

Oh-o! Meiji のレポート・システムで提出すること。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) (a) $n \in \mathbb{N}$ とするとき、 a_n と b_n を c_n と c_{-n} を用いて表せ。 a_0 と c_0 の関係を求めよ。

(b) $n \in \mathbb{Z}$ とするとき、 c_n を a_m, b_m ($m = |n|$) を用いて表せ。

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と、偶関数 $f_e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 奇関数 $f_o: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすとする。

(a) $f(-x)$ を $f_e(x), f_o(x)$ を用いて表せ。

(b) f_e と f_o を f を用いて表せ。

(3) f が偶関数であれば $a_n = A_n$, 奇関数であれば $b_n = B_n$ であることを示せ。

(4) Mathematica には、 c_n を計算するための関数 `FourierCoefficient[]`, A_n を計算するための関数 `FourierCosCoefficient[]`, B_n を計算するための関数 `FourierSinCoefficient[]` が用意されているが、 a_n と b_n を計算する関数は用意されていないようである (少なくとも Version 12.1 までは)。Mathematica で a_n, b_n を求めるにはどうすれば良いか。なるべく便利な方法を考えてみよ (できれば実行例をつけること)。

注 (1) も (2) も割と良く知られている話で、載っている本もあると思います。見かけたら参考にして構いませんが、写すのではなく、あまり省略しないで書いてください。(1)(a) は \cos, \sin を複素指数関数で表すには、(1)(b) は複素指数関数を \cos, \sin で表すには、という話ですね。(2)(a) は奇関数、偶関数の定義を思い出せば簡単のはずです。(2)(b) は (a) の結果を見れば分かると思います。(3) は常識。

出題の意図 得点を取りやすくするために、やはり、学期中のレポートはシラバス通り 3 回出そう。本来はデジタル・フィルターの問題にしたいところですが、まだ授業で説明が進んでいないので、見慣れた Fourier 級数で、複雑な計算は必要ない問題にしました。上にも書いたように、Mathematica には、直接 a_n, b_n を計算するための関数はないようです。それでどうしようか考えて、二つの手段を思いついたのですが、それを問題のネタにしてみました。)

参考文献