2020年度 信号処理とフーリエ変換 期末レポート課題

桂田 祐史

2021年1月27日 12:30公開

問題は2ページ目以降にある。

- 締め切りは1月30日(土) 13:30、Oh-o! Meijiで提出すること。
(なるべく1月29日までに解答することを勧める。疑問点が生じたら、その日のうちにメール(`katurada`の後に、あっとまーく`meiji`どっと`ac`どっと`jp`)で質問すること。
  - 1/27 18:00までに届いたものは、1/28 0:00までに回答する。
  - 1/28 18:00までに届いたものは、1/29 0:00までに回答する。
  - 1/29 18:00までに届いたものは、1/30 0:00までに回答する。
  - 1/29 0:00までに届いたものは、1/30 8:00までに回答する。
- 提出締め切りまでは、問題の内容について、私(桂田祐史)以外の人に質問・相談しないこと。人に伝えないこと。
- ネットワーク、サーバーの障害に遭遇したら、連絡すること。締め切りの延長などの措置を取る可能性がある。
- 質問に対する回答のうち主なものは、授業WWWサイト `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/` で公開する。
- レポートはA4サイズのPDFで提出すること。最初のページの一番上に学年・組・番号(学生番号ではない1〜2桁の数)・氏名を記入すること。ページ番号をつけること。数式が正しく鮮明に表記される限り、PDFの作成方法は問わない(手書き、TEX, Word, …何でも良い)。なるべく単一のPDFで提出することが望ましいが、サイズが30MBを超えるものは複数のファイルに分割して"追加提出"すること。
- 大問の解答はひとまとめにすること。(例えば**1**の(1)と(2)を離れた場所に書いたりせず、**1**の(1),(2),(3)を1箇所にまとめる。)
- 講義資料、参考書、ネットの情報など、何を参考にしても構わない。
- 計算の途中経過・根拠も適当にレポートに書くこと(ポイントとなることが書いてあれば、最終結果が間違っていても中間点をつける場合がある)。それとは別に、計算結果の確認にコンピューターを使っても良い。
- 記号等は授業で説明したものであれば、断りなく用いて構わない。授業で説明していない記号を用いる場合は、その定義を記すこと(他資料を参考にしたときは注意すること)。
- 特に指示のない限り、授業で証明した定理は証明抜きに用いて良い(授業内容のコピー&ペーストをする必要はない)。授業中に説明していない定理を用いるときは、証明してから用いること。

どういう資料を見ても良いというルールの元では、「覚えていることを見せてもらう」タイプの問題が出せないが、その代わり講義を前提にした話がしやすい。「第x回の講義で説明した定理$x.y$によって」,「第x回講義スライドのyページの公式(z)によって」のようなことが出題する側も解答する側も書ける。

以下の **1**〜**5** に解答せよ。記号等は授業内容に準じる (Fourier 変換はテキストによって、定数因子等に違いがある。他資料を参考にしたときは注意すること。)。

1. f_1, f_2, f_3 は周期 2π の周期関数で、次の式を満たすとする。

$$f_1(x) = x^3 + x, \quad f_2(x) = 3x^2 + 1, \quad f_3(x) = 6x \quad (-\pi < x \le \pi).$$

(1) f_2 の Fourier 級数を求めよ。

(2) f_1, f_2, f_3 のうち、Fourier 級数が一様収束するものが 1 つだけある。それはどれか？また、そう判断する根拠を述べよ。

(3) 次の 2 つの主張 (a), (b) のうち、1 つだけが正しい (このことを認めて以下を解答せよ)。どちらが正しいか、f_1 と f_3 の Fourier 級数を求めずに答え、それが正しい根拠を述べよ。

(a) f_1 の Fourier 級数を項別微分すると、f_2 の Fourier 級数となる。

(b) f_2 の Fourier 級数を項別微分すると、f_3 の Fourier 級数となる。

2. $c > 0$ に対して $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c} & (0 < x < 2c) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ で定める。

(1) Fourier 変換 $\widehat{f}$ の定義に基づき $\widehat{f}$ を求めよ。

(2) 平行移動した関数 $f(x-a)$ の Fourier 変換の公式 (第 7 回講義参照) と、定理 6.2 (第 6 回講義「マスターすべき Fourier 変換」) を用いて、$\widehat{f}$ を求めよ。

(3) 定理 6.2 から次の等式を導け。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

(注: 有名であるが、証明はあまり簡単ではない。定理 6.2 を認めれば簡単に済む。)

3. 数列 $f = \{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と $a \in \mathbb{Z}$ に対して、数列 $S_a f = \{S_a f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を

$$S_a f(n) = f(n-a) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める (連続変数の場合「グラフの平行移動」に相当するが、シフトと呼ばれることも多い)。

(1) f が $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$ を満たす場合に、関数 $\mathscr{F} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$\mathscr{F} f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

で定めるとき (離散時間 Fourier 変換)、

$$(\heartsuit) \qquad \mathscr{F}[S_a f](\omega) = \boxed{\text{あ}}\, \mathscr{F} f(\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。$\boxed{\text{あ}}$ を埋めて、$(\heartsuit)$ を証明せよ。

(2) $N \in \mathbb{N}$ に対して、f が周期 N の周期数列である場合に、数列 $\mathscr{F}f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を

$$\mathscr{F}f(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)\omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \omega := e^{2\pi i/N}$$

で定めるとき (離散 Fourier 変換)、

$$(\diamondsuit) \qquad \mathscr{F}[S_a f](n) = \boxed{\quad い \quad}\mathscr{F}f(n)$$

が成り立つ。$\boxed{\quad い \quad}$ を埋めて、($\diamondsuit$) を証明せよ。

(補足説明) 普通の Fourier 変換について、平行移動 $f(x-a)$ の Fourier 変換の公式を紹介したが (第 7 回講義)、離散時間 Fourier 変換と離散 Fourier 変換については紹介しなかったので、それを尋ねてみる、という主旨である。
(注) $\mathscr{F}$ が書きにくければ、$\mathcal{F}$ と書いても良い。

4. 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が、次の関係を満たすとする。

$$-f''(x) + f(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(1) f, g の Fourier 変換 $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ の間に次の関係が成り立つことを示せ。

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\xi^2+1}\widehat{g}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

(2) f を g を用いて表せ。

(参考: 第 12 回講義「(Fourier 変換の) 微分との関係とその応用」)

5.

(1) 以下の空欄$\boxed{\quad ア \quad}$〜$\boxed{\quad エ \quad}$を埋め、根拠を簡単に説明せよ。

ほぼ周期的と考えられる音を 3 秒間サンプリングして (簡単のためモノラル録音とする)、132300 個のサンプルを得た。サンプリング周波数は$\boxed{\quad ア \quad}$である。$\boxed{\quad イ \quad}$までの周波数の信号を復元できる事になる。このデータ (全体) を離散 Fourier 変換して得られた離散フーリエ係数を $C_0, C_1, \cdots, C_{N-1}$ とする。$1 \le n < N/2$ を満たす n に対して、C_n と C_{N-n} は周波数$\boxed{\quad ウ \quad}$の信号成分を表している。各サンプルが実数であることから、C_n と C_{N-n} の間には$\boxed{\quad エ \quad}$という関係が成り立つ。

(2) 連続信号 $X = X(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) をサンプリング周波数 F_s でサンプリングして得られる離散信号を $x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とする。線型定常デジタル・フィルター F の単位インパルス応答を h で表し、h の離散時間フーリエ変換 $\widehat{h}(\omega)$ が、

$$\widehat{h}(\omega) = \begin{cases} 0 & (|\omega| < \frac{\pi}{5} \text{ または } \frac{4}{5}\pi < |\omega| \le \pi) \\ 1 & (\frac{\pi}{5} \le |\omega| \le \frac{4\pi}{5}) \end{cases}$$

を満たすとする。$F[x]$ から復元した連続信号と元の X を比較するとどういう違いがあるか説明せよ。簡単のため、X には周波数 $F_s/2$ 以上の信号成分は含まれていないとする。