信号処理とフーリエ変換 第3回

～ 直交性 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/

2021 年 10 月 6 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 今回は、主に講義ノート [1] の §1.3 の部分 (直交性) の内容を講義します。

本日の内容・連絡事項

- 今回は、主に講義ノート [1] の §1.3 の部分 (直交性) の内容を講義します。
- (これはもっと早めに注意すべきでしたが) オンデマンド授業をしていますが、授業内容・進行はあえて例年と同じようにしています。それで動画を作ってみると、1 回の授業の時間は結構ばらつきが出ます。多分板書してそれをノートにとってもらうと時間がかかるけれど、スクリーンに映してそれを眺めてもらうには時間がかからない、ということだと考えています。
    - 動画の時間のばらつきは受け入れて下さい。
    - 重要な式を手で書く時間を確保して下さい (やり方は任せます)。

本日の内容・連絡事項

- 今回は、主に講義ノート [1] の §1.3 の部分 (直交性) の内容を講義します。
- (これはもっと早めに注意すべきでしたが) オンデマンド授業をしていますが、授業内容・進行はあえて例年と同じようにしています。それで動画を作ってみると、1 回の授業の時間は結構ばらつきが出ます。多分板書してそれをノートにとってもらうと時間がかかるけれど、スクリーンに映してそれを眺めてもらうには時間がかからない、ということだと考えています。
    - 動画の時間のばらつきは受け入れて下さい。
    - 重要な式を手で書く時間を確保して下さい (やり方は任せます)。
- 10 月 11 日 (月曜) から、明治大学の活動制限指針レベルは 1 となりますが、この講義はレベル 1 でもオンライン授業をすることになっています。変更は特にありません。

本日の内容・連絡事項

- 今回は、主に講義ノート [1] の §1.3 の部分 (直交性) の内容を講義します。
- (これはもっと早めに注意すべきでしたが) オンデマンド授業をしていますが、授業内容・進行はあえて例年と同じようにしています。それで動画を作ってみると、1 回の授業の時間は結構ばらつきが出ます。多分板書してそれをノートにとってもらうと時間がかかるけれど、スクリーンに映してそれを眺めてもらうには時間がかからない、ということだと考えています。
  - 動画の時間のばらつきは受け入れて下さい。
  - 重要な式を手で書く時間を確保して下さい (やり方は任せます)。
- 10 月 11 日 (月曜) から、明治大学の活動制限指針レベルは 1 となりますが、この講義はレベル 1 でもオンライン授業をすることになっています。変更は特にありません。
- 質問用の Zoom オフィスアワーを火曜 12:00–13:00 に設けます。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておきます。(レベル 2 に戻った場合、曜日時間を変更するかもしれません。シラバスの補足を確認して下さい。)

本日の内容・連絡事項

- 今回は、主に講義ノート [1] の §1.3 の部分 (直交性) の内容を講義します。
- (これはもっと早めに注意すべきでしたが) オンデマンド授業をしていますが、授業内容・進行はあえて例年と同じようにしています。それで動画を作ってみると、1 回の授業の時間は結構ばらつきが出ます。多分板書してそれをノートにとってもらうと時間がかかるけれど、スクリーンに映してそれを眺めてもらうには時間がかからない、ということだと考えています。
    - 動画の時間のばらつきは受け入れて下さい。
    - 重要な式を手で書く時間を確保して下さい (やり方は任せます)。
- 10 月 11 日 (月曜) から、明治大学の活動制限指針レベルは 1 となりますが、この講義はレベル 1 でもオンライン授業をすることになっています。変更は特にありません。
- 質問用の Zoom オフィスアワーを火曜 12:00–13:00 に設けます。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておきます。(レベル 2 に戻った場合、曜日時間を変更するかもしれません。シラバスの補足を確認して下さい。)
- 前回、Mathematica を使いました。(レポート課題 1 の半分くらいは前回やったことと同じような内容なので) 自分の Mac で Mathematica を整備して、例に出したプログラムが動くようにしておいて下さい。

1.2.5 やり残し: 3つの収束の強弱

1.2.5 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \leq \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

1.2.5 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \le \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

1.2.5 やり残し: 3 つの収束の強弱

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \leq \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \leq \int_a^b \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx$$
$$= \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \le \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \le \int_a^b \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx$$
$$= \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (この後に紹介する例 1)。

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \le \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx &\le \int_a^b \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx \\ &= \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (この後に紹介する例 1)。
- 各点収束しても L^p 収束するとは限らない (例 2)。

定理 3.1 (一様収束すれば各点収束&L^p 収束する)

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ $(1 \le \forall p < \infty)$ L^p 収束」

注意: いずれも極限の関数は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

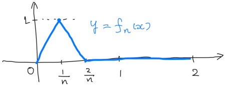
(2) の証明:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx &\le \int_a^b \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx \\ &= \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (この後に紹介する例 1)。
- 各点収束しても L^p 収束するとは限らない (例 2)。
- (これは説明を省略する) L^p 収束すれば、ある部分列が存在して、ほとんどいたるところ各点収束する (伊藤 [2])。

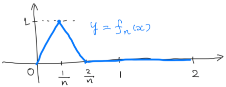
1.2.5 3つの収束の強弱　例1

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。



1.2.5 3つの収束の強弱　例1

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。

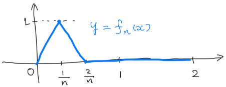


- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。

$$(\forall x \in [0,2]) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$ （なぜか考えてみよう。p. 24 で解説。).

1.2.5 3つの収束の強弱　例1

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。

  $$(\forall x \in [0,2]) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$ (なぜか考えてみよう。p. 24 で解説。).

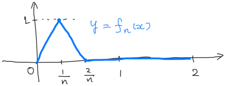
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、任意の p に対して定数関数 0 に L^p 収束する $(1 \le p < \infty)$。

  $\because$ $0 \le f_n(x) \le 1$ であるから、$|f_n(x)|^p \le |f_n(x)|$ であるので

  $$\int_0^2 |f_n(x) - 0|^p \, dx = \int_0^2 |f_n(x)|^p \, dx \le \int_0^2 |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n} \to 0.$$

1.2.5 3つの収束の強弱　例1

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, 1)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。

$$(\forall x \in [0,2]) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (\text{なぜか考えてみよう。p. 24 で解説。}).$$

- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、任意の p に対して定数関数 0 に L^p 収束する $(1 \le p < \infty)$。

$\because$ $0 \le f_n(x) \le 1$ であるから、$|f_n(x)|^p \le |f_n(x)|$ であるので

$$\int_0^2 |f_n(x) - 0|^p \; dx = \int_0^2 |f_n(x)|^p \; dx \le \int_0^2 |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n} \to 0.$$

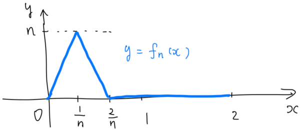
- しかし $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束しない。背理法で証明する。もしある f に一様収束するならば、f に各点収束するので、$f(x) = 0$.

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = 1 \not\to 0 \quad (n \to \infty).$$

($\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各点収束するが一様収束しない。これは、Gibbs の現象に似ている。)

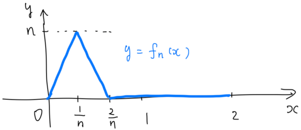
1.2.5 3つの収束の強弱　例2

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



1.2.5 3つの収束の強弱　例2

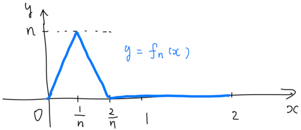
$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する (例 1 と同様)。

1.2.5 3つの収束の強弱　例 2

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。

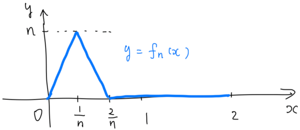


- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する (例 1 と同様)。
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は (やはり) 一様収束しない。もし f に一様収束するならば、$f = 0$ のはずであるが

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = n \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

1.2.5 3つの収束の強弱　例 2

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する (例 1 と同様)。
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は (やはり) 一様収束しない。もし f に一様収束するならば、$f=0$ のはずであるが

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)-0| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = n \to +\infty \quad (n\to\infty).$$

- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は L^1 収束しない。実際 (f に L^1 収束するならば、実は $f=0$ であることがやはり分かるので)

$$\int_0^2 |f_n(x)-0|\,dx = \int_0^2 |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n = 1 \not\to 0 \quad (n\to\infty).$$

($1<p<\infty$ のとき $\displaystyle\int_0^2 |f(x)-0|^p\,dx = \frac{2n^{p-1}}{p+1} \to \infty$. ゆえに L^p 収束もしない。)

直交性の話をする。実はすごく重要である。

直交性の話をする。実はすごく重要である。

- 他の Fourier 変換にも、しばしば直交性が現れる。
- 内積を使った処理・考え方に慣れるべき。早めに触れよう。
- Fourier 級数は、直交系による展開で、係数の公式 (定理 3.10) は非常に広く一般的に成り立つ。ぜひともマスターしよう。
  (通常の Fourier 級数だけでなく、Fourier の方法に現れる固有関数による「一般の Fourier 級数展開」, 直交多項式による展開などでも、この公式で係数が求まる。)
- 内積から導かれるノルムによる収束が重要になる。

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。次は知っているはず。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\; m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\; m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\; n \in \mathbb{N}),$$ ($m = n$ でも OK)

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\; m \neq n).$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。次は知っているはず。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\; m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\; m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\; n \in \mathbb{N}), \quad (m = n \text{ でも OK})$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\; m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.

1.3 直交性　1.3.1 三角関数と指数関数の直交性

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。次は知っているはず。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}), \quad (m = n \text{ でも OK})$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.
$\overline{e^{inx}}$ の $\overline{}$ は、共役複素数を表す記号である。

$$\overline{1 + 2i} = 1 - 2i, \quad \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。次は知っているはず。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}), \qquad (m = n \text{ でも OK})$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.
$\overline{e^{inx}}$ の $\overline{}$ は、共役複素数を表す記号である。

$$\overline{1 + 2i} = 1 - 2i, \quad \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.$$

注意: (1a), (1c) の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\mathbb{Z}$ で置き換えることは出来ない。(1b) の $\mathbb{N}$ を $\mathbb{Z}$ で置き換えることも出来ない。例えば $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos(-mx) dx = \pi \neq 0.$

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする [1]。

[1] 最初から $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに $\mathbb{C}$ の場合はしばしば面倒になる。$\mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする [1]。

この講義では、周期 2π かつ区分的に C^1 級の関数の全体を考える。

$$X_{2\pi} = X_{2\pi,\mathbb{K}} := \left\{ f \;\middle|\; f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad \text{周期 } 2\pi, \text{区分的に } C^1 \text{ 級} \right\}. \tag{2}$$

これは $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である (和 $f+g$, $c \in \mathbb{K}$ との積 cf が定義できる)。$_{2\pi}$ は省略しない方が良い。

[1] 最初から $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに $\mathbb{C}$ の場合はしばしば面倒になる。$\mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする [1]。

この講義では、周期 2π かつ区分的に C^1 級の関数の全体を考える。

$$X_{2\pi} = X_{2\pi,\mathbb{K}} := \left\{ f \;\middle|\; f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad \text{周期 } 2\pi, \text{区分的に } C^1 \text{ 級} \right\}. \tag{2}$$

これは $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である (和 $f+g$, $c \in \mathbb{K}$ との積 cf が定義できる)。
$_{2\pi}$ は省略しない方が良い。

(本当は、二乗可積分関数の全体

$$L^2(-\pi,\pi) = \left\{ f \;\middle|\; f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{C} \text{ Lebesgue 可測かつ } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < +\infty \right\}$$

で話をしたい。そうすると、すっきりした完璧に近い議論が出来る。)

[1] 最初から $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに $\mathbb{C}$ の場合はしばしば面倒になる。$\mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

$$(3)\quad (f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ のときは } \overline{} \text{ がなくても同じ})$$

とおき、f と g の**内積** (L^2 内積) と呼ぶ。

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

(3)　$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$　($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは $\overline{\quad}$ がなくても同じ)

とおき、f と g の**内積** (L^2 内積) と呼ぶ。

(4)　$$\|f\| := \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx}$$

とおき、f の**ノルム** (L^2 ノルム, 長さ, 大きさ) とよぶ。

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

(3)　$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$　($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは $\overline{}$ がなくても同じ)

とおき、f と g の**内積** (L^2 内積) と呼ぶ。

(4)
$$\|f\| := \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx}$$

とおき、f の**ノルム** (L^2 ノルム, 長さ, 大きさ) とよぶ。

注意: 一般に $c \in \mathbb{C}$ に対して $c\overline{c} = |c|^2$ であるから $f(x)\overline{f(x)} = |f(x)|^2$

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$ ならば $(\cos mx, \cos nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ならば $(\sin mx, \sin nx) = 0$.
- $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ ならば $(\cos mx, \sin nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ ならば $\left(e^{imx}, e^{inx}\right) = 0$.

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$ ならば $(\cos mx, \cos nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ならば $(\sin mx, \sin nx) = 0$.
- $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ ならば $(\cos mx, \sin nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ ならば $\left(e^{imx}, e^{inx}\right) = 0$.

ノルムについても調べておこう。

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\cos 0x\| = \|1\| = \sqrt{2\pi},$$
$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \left\|e^{inx}\right\| = \sqrt{2\pi}.$$

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$ ならば $(\cos mx, \cos nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ならば $(\sin mx, \sin nx) = 0$.
- $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ ならば $(\cos mx, \sin nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ ならば $\left(e^{imx}, e^{inx}\right) = 0$.

ノルムについても調べておこう。

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\cos 0x\| = \|1\| = \sqrt{2\pi},$$
$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \left\|e^{inx}\right\| = \sqrt{2\pi}.$$

例えば

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|^2 dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx} = \sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$ ならば $(\cos mx, \cos nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ならば $(\sin mx, \sin nx) = 0$.
- $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ ならば $(\cos mx, \sin nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ ならば $\left(e^{imx}, e^{inx}\right) = 0$.

ノルムについても調べておこう。

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\cos 0x\| = \|1\| = \sqrt{2\pi},$$
$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \left\|e^{inx}\right\| = \sqrt{2\pi}.$$

例えば

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|^2 dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx} = \sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

「数学とメディア」を履修していない場合、履修したけれど自信がない人は、このスライドに書いてあることを自分で計算して確認することを勧める。

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.2 (L^2 内積が内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot,\cdot)$ は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

1. $(\forall f \in X)\ (f, f) \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0$.
2. $(\forall f, g \in X)\ (g, f) = \overline{(f, g)}$.
3. $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.2 (L^2 内積が内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot,\cdot)$ は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

(i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \ge 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f, g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}$.

(iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)
細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「“ほとんどいたるところ” 0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.2 (L^2 内積が内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot,\cdot)$ は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

(i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \ge 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f, g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}$.

(iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)

細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「"ほとんどいたるところ" 0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

この定理から次式が導かれる。

$$(5)\qquad (f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1}(f, g_1) + \overline{c_2}(f, g_2),$$

$$(6)\qquad \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + (f,g) + (g,f) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2.$$

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.2 (L^2 内積が内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot,\cdot)$ は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

1. $(\forall f \in X)\ (f,f) \ge 0.$ 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0.$
2. $(\forall f, g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}.$
3. $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g).$

(証明は難しくないので任せる。)

細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「“ほとんどいたるところ” 0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

この定理から次式が導かれる。

$$(f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1}(f, g_1) + \overline{c_2}(f, g_2), \tag{5}$$

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + (f,g) + (g,f) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2. \tag{6}$$

(注: $(g,f) = \overline{(f,g)}$, $c + \overline{c} = 2\,\mathrm{Re}\,c$ により $(f,g) + (g,f) = 2\,\mathrm{Re}(f,g)$)

定義 3.3 (内積空間)

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X と、$X \times X$ で定義された関数 $(\cdot, \cdot)$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(\cdot, \cdot)$ を X の**内積**、X を $\mathbb{K}$ 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

1. $(\forall f \in X)\ (f, f) \geq 0.$ 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0.$
2. $(\forall f, g \in X)\ (g, f) = \overline{(f, g)}.$
3. $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g).$

定義 3.3 (内積空間)

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X と、$X \times X$ で定義された関数 $(\cdot,\cdot)$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(\cdot,\cdot)$ を X の**内積**、X を $\mathbb{K}$ 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

(i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f,g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}$.

(iii) $(\forall f_1,f_2,g \in X)\ (\forall c_1,c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1,g) + c_2 (f_2,g)$.

$X_{2\pi}$ は、((3) で定めた $(\,,\,)$ と合わせて) 内積空間である。

定義 3.3 (内積空間)

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X と、$X \times X$ で定義された関数 $(\cdot,\cdot)$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(\cdot,\cdot)$ を X の**内積**、X を $\mathbb{K}$ 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

(i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f, g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}$.

(iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

$X_{2\pi}$ は、((3) で定めた $(,)$ と合わせて) 内積空間である。

$X_{2\pi}$ 以外の内積空間の例を (もちろん) ずっと前から知っている。

- $\mathbb{R}^N$ は、$(\vec{x},\vec{y}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j y_j$ を内積とする $\mathbb{R}$ 上の内積空間である。
- $\mathbb{C}^N$ は、$(\vec{x},\vec{y}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j \overline{y_j}$ を内積とする $\mathbb{C}$ 上の内積空間である。

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.4 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f,g)=0 \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2 .$$

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.4 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f,g)=0 \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2.$$

さらに f_1, f_2, $\cdots$, $f_n \in X$ が互いに直交している ($j \neq k \Rightarrow (f_j, f_k)=0$) ならば

$$\|f_1+f_2+\cdots+f_n\|^2=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2+\cdots+\|f_n\|^2.$$

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.4 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f,g)=0 \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2 .$$

さらに f_1, f_2, $\cdots$, $f_n \in X$ が互いに直交している ($j \neq k \Rightarrow (f_j, f_k)=0$) ならば

$$\|f_1+f_2+\cdots+f_n\|^2=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2+\cdots+\|f_n\|^2 .$$

証明.

$$\|f+g\|^2=(f+g,f+g)=(f,f)+2\,\mathrm{Re}(f,g)+(g,g)=(f,f)+(g,g)=\|f\|^2+\|g\|^2 .$$

□

命題 3.5 (Schwarz の不等式)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して

$$|(f, g)| \le \|f\| \, \|g\| \,.$$

証明.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときに示す。$f = 0$ のときは両辺とも 0 であるから成立。以下 $f \neq 0$ とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 \le \|tf + g\|^2 = \|f\|^2 t^2 + 2t(f, g) + \|g\|^2 \,.$$

これから

$$0 \ge \frac{\text{判別式}}{4} = |(f, g)|^2 - \|f\|^2 \, \|g\|^2 \,.$$

(ていねいに考えると、等号の成立条件も分かるけれど、それは省略する。) □

命題 3.5 (Schwarz の不等式)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して

$$|(f,g)| \le \|f\| \, \|g\| \, .$$

証明.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときに示す。$f = 0$ のときは両辺とも 0 であるから成立。以下 $f \neq 0$ とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 \le \|tf + g\|^2 = \|f\|^2 t^2 + 2t(f,g) + \|g\|^2 \, .$$

これから

$$0 \ge \frac{\text{判別式}}{4} = |(f,g)|^2 - \|f\|^2 \, \|g\|^2 \, .$$

(ていねいに考えると、等号の成立条件も分かるけれど、それは省略する。) □

(最初は無視して良い) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は、$(f,g) = re^{i\theta}$ $(r \ge 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ として、$\lambda := te^{-i\theta}$ $(t \in \mathbb{R})$ を用いて

$$0 \le \|\lambda f + g\|^2 = \|f\|^2 t^2 + 2t\,|(f,g)| + \|g\|^2$$

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$
2. $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう:

$$(\forall m, n) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(\,,\,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$
2. $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう:

$$(\forall m, n) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

(実は「直交系」という言葉はきちんと定義されないことが多く、$(\varphi_n, \varphi_n) \neq 0$ という条件を要求するのは珍しいと思われるが、そうすると、次の命題 3.7 や定理 3.10 が成り立つ。これらは便利なので、この講義ではこの定義を採用する。)

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$
2. $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう:

$$(\forall m, n) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

(実は「直交系」という言葉はきちんと定義されないことが多く、$(\varphi_n, \varphi_n) \neq 0$ という条件を要求するのは珍しいと思われるが、そうすると、次の命題 3.7 や定理 3.10 が成り立つ。これらは便利なので、この講義ではこの定義を採用する。)

もちろん、正規直交系は直交系である。

次は常識的なことで断りなく使われることも多い (簡単なので慣れて欲しい)。

命題 3.7

直交系 $\{\psi_n\}$ があるとき、$\varphi_n := \dfrac{1}{\|\psi_n\|}\psi_n$ とおくと、$\{\varphi_n\}$ は正規直交系である。

次は常識的なことで断りなく使われることも多い (簡単なので慣れて欲しい)。

命題 3.7

直交系 $\{\psi_n\}$ があるとき、$\varphi_n := \dfrac{1}{\|\psi_n\|}\psi_n$ とおくと、$\{\varphi_n\}$ は正規直交系である。

証明.

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \left(\frac{1}{\|\psi_m\|}\psi_m, \frac{1}{\|\psi_n\|}\psi_n\right) = \frac{1}{\|\psi_m\|\,\|\psi_n\|}(\psi_m, \psi_n).$$

$m \neq n$ ならば $(\psi_m, \psi_n) = 0$ であるから $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$.
$m = n$ ならば

$$(\varphi_m, \varphi_n) = (\varphi_n, \varphi_n) = \frac{1}{\|\psi_n\|^2}(\psi_n, \psi_n) = \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\|\psi_n\|^2 = 1.$$

□

Fourier 級数で用いる関数系の個々の関数の L^2 ノルムは求めてあるので (p. 10)、それで割り算すれば正規直交系が得られる。

例 3.8

$\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。

Fourier 級数で用いる関数系の個々の関数の L^2 ノルムは求めてあるので (p. 10)、それで割り算すれば正規直交系が得られる。

例 3.8

$\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。

例 3.9

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin nx, \cdots\right\}$$

は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (1)

定理 3.10 (直交系による展開の係数)

X は内積空間で、$(,)$ はその内積とする。

1. $\{\varphi_n\}$ は X の直交系で、$f \in X$ が

$$f = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \tag{7}$$

と表されるならば

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \quad (n = 1, 2, \cdots, N). \tag{8}$$

2. $\{\varphi_n\}$ は X の正規直交系で、$f \in X$ が

$$f = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$$

と表されるならば

$$c_n = (f, \varphi_n) \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n)$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \leq n \leq N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right)$$

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{N} c_m \left(\varphi_m, \varphi_n \right)$$

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{N} c_m (\varphi_m, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

($m \ne n$ のとき $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ に注意。)

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{N} c_m \left(\varphi_m, \varphi_n \right) = c_n \left(\varphi_n, \varphi_n \right).$$

($m \ne n$ のとき $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ に注意。)

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

□

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。内積から定まるノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を用いて

$$(9) \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{N \to \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\| = 0$$

で級数の和を定義すると

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

実は無限和でも成り立つ。内積から定まるノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を用いて

(9)
$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{N \to \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\| = 0$$

で級数の和を定義すると

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

証明.

任意の n に対して、$N \geq n$ を満たす N に対して、

$$(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \left(f - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right).$$

Schwarz の不等式を用いて

$$|(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n)| = \left| \left(f - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) \right| \leq \left\| f - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m \right\| \|\varphi_n\|.$$

$N \to \infty$ とすると右辺は 0 に収束する。ゆえに左辺は 0. ゆえに $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$. □

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

$\{1\} \cup \{\cos nx \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ は直交系である。

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}\cdot 1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

$\{1\}\cup\{\cos nx \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{\sin nx \mid n\in\mathbb{N}\}$ は直交系である。$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$(\star)\qquad a_n=\frac{(f,\cos nx)}{(\cos nx,\cos nx)}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{\cos nx}\,dx}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\;dx,$$

$$b_n=\frac{(f,\sin nx)}{(\sin nx,\sin nx)}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{\sin nx}\,dx}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\;dx.$$

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}\cdot 1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

$\{1\}\cup\{\cos nx\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{\sin nx\mid n\in\mathbb{N}\}$ は直交系である。$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$(\star)\qquad a_n=\frac{(f,\cos nx)}{(\cos nx,\cos nx)}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{\cos nx}dx}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\;dx,$$

$$b_n=\frac{(f,\sin nx)}{(\sin nx,\sin nx)}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{\sin nx}dx}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\;dx.$$

また $a_0/2$ は $1=\cos(0\cdot x)$ の係数であるから

$$\frac{a_0}{2}=\frac{(f,1)}{(1,1)}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{1}\;dx}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\;dx\quad\therefore\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\;dx.$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (5) 例 (続き)

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る (続き))

一方

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

に対しては

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る (続き))

一方

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

に対しては

$$c_n = \frac{(f, e^{inx})}{(e^{inx}, e^{inx})} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{inx}}dx}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{inx}}dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx}{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx.$$

例 3.12 (一般の周期関数の Fourier 級数)

周期 T の関数 f の Fourier 級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

の場合の a_n, b_n も、周期 T の関数の空間 X_T における内積を

$$(f, g) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

で定義して

例 3.12 (一般の周期関数の Fourier 級数)

周期 T の関数 f の Fourier 級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

の場合の a_n, b_n も、周期 T の関数の空間 X_T における内積を

$$(f, g) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\overline{g(x)} dx$$

で定義して

$$a_n = \frac{(f, \cos \frac{2n\pi}{T} x)}{(\cos \frac{2n\pi}{T} x, \cos \frac{2n\pi}{T} x)}, \quad b_n = \frac{(f, \sin \frac{2n\pi}{T} x)}{(\sin \frac{2n\pi}{T} x, \sin \frac{2n\pi}{T} x)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)}$$

から求まる (やってみよう — おまけ 2 (p. 25) も見てみよう)。これだけでは展開可能なことの “証明” にはならないけれど、係数の式は自信を持って書き下せるだろう。

おまけ: 例 1 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に各点収束すること

ⓐ $x = 0$ のとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

ⓑ $0 < x \leq 2$ のとき、アルキメデスの公理より、ある自然数 N が存在して、$Nx > 2$. このとき $x > \frac{2}{N}$. ゆえに $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$x > \frac{2}{N} \geq \frac{2}{n}.$$

このとき $f_n(x) = 0$. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

以上より任意の $x \in [0, 2]$ に対して、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. すなわち $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は定数関数 0 に $[0, 2]$ で各点収束する。

おまけ 2: 23 ページ 一般の周期関数の Fourier 級数

第 1 回スライドの 13 ページに結果の式を書いておいた。再録しておくと

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

「信号処理とフーリエ変換 練習問題」の問 11 も参考になる。解答の解法 2 を見ると、$\cos \frac{2n\pi x}{T}$, $\sin \frac{2n\pi x}{T}$ で展開できることも理解できる。

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).

[2] 伊藤清三：ルベーグ積分入門, 裳華房 (1963), Lebesgue 積分のテキストとして定評がある.