信号処理とフーリエ変換 レポート課題 1 (2020/10/21)

締め切りは 11 月 11 日 15:20。Oh-o! Meiji で提出。フォーマットは A4 サイズの PDF。レポートの先頭に学年、組、番号、氏名を書くこと。ページ番号をつけること。手書きしたものをスキャンしても構わない。

PDF ファイルの準備の仕方については

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」[1]

を参考にせよ。

課題 1 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は周期 2π の周期関数で、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi), \quad f(\pi) = 0, \\ g(x) &= \cos\frac{x}{2} \quad (-\pi < x \le \pi) \end{aligned}$$

を満たすとする。

(1) f と g のグラフを描き、(三角関数版の)Fourier 級数を求め、その収束について説明せよ。

(2) コンピューターを用いて、f の Fourier 級数の N 項までの部分和 $s_{N,f}$ と f のグラフを描け。g の Fourier 級数の N 項までの部分和 $s_{N,g}$ と g のグラフを描け。グラフを描くためのプログラムやコマンドも記すこと。その結果を用いて Gibbs の現象について簡単に説明せよ。

(3) 次の (3a), (3b) のどちらか一方を解きなさい (以下の f, g は上に書いたものとは関係ない)。

(3a) 周期 T の区分的 C^1 級関数 f は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

と Fourier 級数展開できることは授業で説明した (第 3 回授業の例 3.12)。これについて Parseval の等式を求めよ (結果だけでなく導出の過程、式変形の根拠を書くこと)。

(3b) 周期 2π の周期関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g\colon \ \to \mathbb{C}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x = 0, \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases}, \quad g(x) = |x| \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

で定める。f の Fourier 級数は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1 + (-1)^{n-1})}{n\pi}\sin nx$$

である。このことを用いて g の Fourier 級数を求めよ。結果を書くだけでなく、それが正しい根拠も述べること。
(ヒント: 第 5 回の授業内容とかかわる問題である。)

当初は (3a), (3b) 両方解いてもらう予定でしたが、課題の量が多くなりすぎないように考えて片方で良いことにしました。

[1] `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf/`