exists \{x_j\}_{j=0}^n) \quad -\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi, \quad \text{各小区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ で } f \text{ は } C^1 \text{ 級.}$$

一般に次式が成り立つことに注意せよ。

$$\text{(5a)} \qquad \sum_{j=1}^n [F(x)]_{x_{j-1}}^{x_j} = F(x_n) - F(x_0) = F(\pi) - F(-\pi) = [F(x)]_{-\pi}^{\pi},$$

$$\text{(5b)} \qquad \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx.$$

積分を $[x_{j-1}, x_j]$ での積分に分けてから部分積分し、それから $\sum$ を求める。どれでも同様なので、複素 Fourier 級数の場合のみ示す。

$$
\begin{aligned}
c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^n \left(\left[f(x)e^{-inx} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cdot(-ine^{-inx})dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{ \left[f(x)e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \right\} = \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = inc_n(f).
\end{aligned}
$$

(f が微分可能でない点が存在し、積分は広義積分であるが、部分積分の式が成立。) □

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係　注意

系 5.4 (C^k 級の場合 (高階導関数の Fourier 係数))

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 2π かつ C^k 級のとき $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.
(f が C^{k-1} 級で、$f^{(k-1)}$ が連続かつ区分的に C^1 級のときも成り立つ。)

余談 1 (超関数の観点から)

(例 5.2 の f のような) 連続かつ区分的に C^1 級な関数 f は、微積分の意味では、微分可能でない点を持ちうる。ある意味で不完全な f' (値が未定義の点がある) の Fourier 係数を用いるのは心配かもしれないが、超関数論を学ぶと、f の定める超関数の導関数は、ここで用いた f' の定める超関数と一致することがわかる。

このことに限らず、Fourier 解析は超関数論を用いると見通しが良い。長関数論では、例 5.2 の g のような区分的 C^1 級であるが、不連続な関数に対しても、導関数を考えることができる (詳しいことは省略するがデルタ超関数 δ が現れる)。

1.5.1 微分と Fourier 係数の関係　上の定理の使い道

1. 微分方程式
   微分が in の掛け算になる。微分方程式が代数方程式の問題になる。そうして問題が解けることがある。後でそういう例が見られる (予定)。
2. 収束についての議論
   $n \to \pm\infty$ のときの Fourier 係数の減衰は、たくさんの回数微分可能な関数ほど速いことが示される。たくさん微分できる関数の Fourier 級数は良い収束をする。

   それに対して、(有限回しか微分可能でない関数は) 微分するたびに Fourier 係数の減衰が遅くなり、収束が良くなくなる。

1.5.2 Fourier 係数の減衰

定理 5.5

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は周期 2π とする。

1. f が積分可能ならば
   - (a) $$|a_n|, |b_n| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx,\quad |c_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx.$$
     特に $|f(x)|\le M$ ならば
     $$|a_0|, |a_n|, |b_n| \le 2M \quad (n\in\mathbb{N}),\quad |c_n|\le M \quad (n\in\mathbb{Z}).$$
   - (b) (**Riemann-Lebesgue の定理**)
     $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\quad \lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0.$$
2. (**Parseval の等式**) f が L^2 ならば
   $$\pi\left(\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\right) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx.$$

1.5.2 Fourier 係数の減衰

証明 $\left|e^{inx}\right| = 1$, $|\cos nx| \le 1$, $|\sin nx| \le 1$ に注意しよう。
(1-a) は簡単。例えば複素 Fourier 係数ならば

$$
\begin{aligned}
|c_n| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x)e^{-inx}\right| dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M\, dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi M = M.
\end{aligned}
$$

(1-b) は「数学とメディア」で証明した (？)。ここでは一般の場合の証明は省略するが、$|f|^2$ が積分可能な場合は、(2) から (級数が収束するので)

$$
\text{一般項} = |a_n|^2 + |b_n|^2 \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

が分かるので $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(f が積分可能でも、$|f|^2$ が積分可能とは限らないので、(1-b) の証明になるわけではないが、実際上は十分であろう。)

証明 (続き) (2) (これは既に一度やってある。)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と直交性から導かれる "ピタゴラスの等式"

$$\|f\|^2 = \left|\frac{a_0}{2}\right|^2 \|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 \|\cos nx\|^2 + |b_n|^2 \|\sin nx\|^2 \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \left\|e^{inx}\right\|^2.$$

に

$$\|\cos nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|^2\, dx = \begin{cases} \pi & (n \in \mathbb{N}) \\ 2\pi & (n = 0), \end{cases}$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx|^2\, dx = \pi \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\left\|e^{inx}\right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{inx}\right|^2 dx = 2\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を代入すれば良い。 □

1.5.2 Fourier 係数の減衰　応用として以前言ったこと

定理 5.6 (連続かつ区分的に C^1 級の関数の Fourier 級数は一様収束する)

f が連続かつ区分的に C^1 級ならば f の Fourier 級数は一様収束して、和は f に等しい。

証明　複素 Fourier 級数の場合に、Fourier 級数が一様収束することを示す。
f, f' の Fourier 係数をそれぞれ c_n, c_n' と表す。定理 5.3 により、$inc_n = c_n'$. 定理 5.5 より

$$(6)\quad \left\|f'\right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\left|f'(x)\right|^2 dx = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n'\right|^2 = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|inc_n\right|^2 = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2\left|c_n\right|^2.$$

Schwarz の不等式 ($\left|\sum_n a_n b_n\right| \le \sqrt{\sum_n |a_n|^2}\sqrt{\sum_n |b_n|^2}$) と (6) と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を使って

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}|c_n| = \sum_{n\neq 0} n\,|c_n|\cdot\frac{1}{n} \le \sqrt{\sum_{n\neq 0} n^2|c_n|^2}\sqrt{\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left\|f'\right\|^2}\sqrt{2\cdot\frac{\pi^2}{6}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}\left\|f'\right\| < \infty.$$

$\left|c_n e^{inx}\right| = |c_n|$ であるから、Weierstrass の M test により、$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ は一様収束する。

Fourier 級数が一様収束するとき、その和が元の関数に等しいという定理が成り立つ (その証明は省略する。講義ノート [1] 付録 C に書いてある。)。 □

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上？) は次の定理を用いる。

複素関数　定理 10.5　(Weierstrass の M-test)

Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$), 数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

1. $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\le M_n$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は一様収束するし (項別積分出来る)、各点 z で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z)$ は絶対収束する (和の順序が変えられる)。

1.5.3 Fourier 係数が速く減衰 ⇔ たくさん微分できる

定理 5.7 (関数がたくさん微分できるほど、Fourier 係数の減衰が速い)

$k \in \mathbb{N}$, f が周期 2π かつ C^k 級ならば

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n(f) = \lim_{n\to\infty} n^k b_n(f) = 0,$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} n^k c_n(f) = 0.$$

(Landau の little-o notation を用いると、$a_n = b_n = o(n^{-k})$ $(n \to \infty)$, $c_n = o(n^{-k})$ $(n \to \pm\infty)$ と表せる。)

証明.

$n^k c_n(f) = i^{-k} c_n\left(f^{(k)}\right)(n)$. また $f^{(k)}$ は連続なので、Riemann-Lebesgue の定理 (定理 5.5 (1-b)) から、$\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f^{(k)}) = 0$. ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} n^k c_n(f) = 0$. □

上の定理の大まかな逆のような定理が成り立つ。

定理 5.8 (関数の Fourier 係数の減衰が速ければ、たくさんの回数微分可能)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π かつ連続で、その Fourier 係数 a_n, b_n が、ある自然数 k に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty$$

を満たすとする。このとき f は C^k 級であり、f の Fourier 級数は k 回項別微分可能である。

証明.

Weierstrass の M test と「$\{f_n\}$ が C^1 級の関数列で f に各点収束、$\{f_n'\}$ が g に一様収束するならば、f は C^1 級で $f' = g$」という定理を用いる。詳細は省略する。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).