

# 信号処理とフーリエ変換 第1回

～ガイダンス, Fourier 級数概観～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2021年9月22日

# 目次

- 1 自己紹介
- 2 この科目の内容・連絡事項
- 3 第1回アンケート
- 4 Fourier 解析の大まかな歴史
  - Fourier
  - Shannon, FFT
- 5 Fourier 級数
  - 概観 (≡ 「数学とメディア」の復習)
    - 実 Fourier 級数
    - 複素 Fourier 級数
    - 実 Fourier 級数 vs. 複素 Fourier 級数
    - バリエーション (1) 積分の範囲, 一般の周期
    - バリエーション (2) 正弦展開, 余弦展開
    - バリエーション (3) 周期関数でなくても使える
- 6 自習の手引き
  - 授業 WWW サイトの利用
  - 参考書
- 7 参考文献

# 自己紹介

- かつらだ まさし 桂田 祐史
- 研究室 910 号室
- メールアドレス katurada あっと meiji ドット ac どっと jp  
質問はメール、または Zoom オフィスアワー (日時はアンケートの結果を参考に決める) を利用して下さい。
- 授業 WWW サイト  
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/>  
(講義ノート, 練習問題, レポートの課題文, 期末試験過去問題などをおく。)

# この科目の内容・連絡事項

広い意味の Fourier 変換 (Fourier 級数も含む) による解析 (Fourier 解析) を説明する。

Fourier 解析は、大学のほとんどの理工系の学科で講義されているが、具体的な内容については、かなりの違いがある。この科目で何をするかは、シラバス、講義ノート、過去問を見ると良い (「複素関数」と比べると、割と真面目にシラバスを書いています。)

「数学とメディア」(Fourier 解析入門) を履修していることを前提にして講義を進める。何か特別な事情でこちらだけを履修する場合は、特に Fourier 級数の部分を自習 (問題演習) すること。

数学科では、Fourier 解析の講義科目は、もっと上の学年に配置されて、例としても微分方程式への応用が多い。この講義では例として信号処理を多く取り上げる。

演習は各自でやって下さい。練習問題を用意してある (略解つき)。過去問と講義ノートを見て対策しよう。

収束の議論はほどほどにとどめる (現時点でちゃんとやるのは無理だから。後で。)

学期中に 3 回のレポートを課し (30%)、最後に期末レポート (70%) をする予定である。

(Fourier 級数は別にして) 計算は人手では大変なので、なるべくコンピューターに任せよう、コンピューターを使えるようになるろう、という方針でやっている。個々の概念の定義と、どういう定理が成り立つかを理解するのが大事である。その次は自分でプログラムを書けるように、かな。

# 第1回アンケート

「数学とメディア」を受講したかどうか、Zoomによるオフィスアワー(質問のための時間)はいつがよいか、アンケートに回答して下さい(Oh-o! Meiji を使う, 締め切り 9/29 15:20)。

(オフィスアワーの時間は、希望者の多い時間に設定するので、個別の希望に添えないかもしれませんが、それは了承して下さい。)

# Fourier 解析の大まかな歴史 (1) Fourier (1768–1830, フランス)

「熱の解析的理論」(1809, 1812, 1822 [1]) を著した。

熱伝導現象の数理モデル (**熱方程式**) を提示した。

$$(1) \quad c \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u$$

$$u = u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t), \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Fourier 級数、Fourier 変換、Fourier の変数分離法を導入して、熱伝導問題を解いた。

多くの微分方程式 (例えば波動方程式) がこの方法で解ける。

解析学の大革命 (解析が息を吹き返す)。今では解析学の背骨。

17C 後半~18C	19C	20C
微積分 (Newton, Leibniz 他, Euler)	Fourier 解析 複素関数論	関数解析 コンピュータ

表 1: 解析学の発展 (独断と偏見による)

注: 微分方程式はずっと問題とされている

# Fourier 解析の大まかな歴史 (2) Shannon, FFT

## Claude Elwood Shannon (1916–2001)

- 「通信の数学的理論」(1948) [2] (翻訳 [3] がある) を著した。
- 情報のエントロピー, bit, サンプリング定理

## FFT (Fast Fourier Transform, 高速 Fourier 変換)

- 離散 Fourier 変換の非常に高速なアルゴリズム
- Cooley-Tukey (1965) [4]

⇒ 信号処理に応用されるようになった

# 1 Fourier 級数 1.1 概観 (主に復習)

## 1.1.1 実 Fourier 級数

### 定理 1.1 (本当は定理もどき)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$  の周期関数で、ある程度の滑らかさを持つとする。このとき

$$(2) \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(3) \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  を定めると、級数

$$(4) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

はある意味で収束し、 $f(x)$  に等しい。すなわち

$$(5) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R}).$$



## 1.1.1 実 Fourier 級数

「ある程度の滑らかさ」、「ある意味で」は曖昧なので (この後に少し説明する)、そこをはっきり書かないと厳密には定理じゃない。

- $a_n, b_n$  を  $f$  の **Fourier 係数**
- 級数 (4) を  $f$  の **Fourier 級数**
- 等式 (5) を  $f$  の **Fourier 級数展開**

という。

### 注意 1.2

- 級数 (4) の収束も、等式 (5) の成立も無条件では成り立たない。
- **関数列であるため**、数列とは異なり、**複数の種類の収束が定義される** (有限次元空間での極限を扱う「数学解析」の守備範囲外!)。後で (次回講義?)、代表的な収束を紹介する。おおざっぱに言って、 $f$  の「滑らかさ (何回微分可能であるかとか)」が強いと良い収束をする。

## 1.1.2 複素 Fourier 級数

三角関数でなく、複素指数関数を使ったバージョンもある (見かけが違うだけ)。

### 定理 1.3 (本当は定理もどき)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$  の周期関数で、ある程度の滑らかさを持つとする。このとき

$$(6) \quad c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を定めると、級数

$$(7) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

はある意味で収束し、 $f(x)$  に等しい。すなわち

$$(8) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

念のため:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , 数学的にはまったく同等

## 1.1.3 実 Fourier 級数 vs. 複素 Fourier 級数

問  $a_n, b_n, c_n$  を上の式で定めたとき、次が成り立つことを確かめよ (それぞれの展開の係数の一意性はとりあえず認めて)。

①  $n \in \mathbb{N}$  ならば

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad c_0 = \frac{1}{2}a_0.$$

また

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad a_0 = 2c_0,$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

②  $f$  が実数値であれば

$$a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad \text{かつ} \quad c_{-n} = \overline{c_n} \quad \text{かつ} \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, \quad b_n = -2 \operatorname{Im} c_n.$$

(1) の前半部分は、「練習問題」[5] 問 10 で、解答を載せてある。

## 1.1.3 実 Fourier 級数 vs. 複素 Fourier 級数

大事なことを言うておく。

### 複素指数関数バージョンに慣れること

なぜか？

- ① 式を簡潔に書くことは意外に大事なこと。
- ② この科目に登場する他の Fourier 変換では (Fourier 級数も含めて、全部で 4 種類の Fourier 変換が登場する)、複素指数関数バージョンで説明する。
- ③ コンピューターを使う場合、どちらかというとな複素関数バージョンが主役のことが多い。

## 1.1.4 バリエーション (1) 積分の範囲, 一般の周期

(実際の応用で重要、分かれば簡単なこと、慣れるように心がける)

### 積分の範囲

$\int_{-\pi}^{\pi}$  は  $\int_0^{2\pi}$  でも同じ。(被積分関数は周期  $2\pi$  なので、 $(\forall c \in \mathbb{R}) \int_{c-\pi}^{c+\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}$  だから。)

### 一般の周期

周期が  $(2\pi$  でなくて) 一般の正の数  $T$  である場合も、同じような級数で展開できる。  
実際、 $\cos nx$ ,  $\sin nx$ ,  $e^{inx}$  の代わりに

$$\cos \frac{2n\pi x}{T}, \quad \sin \frac{2n\pi x}{T}, \quad \exp\left(i \frac{2n\pi x}{T}\right) \quad (T = 2\pi \text{ のとき}\cdots)$$

を使って

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi x}{T}},$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx,$$
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2n\pi x}{T}} dx.$$

係数を表す公式は、後で簡単な求め方を紹介する (丸暗記しないことを勧める!).

## 1.1.5 バリエーション (2) 正弦展開, 余弦展開

### 奇関数・偶関数

$$f \text{ が奇関数} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = -f(x).$$

$$f \text{ が偶関数} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = f(x).$$

### 命題 1.4 (Fourier 正弦展開, Fourier 余弦展開)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  周期  $2\pi$ , ある程度滑らかとする。

①  $f$  が奇関数ならば、 $a_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). さらに

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

②  $f$  が偶関数ならば、 $b_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). さらに

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots).$$

**要点** 奇  $\times$  奇 = 偶, 偶  $\times$  偶 = 偶, 偶  $\times$  奇 = 奇,  $\int_{-a}^a$  奇  $dx = 0$ ,  $\int_{-a}^a$  偶  $dx = 2 \int_0^a$  偶  $dx$ .

## 1.1.6 バリエーション (3) 周期関数でなくても使える

関数が周期関数であることは、絶対必要というわけではない。

$f: (-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$  とする。任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $y \in (-T/2, T/2]$ ,  $x \equiv y \pmod{T}$  を満たす  $y$  をとって、 $\tilde{f}(x) = f(y)$  で定義される  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $T$  の周期関数なので

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx$$

が成り立つ。 $(-T/2, T/2]$  で  $\tilde{f}$  は  $f$  に一致するので

$$(9a) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) \quad (x \in (-T/2, T/2]),$$

$$(9b) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

この話の偶関数、奇関数バージョンもある。また、 $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  のときは、 $\int_0^T$  とすれば良い。

## 授業 WWW サイト

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2021/>

に

- 講義ノート <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2021/fourier-lecture-notes.pdf>
- 「練習問題」 (略解つき) <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2021/fourier2021-ex.pdf>
- 期末試験過去問

が置いてある。適宜参考にすること。

例えば、今回の授業について、「練習問題」から

- 問 6 「以下の関数  $f$  を区間  $[-\pi, \pi]$  で Fourier 級数に展開せよ。(2)  $f(x) = x^2$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ )」は、次回の授業に関係あるので、それを解いてみるとか。
- 問 8 (周期  $T$  の関数の Fourier 級数展開)



残念ながら、1冊で、この科目全般の参考になるような本は多くないです(木村 [6] は近いけれど新刊は購入できない)。

前半部分の Fourier 級数、(普通の) Fourier 変換は、比較的オーソドックスな内容なので、書名に「フーリエ解析」を含む本の多くが参考になると思われます。シラバスに掲載した参考書(木村 [6], 大石 [7], 倉田 [8] などなど)は、図書館に所蔵されているはずなので、参考にして下さい。

# 参考文献

- [1] フーリエ著, 西村 重人翻訳, 高瀬 正仁翻訳, 監修, 解説: フーリエ 熱の解析的理論, 朝倉書店 (2019/10/15).
- [2] Shannon, C. E.: A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, No. 3, pp. 379–423 (1948).
- [3] クロード・E. シャノン: 通信の数学的理論, 筑摩書房 (2009), 1948 年の論文 [2] の翻訳. ワレン ウィーバー (解説), 植松 友彦 (翻訳, 解説).
- [4] Cooley, J. W. and Tukey, J. W.: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Mathematics of Computation*, Vol. 19, No. 90, pp. 297–301 (1965), <http://www.ams.org/journals/mcom/1965-19-090/S0025-5718-1965-0178586-1/S0025-5718-1965-0178586-1.pdf> で公開.
- [5] 桂田祐史: 信号処理とフーリエ変換練習問題, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2021/fourier2021-ex.pdf> (2014~).
- [6] <sup>ひでのり</sup>木村 英紀: Fourier-Laplace 解析, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1993).
- [7] 大石進一: フーリエ解析, 岩波書店 (1989).
- [8] 倉田和浩: フーリエ解析の基礎と応用, 数理工学社 (2020/7/10).