信号処理とフーリエ変換 第2回

～Fourier 級数の収束～

かつらだ まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/

2021年9月29日

目次

本日の内容・連絡事項

- 今回は、講義ノート [1] の §1.2 の部分 (フーリエ級数の収束) の内容を講義します。
  収束というと、ガチガチの数学 (特に解析学) の話題のように感じられるかもしれませんが、実例を見ると自然な問題であることが分かると思います (というか分かってほしい)。
- アンケートの回答ありがとう。まだ〆切でないですが、回答率 70%でまあまあです。オフィスアワーの曜日・時限は決まりしだいお知らせします。
- 実例が大事だけれど、Fourier 解析がらみの計算は手強いので、コンピューターを利用するのが良いと考えています。この科目では Mathematica を利用することにしています (数式処理, 数値計算, グラフィックスが程よく使える)。必要なことはこちらが動画で見せますが、ぜひ自分の Mac でも確かめるようにして下さい。Mathematica が動かなくなっている人は、私 (katurada あっと meiji ドット ac どっと jp) または池田先生に相談しましょう。

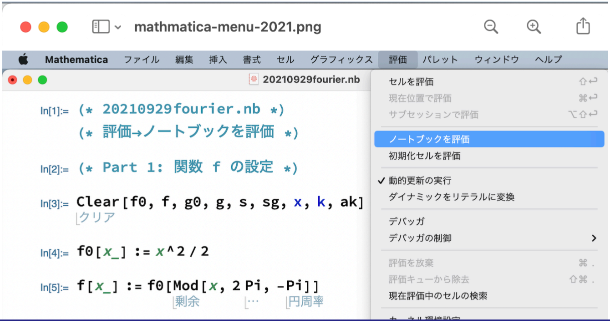
1.2 Fourie 級数の収束 1.2.1 実例を見よう

授業 WWW サイト (http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/) から 20210929fourier.nb を入手して開く。ブラウザーで Ctrl+クリックして保存してからクリックして開くか、ターミナルで以下のコマンドを実行する。

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/20210929fourier.nb
open 20210929fourier.nb
```

(古い Mathematica で実行しようとすると、警告が表示されるが、多分大丈夫。)

一気に実行するには、Mathematica のメニュー [評価] から [ノートブックを評価] を選ぶ。



Mathematica メモ

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。macOS によっては、Mathematica を更新しないと動かないかも。新しいアクティベーション・キーが必要な場合、桂田か池田先生に相談すること。)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。そこからならほぼ確実に起動できる。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- 忘れないように: コマンドの最後に $\boxed{\text{shift}}+\boxed{\text{return}}$ とタイプする。
- 直前の結果は `%` で参照できる。直前のコマンドは $\boxed{\text{command}}$+L で呼び出せる。
- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。
- `??`関数名 としてマニュアルが開ける (非常に便利。これに慣れること。)。
- 関数名の大文字・小文字に注意する。ほぼ例外なく、先頭は大文字である。
- ノートブックとして保存しておける (ファイル名末尾は `.nb`)。
- 既存のノートブックはダブルクリックで開ける。
  コマンドを 1 つ 1 つ $\boxed{\text{shift}}+\boxed{\text{return}}$ で実行する以外に、[評価] → [ノートブックを評価] で順番に全部実行することもできる。

1.2.1 実例を見よう　例: $f(x) = x^2$ $(-\pi \le x < \pi)$

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π で

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \le x < \pi)$$

とする。グラフを描くことを強く勧める (連続かどうか等分かることがある)。

```
f0[x_]:=x^2
g1 = Plot[f0[x], {x, -10, 10}]

f[x_] := f0[Mod[x, 2 Pi, -Pi]]
g2=Plot[f[x],{x,-10,10}]
```

← Mod[] を使って周期 2π の関数を作る工夫

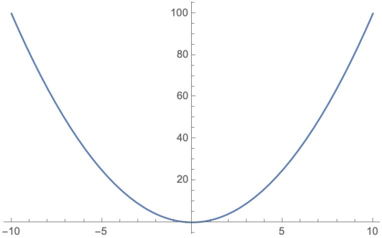


図 1: $f_0(x) := x^2$ のグラフ $([-10, 10])$

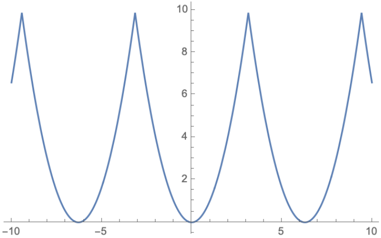


図 2: f のグラフ $([-10, 10])$

Mathematica の Mod[ ] について

細かいことのようだが、周期関数としてグラフを描く工夫について説明する。

Mod[a,b], Mod[a,b,c]

$a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ が与えられたとき、

$$a = bn + r \quad (n \in \mathbb{Z},\ 0 \le r < b)$$

を満たす n, r が一意的に定まる (a を b で割った商が n, 余りが r ⋯ よく知られている)。Mod[a, b] は、この r を返す関数である。

同様に $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $c \in \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$a = bn + r \quad (n \in \mathbb{Z},\ c \le r < c + b)$$

を満たす n, r が一意的に定まる。この r を返すのが、Mod[a, b, c] である。

r=Mod[a,2Pi,-Pi] とすると、r は $\mathrm{r} \in [-\pi, -\pi + 2\pi] = [-\pi, \pi)$, $\mathrm{a} - \mathrm{r}$ は 2π の整数倍、という条件を満たすことを理解しよう。

1.2.1 実例を見よう　例: $f(x) = x^2 \ (-\pi \le x < \pi)$

f の Fourier 級数をていねいに計算しよう。これは各自がやること (ここに書くのは確認用)。

偶関数であるから $b_n = 0$.

$n \ne 0$ のときは

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \cdots (\text{部分積分で計算}) \cdots = \frac{4\cos n\pi}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

(計算は結構面倒。18 ページに書いておいた。)
$n = 0$ のときは

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

ゆえに

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right).$$

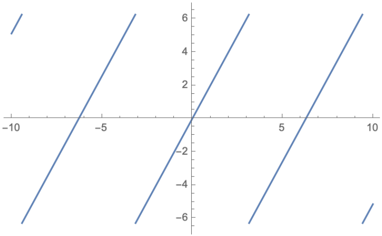
(**先取りして**　f は周期 2π かつ連続かつ区分的に C^1 級であるから、後で紹介する定理によって、Fourier 級数は一様収束し、和は $f(x)$ に等しい。)

1.2.1 実例を見よう　例 2: $g(x) = 2x\ (-\pi \le x < \pi)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π で

$$g(x) = 2x \quad (-\pi \le x < \pi).$$

とする。g のグラフは次のようになる。$x = (2m-1)\pi\ (m \in \mathbb{Z})$ で g は不連続である。



g の Fourier 級数を計算しよう。g は奇関数であるから $a_n = 0$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx = \frac{4}{\pi}\left\{\left[x\cdot\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n} + \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{4(-1)^{n-1}}{n}. \quad \text{(試験でミスがとても多い。)}
\end{aligned}$$

1.2.1 実例を見よう　例 2: $g(x) = 2x\ (-\pi \le x < \pi)$

ゆえに

(1) $$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 4\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right).$$

ここで $\sim$ は、右辺が左辺の Fourier 級数であることを表す記号である。収束と等号成立が微妙なので、 $=$ と書かずに (実際成り立たない点がある)、とりあえず $\sim$ としておいた。

g は周期 2π かつ**区分的に C^1 級であるが、連続ではない**。後で紹介する定理によって、(1) の右辺 (g の Fourier 級数) は各点収束し、

- x が g の連続点であれば和は $g(x)$ に等しい
- x が g の不連続であれば和は $\dfrac{g(x+0)+g(x-0)}{2}$ に等しい

(この例では、$x = (2m-1)\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ で $\dfrac{g(x+0)+g(x-0)}{2} = \dfrac{-2\pi+2\pi}{2} = 0 \ne g(x)$)

ゆえに、$x = (2m-1)\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ で等式不成立、そうでない点で等式が成立する。

もしも g の $x = (2m-1)\pi$ での値を 0 に修正すると (積分で定義される Fourier 係数と Fourier 級数は変わらないので)、すべての点 x で Fourier 級数の和が $g(x)$ に等しくなる。(分かりにくいかもしれないが理解にチャレンジしよう。)

不連続点の近傍では、**Gibbs の現象**が見られるが、これについては後述する。 □

問題点を整理　収束するか、和は元の関数に等しいか

Fourier 級数は、その名の通り級数であるから、部分和

$$
\begin{aligned}
s_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}
\end{aligned}
$$

が $n \to \infty$ のときに収束するかどうかがまず問題になる。

特に Fourier 級数の場合、和がもとの関数に等しいことが期待される。

成り立つかどうか？

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) \stackrel{?}{=} f(x)$$

1.2.2 関数列の 3 つの収束　関数と関数の違いを測る

数列と違って、関数列には複数の収束概念がある。

$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に収束するとは、s_n と f の違い (「距離」と言いたくなるが、それは数学語なので、まだここでは使わない) が 0 に近づくということだが、違いの測り方は色々ありうる。

$y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフを描いて、どのように違いを測るか、図で説明してみる。

1.2.2 関数列の 3 つの収束

関数列の収束を 3 つ紹介する。(関数の定義域は $[-\pi,\pi]$ とする。$\mathbb{R}$ とすべきかもしれないが、周期 2π の周期関数なので、同じことである。)

1. **各点収束 (単純収束)**

   $$(\forall x \in [-\pi,\pi]) \quad \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x). \tag{2}$$

   $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $[-\pi,\pi]$ で f に各点収束する、という。

   任意の $x \in [-\pi,\pi]$ を定めると、$\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は数列である。それが複素数 $f(x)$ に収束する、ということ。

   分かりやすいけれど、実はあまり役に立たない。

1.2.2 関数列の 3 つの収束

(ii) **一様収束**

(3) $$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|s_n(x)-f(x)|=0.$$

「$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $[-\pi,\pi]$ で f に一様収束する。」という。

　ある意味で自然。実はこれから色々なことが導かれる。その意味ではとても良い収束である。
(関数論では大活躍する。)

(余談) 連続な関数の場合は、次に説明する L^∞ ノルムによる収束と一致する。
$(-\pi,\pi)$ において "本質的に有界な" 関数全体からなる関数空間 $L^\infty(-\pi,\pi)$ におけるノルム

$$\|g\|_{L^\infty}:=\operatorname*{ess.sup}_{x\in(-\pi,\pi)}|g(x)|$$

を用いて

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n-f\|_{L^\infty}=0 \quad (L^\infty(-\pi,\pi)\text{ における } s_n \text{ と } f \text{ の距離が } 0 \text{ に収束})$$

となるとき、$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^\infty(-\pi,\pi)$ で f に収束する、という。

- (iii) **L^p 収束** (p 次平均収束) ただし $1 \le p < \infty$.

(4) $$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $[-\pi,\pi]$ で f に L^p 収束する、という。

特に $p=1$ の場合は、積分はグラフの囲む図形の面積を表す。
$p=2$ の場合は、とてもよく使われる (後で詳しく説明し直す)。

$L^p(-\pi,\pi)$ におけるノルム

$$\|g\|_{L^p} := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

を用いると、(4) は次のように表せる。

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_{L^p} = 0 \quad (L^p(-\pi,\pi) \text{ における } s_n \text{ と } f \text{ の距離が 0 に収束}).$$

本来は、紹介した 3 つの収束について、実例を見せたり、それらの間の関係を説明すべきだが、それは後回しにして、Fourier 級数に関する定理を紹介する。

1.2.3 Fourier 級数の収束に関するお勧めの 3 つの定理

例 1 については次の定理がぴったりである。

定理 2.1 (連続かつ区分的に滑らかならば一様収束)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π, 連続かつ区分的に C^1 級ならば、f の Fourier 級数は f に一様収束する (ゆえに各点収束かつ任意の p に対して L^p 収束)。

しかし、この定理は、例 2 には使えない。代わりに次の定理が使える。

定理 2.2 (区分的に滑らかならば各点収束)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π かつ区分的に C^1 級ならば、Fourier 級数は各点収束する。実際、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} f(x) & (f \text{ が } x \text{ で連続のとき}) \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & (f \text{ が } x \text{ で連続でないとき}). \end{cases}$$

ここで

$$f(x+0) = \lim_{y\to x+0} f(y) \quad (\text{右側極限}), \qquad f(x-0) = \lim_{y\to x-0} f(y) \quad (\text{左側極限}).$$

1.2.3 Fourier 級数の収束に関するお勧めの 3 つの定理

次の定理も紹介しておく (後で重要になる)。これも例 2 の関数に適用できる。

定理 2.3 (区分的に滑らかならば L^2 収束)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π かつ区分的に C^1 級ならば、f の Fourier 級数は f に L^2 収束する。すなわち

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|s_n(x) - f(x)\right|^2 dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

実は「区分的に C^1 級」という条件は、f が $(-\pi, \pi)$ で 2 乗可積分 (そのことを $f \in L^2(-\pi, \pi)$ と書く)、すなわち Lebesgue 可測で $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$ を満たす、というより弱い条件で置き換えることが出来る。次のように定理が 1 行で書ける。

$$f \in L^2(-\pi, \pi) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_{L^2} = 0.$$

1.2.4 Gibbs の現象

f が区分的に C^1 級ではあるが、連続ではない場合、f の不連続点の近くでは、部分和 s_n のグラフは「ジグザグして暴れる」。よく見ると次のことが分かる。

- 暴れる範囲の横幅は、$n \to \infty$ のときに小さくなる　(各点収束は否定しない)。
- 暴れる範囲の縦幅 (しばしば overshoot と呼ばれる) は、$n \to \infty$ としても小さくならない (だから一様収束はしない！)。

この現象を発見者にちなんで **Gibbs の現象**と呼ぶ (Gibbs [2], [3])。

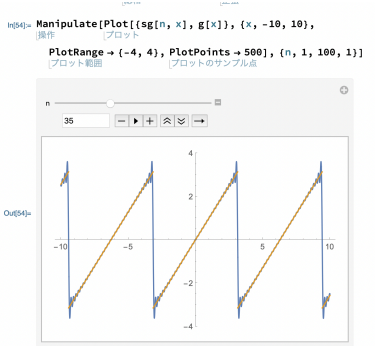


図 3: 青線はオレンジの線から上下に突き出て、その長さは n を大きくしても変わらない

(補足) f の Fourier 級数の計算

$n \neq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\cdot\frac{\sin nx}{n}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right) = \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{\cos nx}{n}\right)' dx \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\left[x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\cos nx}{n}\,dx\right) = \frac{4}{n\pi}\left(\pi\frac{\cos n\pi}{n} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}
$$

f の Fourier 級数は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx \\
&= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

参考文献

今回の内容は、講義ノート [1] の §1.2 そのままです。Gibbs の報告は有名な Nature なんですね。

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).

[2] Gibbs, J. W.: Fourier Series, *Nature*, Vol. 59, 200, (1898), The collected works of J. Willard Gibbs. Vol. II (http://catalog.hathitrust.org/Record/001477419) に収録.

[3] Gibbs, J. W.: Fourier Series, *Nature*, Vol. 59, 606, (1899), The collected works of J. Willard Gibbs. Vol. II (http://catalog.hathitrust.org/Record/001477419) に収録.