信号処理とフーリエ変換 第13回

～ デジタル・フィルター (1) ～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2021年1月13日

目次

本日の内容・連絡事項

- (この授業資料の準備をしている段階で) レポート課題 2 の未提出の人がかなりいて心配しています。締め切り (1/13 12:00) に間に合わなくても提出して下さい。
- 質問があるならば、オフィスアワー 1 月 13 日 (水)15:00〜18:00, 1 月 18 日 (月)12:30〜14:30 を利用して下さい (通常より長めにします)。
- 今回と次回でデジタル・フィルターについて解説する (講義ノート [1] の §8 の内容)。線形定常フィルターが単位インパルス応答で表現できることを示し、線形定常フィルターの周波数特性について説明し、例として、ローパス・フィルターを取り上げる。
- 期末レポート課題は、1 月 27 日 12:30 に課題公開、1 月 30 日 13:30 までに提出というスケジュールで行います。
- レポート課題 3 を出します。締め切りは 1 月 31 日です。

期末レポートについて

課題提示と提出締切の日時は予定です。それで都合が悪い人が多い場合は変更するかもしれません。その場合も後ろにはずらせません。1 月 13 日 23:30 まで待って決めます。

- 課題の提示は 1 月 27 日 (水曜) 12:30, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく早くアクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 1 月 30 日 (土曜) 13:30 です。
- 何か問題が起こった場合は、出来るだけ早く (遅くとも提出締切まで) メールで連絡して下さい。サーバー障害等の場合、締め切りの延期をする可能性があります。
- 課題文自体は、授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を 5 問ほど解いて、解答をレポートする、というものです。
- 解答しているときに、講義資料や教科書、ノート、参考書などを見ても構いませんが、問題の内容について他人と相談することはしないで下さい。
- 問題の量は従来の期末試験程度で、60 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。時間を有効に使うために事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの PDF で提出してもらいます。
- ファイルサイズは Oh-o! Meiji では、1 つ 30MB までという制限があります。それを超えた場合、ファイル・サイズを縮小するか、複数のファイルに分割して追加提出して下さい。スキャンして作った PDF の場合、how_to_pdf で説明した圧縮方法が使えるかもしれません。コンビニのスキャン・サービスという手もあります。

期末レポート注意事項 (追加)

- 自分の宿題のファイルのサイズを確認しておくことを勧めます。1MB を大きく超える人は対策を考えて下さい。
- コンピューターで数式が正しく書けない場合は無理をせず、手書きで解答したものをスキャンした PDF を提出して下さい。
- メールアドレスは、Oh-o! Meiji の「シラバスの補足」に書いてありますが、それも早めにメモしておくことを勧めます。
- 質問に対する回答や、締め切りの延期などは、Oh-o! Meiji と授業 WWW サイトの両方で公開し、公開したことを Oh-o! Meiji のお知らせ機能を使って通知します。
- 内容はいわゆる試験問題に近いですが、資料も見ることは禁止しないので、定義を書きなさい、定理の証明を書きなさい等の問題は出しません。その代わりに “見覚えのない” 問題が出るかもしれませんが、難しくはしないつもりです。

デジタル・フィルターとは、離散信号を入力して、離散信号を出力するもの (写像) である。(フィルターという言葉は知っているのかな？[1])

[1] filter について、辞書を引くことを勧めます。

デジタル・フィルターとは、離散信号を入力して、離散信号を出力するもの (写像) である。(フィルターという言葉は知っているのかな？[1])

離散信号とは複素数列のことである。すなわち、複素数列 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を離散信号と呼ぶ。離散信号の全体を $\mathcal{S}$ で表す。

[1] filter について、辞書を引くことを勧めます。

デジタル・フィルターとは、離散信号を入力して、離散信号を出力するもの (写像) である。(フィルターという言葉は知っているのかな？[1])

離散信号とは複素数列のことである。すなわち、複素数列 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を離散信号と呼ぶ。離散信号の全体を $\mathcal{S}$ で表す。

離散信号は $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{C}$ への写像とみなせる。$\mathcal{S} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

[1] filter について、辞書を引くことを勧めます。

デジタル・フィルターとは、離散信号を入力して、離散信号を出力するもの (写像) である。(フィルターという言葉は知っているのかな？[1])

離散信号とは複素数列のことである。すなわち、複素数列 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を離散信号と呼ぶ。離散信号の全体を $\mathcal{S}$ で表す。

離散信号は $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{C}$ への写像とみなせる。$\mathcal{S}=\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

$\mathcal{S}$ では、自然に和 $x+y$, スカラー倍 cx が定義される (ただし $c\in\mathbb{C}$)。

$$(x+y)(n)=x(n)+y(n),\quad (cx)(n)=cx(n)\quad (n\in\mathbb{Z}).$$

$\mathcal{S}$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となる。

[1] filter について、辞書を引くことを勧めます。

8.2 畳み込みと単位インパルス

$x, y \in \mathcal{S}$ に対して、**畳み込み** $x * y \in \mathcal{S}$ を

$$x * y(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める (収束のための仮定が必要であるが省略する)。
交換法則、結合法則、分配法則などが成り立つ — 以上は復習である。

8.2 畳み込みと単位インパルス

$x, y \in \mathcal{S}$ に対して、**畳み込み** $x * y \in \mathcal{S}$ を

$$x * y(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める (収束のための仮定が必要であるが省略する)。
交換法則、結合法則、分配法則などが成り立つ — 以上は復習である。

$\delta \in \mathcal{S}$ を

$$\delta(n) = \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

で定める。δ を**単位インパルス** (the unit impulse) と呼ぶ。

8.2 畳み込みと単位インパルス

$x, y \in \mathcal{S}$ に対して、**畳み込み** $x * y \in \mathcal{S}$ を

$$x * y(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める (収束のための仮定が必要であるが省略する)。
交換法則、結合法則、分配法則などが成り立つ — 以上は復習である。

$\delta \in \mathcal{S}$ を

$$\delta(n) = \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

で定める。δ を**単位インパルス** (the unit impulse) と呼ぶ。

δ は畳み込みに関する単位元である。すなわち、$\forall x \in \mathcal{S}$ に対して

(1) $$x * \delta = \delta * x = x$$

が成り立つ。

8.2 畳み込みと単位インパルス

$x, y \in \mathcal{S}$ に対して、**畳み込み** $x * y \in \mathcal{S}$ を

$$x * y(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める (収束のための仮定が必要であるが省略する)。
交換法則、結合法則、分配法則などが成り立つ — 以上は復習である。

$\delta \in \mathcal{S}$ を

$$\delta(n) = \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

で定める。δ を**単位インパルス** (the unit impulse) と呼ぶ。

δ は畳み込みに関する単位元である。すなわち、$\forall x \in \mathcal{S}$ に対して

(1) $$x * \delta = \delta * x = x$$

が成り立つ。実際、任意の $x \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$x * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)\delta(k) = x(n-0) \cdot \delta(0) = x(n) \cdot 1 = x(n).$$

ゆえに $x * \delta = x$.

8.3 線形定常フィルター

$\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への写像を**デジタル・フィルター**と呼ぶ。

8.3 線形定常フィルター

$\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への写像を**デジタル・フィルター**と呼ぶ。

デジタル・フィルター $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ が**線形** (linear) であるとは

$$(\forall x, y \in \mathcal{S}) \quad F[x+y] = F[x] + F[y],$$
$$(\forall x \in \mathcal{S})(\forall c \in \mathbb{C}) \quad F[cx] = cF[x]$$

を満たすことをいう。

$\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への写像を**デジタル・フィルター**と呼ぶ。

デジタル・フィルター $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ が**線形** (linear) であるとは

$$(\forall x, y \in \mathcal{S}) \quad F[x+y] = F[x] + F[y],$$
$$(\forall x \in \mathcal{S})(\forall c \in \mathbb{C}) \quad F[cx] = cF[x]$$

を満たすことをいう。

$x \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$y(n) := x(n-k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定まる $y \in \mathcal{S}$ のことを $x(\cdot - k)$ と表す。y は x の時間を k だけずらしたものである。$k > 0$ のときは遅らせたもの。$k < 0$ のときは早めたもの。

8.3 線形定常フィルター

$\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への写像を**デジタル・フィルター**と呼ぶ。

デジタル・フィルター $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ が**線形** (linear) であるとは

$$\begin{aligned}(\forall x, y \in \mathcal{S}) \quad & F[x+y] = F[x] + F[y], \\ (\forall x \in \mathcal{S})(\forall c \in \mathbb{C}) \quad & F[cx] = cF[x]\end{aligned}$$

を満たすことをいう。

$x \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$y(n) := x(n-k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定まる $y \in \mathcal{S}$ のことを $x(\cdot - k)$ と表す。y は x の時間を k だけずらしたものである。$k > 0$ のときは遅らせたもの。$k < 0$ のときは早めたもの。

$\cdot$ は変数をここに代入するという意味である。つまり $x(\cdot - k)$ は、$n \mapsto x(n-k)$ という関数を意味する記号である。

$\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への写像を**デジタル・フィルター**と呼ぶ。

デジタル・フィルター $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ が**線形** (linear) であるとは

$$(\forall x, y \in \mathcal{S}) \quad F[x+y] = F[x] + F[y],$$
$$(\forall x \in \mathcal{S})(\forall c \in \mathbb{C}) \quad F[cx] = cF[x]$$

を満たすことをいう。

$x \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$y(n) := x(n-k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定まる $y \in \mathcal{S}$ のことを $x(\cdot - k)$ と表す。y は x の時間を k だけずらしたものである。$k > 0$ のときは遅らせたもの。$k < 0$ のときは早めたもの。

$\cdot$ は変数をここに代入するという意味である。つまり $x(\cdot - k)$ は、$n \mapsto x(n-k)$ という関数を意味する記号である。

線形デジタルフィルター F が**定常** (**時不変**(じふへん), time invariant) であるとは

$$(\heartsuit) \qquad (\forall x \in \mathcal{S})(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad F\left[x(\cdot - k)\right] = F[x](\cdot - k)$$

を満たすことをいう。　　　　(つづく)

8.3 線形定常フィルター (続き)

条件 (♡) は分かりにくいと思われる。別の書き方をしてみる (2 回説明すると、どちらかで分かるかも、という期待)。

8.3 線形定常フィルター (続き)

条件 (♡) は分かりにくいと思われる。別の書き方をしてみる (2 回説明すると、どちらかで分かるかも、という期待)。

これは、時間 k だけのシフト $S_k\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ を

$$S_k[x] = x(\cdot - k) \quad (x \in \mathcal{S})$$

で定めたとき ($\mathcal{S}_k[x]$ は、信号 x を k だけ遅延させた信号)、

$$(\forall k \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathcal{S}) \quad F[S_k[x]] = S_k[F[x]]$$

が成り立つこと、すなわち

$$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad F \circ S_k = S_k \circ F$$

が成り立つこと、と言い換えられる。F が時間シフト S_k と交換可能ということ。

8.3 線形定常フィルター (続き)

条件 (♡) は分かりにくいと思われる。別の書き方をしてみる (2 回説明すると、どちらかで分かるかも、という期待)。

これは、時間 k だけのシフト $S_k\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ を

$$S_k[x] = x(\cdot - k) \quad (x \in \mathcal{S})$$

で定めたとき ($\mathcal{S}_k[x]$ は、信号 x を k だけ遅延させた信号)、

$$(\forall k \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathcal{S}) \quad F[S_k[x]] = S_k[F[x]]$$

が成り立つこと、すなわち

$$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad F \circ S_k = S_k \circ F$$

が成り立つこと、と言い換えられる。F が時間シフト S_k と交換可能ということ。…かえって分かりにくい？

8.3 線形定常フィルター (続き)

条件 (♡) は分かりにくいと思われる。別の書き方をしてみる (2 回説明すると、どちらかで分かるかも、という期待)。

これは、時間 k だけのシフト $S_k\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ を

$$S_k[x] = x(\cdot - k) \quad (x \in \mathcal{S})$$

で定めたとき ($\mathcal{S}_k[x]$ は、信号 x を k だけ遅延させた信号)、

$$(\forall k \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathcal{S}) \quad F[S_k[x]] = S_k[F[x]]$$

が成り立つこと、すなわち

$$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad F \circ S_k = S_k \circ F$$

が成り立つこと、と言い換えられる。F が時間シフト S_k と交換可能ということ。…かえって分かりにくい？

例え話: 拡声器があり、x を入力音声、$F[x]$ をスピーカーから出力される音声とする。いつでも同じように拡声する (夜中だから音を小さくするとかしない)。それが定常ということである。

次の定理がきわめつけに重要である。

定理 13.1 (線形定常フィルターの単位インパルス応答による特徴付け)

線形定常デジタルフィルター $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ に対して

$$h := F[\delta]$$

とおくと

$$(\forall x \in \mathcal{S}) \quad F[x] = x * h = h * x.$$

$h = F[\delta]$ を F の**単位インパルス応答** (the unit impulse response) と呼ぶ。

次の定理がきわめつけに重要である。

定理 13.1 (線形定常フィルターの単位インパルス応答による特徴付け)

線形定常デジタルフィルター $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ に対して

$$h := F[\delta]$$

とおくと

$$(\forall x \in \mathcal{S}) \quad F[x] = x * h = h * x.$$

$h = F[\delta]$ を F の**単位インパルス応答** (the unit impulse response) と呼ぶ。

STI フィルター F に対して、単位インパルス δ を入力したときの出力 h が分かれば、任意の入力 x に対する出力は、h との畳み込みを計算すれば得られる。

次の定理がきわめつけに重要である。

定理 13.1 (線形定常フィルターの単位インパルス応答による特徴付け)

線形定常デジタルフィルター $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ に対して

$$h := F[\delta]$$

とおくと

$$(\forall x \in \mathcal{S}) \quad F[x] = x * h = h * x.$$

$h = F[\delta]$ を F の**単位インパルス応答** (the unit impulse response) と呼ぶ。

STI フィルター F に対して、単位インパルス δ を入力したときの出力 h が分かれば、任意の入力 x に対する出力は、h との畳み込みを計算すれば得られる。

お話: 離散信号以外でも δ が定義されてフィルターの h に相当するものがある。微分方程式の場合は、**基本解**がそれに相当する。

8.3 線形定常フィルター　定理 13.1 の証明

$x \in \mathcal{S}$ とする。上で見たように $x = \delta * x$. すなわち

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k) x(k).$$

(第 k 項は、信号 x の時刻 k での値だけ取り出した信号である。)

$x \in \mathcal{S}$ とする。上で見たように $x = \delta * x$. すなわち

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k)x(k).$$

(第 k 項は、信号 x の時刻 k での値だけ取り出した信号である。) ゆえに

$$F[x] = F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k)x(k)\right] \qquad \text{(代入した)}$$

$x \in \mathcal{S}$ とする。上で見たように $x = \delta * x$. すなわち

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k)x(k).$$

(第 k 項は、信号 x の時刻 k での値だけ取り出した信号である。) ゆえに

$$F[x] = F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k)x(k)\right] \qquad \text{(代入した)}$$

定理 13.1 の証明

$x \in \mathcal{S}$ とする。上で見たように $x = \delta * x$. すなわち

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k)x(k).$$

(第 k 項は、信号 x の時刻 k での値だけ取り出した信号である。) ゆえに

$$\begin{aligned} F[x] &= F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k)x(k)\right] && \text{(代入した)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)F\left[\delta(\cdot - k)\right] && \text{(線形性)} \end{aligned}$$

$x \in \mathcal{S}$ とする。上で見たように $x = \delta * x$. すなわち

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k) x(k).$$

(第 k 項は、信号 x の時刻 k での値だけ取り出した信号である。) ゆえに

$$\begin{aligned}
F[x] &= F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k) x(k)\right] && \text{(代入した)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) F\left[\delta(\cdot - k)\right] && \text{(線形性)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) F[\delta](\cdot - k) && \text{(定常性)}
\end{aligned}$$

定理 13.1 の証明

$x \in \mathcal{S}$ とする。上で見たように $x = \delta * x$. すなわち

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k)x(k).$$

(第 k 項は、信号 x の時刻 k での値だけ取り出した信号である。) ゆえに

$$\begin{aligned}
F[x] &= F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k)x(k)\right] && \text{(代入した)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)F\left[\delta(\cdot - k)\right] && \text{(線形性)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)F[\delta](\cdot - k) && \text{(定常性)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(\cdot - k) && (F[\delta] = h)
\end{aligned}$$

$x \in \mathcal{S}$ とする。上で見たように $x = \delta * x$. すなわち

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k) x(k).$$

(第 k 項は、信号 x の時刻 k での値だけ取り出した信号である。) ゆえに

$$\begin{aligned}
F[x] &= F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - k) x(k)\right] && \text{(代入した)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) F\left[\delta(\cdot - k)\right] && \text{(線形性)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) F[\delta](\cdot - k) && \text{(定常性)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(\cdot - k) && (F[\delta] = h) \\
&= h * x. \quad \square
\end{aligned}$$

8.4 FIR フィルター

LTI フィルター F が FIR (**有限インパルス応答**, finite impulse respone) とは、F の単位インパルス応答 h が次の条件を満たすことをいう。

$$(\exists J \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{Z} : k < 0 \vee k > J) \quad h(k) = 0$$

言い換えると、$h(k) \neq 0$ となる k は、$0 \leq k \leq J$ を満たす。

8.4 FIR フィルター

LTI フィルター F が FIR (**有限インパルス応答**, finite impulse respone) とは、F の単位インパルス応答 h が次の条件を満たすことをいう。

$$(\exists J \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{Z} : k < 0 \vee k > J) \quad h(k) = 0$$

言い換えると、$h(k) \neq 0$ となる k は、$0 \leq k \leq J$ を満たす。

このとき $h(0), h(1), \cdots, h(J)$ を F の**フィルター係数**と呼ぶ。

8.4 FIR フィルター

LTI フィルター F が FIR (**有限インパルス応答**, finite impulse respone) とは、F の単位インパルス応答 h が次の条件を満たすことをいう。

$$(\exists J \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{Z} : k < 0 \lor k > J) \quad h(k) = 0$$

言い換えると、$h(k) \neq 0$ となる k は、$0 \le k \le J$ を満たす。

このとき $h(0), h(1), \cdots, h(J)$ を F の**フィルター係数**と呼ぶ。

F が FIR フィルターならば、任意の $x \in \mathcal{S}$ に対して

$$F[x](n) = \sum_{k=0}^{J} x(n-k)h(k) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(未来の情報を使わない、計算を有限和にしたい、ということ。)

piano-cutoff.nb で遊ぶ

これからデジタル・フィルターを構成する話をするが、どういうことをしたいのかイメージを持ってもらうために、piano-cutoff.nb というサンプル・プログラムを用意してある。

piano-cutoff.nb で遊ぶ

これからデジタル・フィルターを構成する話をするが、どういうことをしたいのかイメージを持ってもらうために、piano-cutoff.nb というサンプル・プログラムを用意してある。

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/piano-cutoff.nb;
open piano-cutoff.nb
```

第 10 回の授業のときに試してみた。そのときのことを覚えていれば、ここはスキップして (動画を見るのは止めて) も良い。

このプログラムは、ある周波数よりも高い周波数成分をカットする、という処理をしている。ここでは信号全体を離散 Fourier 変換してから処理しているが (高い周波数に対応する離散 Fourier 係数を 0 にする)、FIR フィルターを作れば、それをしなくても出来る (ほぼリアルタイムで — 正確に言うとわずかな時間遅れで — 処理できる)。

8.5 デジタル・フィルターを作る

8.5.1 はじめに

STI フィルターの、任意入力に対する出力が、単位インパルス応答との畳み込みで表される、という定理 (定理 13.1) を紹介した。ここでは、ローパス・フィルターを例にあげて、より具体的に説明する。

例えば音の場合、「話して」出た声をマイクで拾って、フィルターで処理した後にスピーカーで流したものを「聴いて」効果を確かめられる。

$$\xrightarrow{\text{マイク}} \boxed{\begin{array}{c}\text{連続信号}\\ X(t)\end{array}} \xrightarrow{\text{AD 変換}} \boxed{\begin{array}{c}\text{離散信号}\\ x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\end{array}} \xrightarrow{\text{フィルター } F} \boxed{\begin{array}{c}\text{離散信号}\\ y=\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\end{array}} \xrightarrow{\text{DA 変換}} \boxed{\begin{array}{c}\text{連続信号}\\ Y(t)\end{array}} \xrightarrow{\text{スピーカー}}$$

8.5 デジタル・フィルターを作る
8.5.1 はじめに

STI フィルターの、任意入力に対する出力が、単位インパルス応答との畳み込みで表される、という定理 (定理 13.1) を紹介した。ここでは、ローパス・フィルターを例にあげて、より具体的に説明する。

例えば音の場合、「話して」出た声をマイクで拾って、フィルターで処理した後にスピーカーで流したものを「聴いて」効果を確かめられる。

$$\xrightarrow{\text{マイク}} \boxed{\begin{matrix}\text{連続信号}\\ X(t)\end{matrix}} \xrightarrow{\text{AD 変換}} \boxed{\begin{matrix}\text{離散信号}\\ x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\end{matrix}} \xrightarrow{\text{フィルター } F} \boxed{\begin{matrix}\text{離散信号}\\ y=\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\end{matrix}} \xrightarrow{\text{DA 変換}} \boxed{\begin{matrix}\text{連続信号}\\ Y(t)\end{matrix}} \xrightarrow{\text{スピーカー}}$$

全体の処理の流れ: 1 次元の連続信号 (アナログ信号) をサンプリングして離散信号 (デジタル信号) を求め (ある種の AD 変換をしたことになる)、線形定常なデジタル・フィルター (LTI フィルター) F に入力して出力を得て、さらに DA 変換して連続信号を出力する。

連続信号 $X=X(t)$ を、**サンプリング周期** T_s で**サンプリングする**とは

(2) $$x_n = X(nT_s) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定めることをいう。

連続信号 $X = X(t)$ を、**サンプリング周期** T_s で**サンプリングする**とは

(2) $$x_n = X(nT_s) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定めることをいう。

サンプリング周波数 F_s, **サンプリング角周波数** Ω_s は

(3) $$F_s := \frac{1}{T_s}, \quad \Omega_s := 2\pi F_s$$

で定義される。

連続信号 $X = X(t)$ を、**サンプリング周期** T_s で**サンプリングする**とは

(2)
$$x_n = X(nT_s) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定めることをいう。

サンプリング周波数 F_s, **サンプリング角周波数** Ω_s は

(3)
$$F_s := \frac{1}{T_s}, \quad \Omega_s := 2\pi F_s$$

で定義される。

一般に、周波数とは周期の逆数である。

連続信号 $X = X(t)$ を、**サンプリング周期** T_s で**サンプリングする**とは

$$x_n = X(nT_s) \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{2}$$

で $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定めることをいう。

サンプリング周波数 F_s, **サンプリング角周波数** Ω_s は

$$F_s := \frac{1}{T_s}, \quad \Omega_s := 2\pi F_s \tag{3}$$

で定義される。

一般に、周波数とは周期の逆数である。

周波数というものはあちこちで出て来るが、一般に、周波数に 2π をかけたものを**角周波数**と呼ぶ。

例えば $\sin 2\pi ft$ は周波数 f の正弦波であるが、角周波数 $\omega := 2\pi f$ を使うと、$\sin \omega t$ という簡潔な式で表せる。

(注: 私の資料は、サンプリング周波数を f_s と小文字の f で書いたりしています。不統一ですが、添字に s をつけるのは他に T_s だけなので、混同して間違えることはないと思います。)

8.5.3 正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると等比数列

正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると、等比数列になることを説明しよう。

8.5.3 正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると等比数列

正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると、等比数列になることを説明しよう。

$X(t) = e^{i\Omega t}$ $(\Omega \in \mathbb{R})$ とする。サンプリングすると

$$x_n = X(nT_s) = e^{i\Omega n T_s} = e^{in\omega} \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{4}$$

ただし

$$\omega := \Omega T_s. \tag{5}$$

8.5.3 正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると等比数列

正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると、等比数列になることを説明しよう。

$X(t)=e^{i\Omega t}$ $(\Omega\in\mathbb{R})$ とする。サンプリングすると

$$x_n=X(nT_s)=e^{i\Omega nT_s}=e^{in\omega}\quad(n\in\mathbb{Z}), \tag{4}$$

ただし

$$\omega:=\Omega T_s. \tag{5}$$

$x_n=\left(e^{i\omega}\right)^n$ であるから、$x:=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は公比 $e^{i\omega}$ の等比数列である。

8.5.3 正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると等比数列

正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると、等比数列になることを説明しよう。

$X(t) = e^{i\Omega t}$ $(\Omega \in \mathbb{R})$ とする。サンプリングすると

$$x_n = X(nT_s) = e^{i\Omega n T_s} = e^{in\omega} \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{4}$$

ただし

$$\omega := \Omega T_s. \tag{5}$$

$x_n = \left(e^{i\omega}\right)^n$ であるから、$x := \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は公比 $e^{i\omega}$ の等比数列である。

複素指数関数はサンプリングすると、等比数列になる。
(等比数列は離散版指数関数みたいなもの、まあ自然)

(**注意** ここでは $X(t) = e^{i\Omega t}$ のことを "正弦波" と呼んでいる。正弦波とは、本来は $X(t) = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t$ (あるいは $X(t) = A\sin(\Omega t + \Phi)$) の形の信号のことを指すが、

$$C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t = \frac{C_1 - iC_2}{2} e^{i\Omega t} + \frac{C_1 + iC_2}{2} e^{-i\Omega t}$$

であるから、$e^{i\Omega t}$ について調べれば十分である。)

8.5.3 正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると等比数列

連続信号として、なぜ特に正弦波 $e^{i\Omega t}$ を考えるのか (そのココロは)？—

8.5.3 正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると等比数列

連続信号として、なぜ特に正弦波 $e^{i\Omega t}$ を考えるのか (そのココロは)? — 任意の信号は $e^{i\Omega t}$ の重ね合わせで表せるから。実際、任意の信号 $X(t)$ は

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega, \quad \widehat{X}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\Omega t} dt$$

と表せる (Fourier 反転公式) ので、$X(t)$ は $e^{i\Omega t}$ $(\Omega \in \mathbb{R})$ の線形結合と言える。

8.5.3 正弦波 $e^{i\Omega t}$ をサンプリングすると等比数列

連続信号として、なぜ特に正弦波 $e^{i\Omega t}$ を考えるのか (そのココロは)?— 任意の信号は $e^{i\Omega t}$ の重ね合わせで表せるから。実際、任意の信号 $X(t)$ は

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega, \quad \widehat{X}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\Omega t} dt$$

と表せる (Fourier 反転公式) ので、$X(t)$ は $e^{i\Omega t}$ $(\Omega \in \mathbb{R})$ の線形結合と言える。

さらに、フィルター F が線形の場合は、離散化した正弦波 $x = \{e^{in\omega}\}$ の出力 $F[e^{in\omega}]$ を重ね合わせれば一般の入力に対する出力が得られることにも注意しよう。

線形の場合は分解して考えることが出来る (後から総和をとれば良い)

8.5.4 正規化 (角) 周波数

サンプリング定理によると、サンプリング角周波数 $\Omega_s > 0$ でサンプリングして、きちんと復元できるためには、

$$|\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \tag{6}$$

が成り立っていれば良い。このとき次式が成立する。

$$|\omega| < \pi. \tag{7}$$

一般の Ω に対しては、$\omega := \Omega T_s \in (-\pi, \pi)$ とは限らない。

8.5.4 正規化 (角) 周波数

サンプリング定理によると、サンプリング角周波数 $\Omega_s > 0$ でサンプリングして、きちんと復元できるためには、

(6) $$|\Omega| < \frac{\Omega_s}{2}$$

が成り立っていれば良い。このとき次式が成立する。

(7) $$|\omega| < \pi.$$

一般の Ω に対しては、$\omega := \Omega T_s \in (-\pi, \pi)$ とは限らない。

(8) $$\omega' \equiv \omega \pmod{2\pi}, \quad \omega' \in (-\pi, \pi]$$

となる ω' を取ることが出来る。この ω' を**正規化角周波数**と呼ぶ。また次式で定まる f を**正規化周波数**と呼ぶ。

(9) $$f := \frac{\omega'}{2\pi}.$$

正規化角周波数 ω' に対しても、次式が成り立つ (Cf. $x_n = e^{in\omega}$)。

(10) $$x_n = e^{in\omega'} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

以下では $'$ は省略する。

8.5.5 連続信号の周波数と離散化信号の周波数の関係

連続信号 $e^{i\Omega t}(=e^{2\pi iFt})$ をサンプリングして離散信号 $e^{in\omega}(=e^{2\pi ifn})$ を求めた。

元の連続信号の角周波数 Ω と離散信号の角周波数 ω の関係は？
(あるいは元の連続信号の周波数 F と離散信号の周波数 f の関係は？)

8.5.5 連続信号の周波数と離散化信号の周波数の関係

連続信号 $e^{i\Omega t}(= e^{2\pi i F t})$ をサンプリングして離散信号 $e^{in\omega}(= e^{2\pi i f n})$ を求めた。

元の連続信号の角周波数 Ω と離散信号の角周波数 ω の関係は？　$(\omega \overset{\text{def.}}{=} \Omega T_s)$
(あるいは元の連続信号の周波数 F と離散信号の周波数 f の関係は？)

$$\Omega = F_s \omega, \quad F = F_s f \qquad \left(F_s = \frac{1}{T_s} \text{ をかければ良い}\right). \tag{11}$$

実際 $\omega = \Omega T_s$ であるから

$$\Omega = \frac{\omega}{T_s} = F_s \omega, \quad F = \frac{\Omega}{2\pi} = F_s \frac{\omega}{2\pi} = F_s f.$$

8.5.5 連続信号の周波数と離散化信号の周波数の関係

連続信号 $e^{i\Omega t}(= e^{2\pi iFt})$ をサンプリングして離散信号 $e^{in\omega}(= e^{2\pi ifn})$ を求めた。

元の連続信号の角周波数 Ω と離散信号の角周波数 ω の関係は？　$(\omega \overset{\text{def.}}{=} \Omega T_s)$
(あるいは元の連続信号の周波数 F と離散信号の周波数 f の関係は？)

$$\Omega = F_s\omega, \quad F = F_s f \qquad \left(F_s = \frac{1}{T_s} \text{ をかければ良い}\right). \tag{11}$$

実際 $\omega = \Omega T_s$ であるから

$$\Omega = \frac{\omega}{T_s} = F_s\omega, \quad F = \frac{\Omega}{2\pi} = F_s\frac{\omega}{2\pi} = F_s f.$$

念のため記号の意味のおさらい

- Ω, F はそれぞれ元の信号の角周波数, 周波数 ($X(t) = e^{i\Omega t}$, $\Omega = 2\pi F$)
- ω, f はそれぞれサンプリングで得た信号の (正規化) 角周波数, (正規化) 周波数 ($\omega = \Omega T_s$, $\omega = 2\pi f$)
- F_s, T_s はそれぞれサンプリング周波数, サンプリング周期 ($F_s = \frac{1}{T_s}$)

8.5.5 連続信号の周波数と離散化信号の周波数の関係

連続信号 $e^{i\Omega t}(= e^{2\pi iFt})$ をサンプリングして離散信号 $e^{in\omega}(= e^{2\pi ifn})$ を求めた。

元の連続信号の角周波数 Ω と離散信号の角周波数 ω の関係は？　$(\omega \overset{\text{def.}}{=} \Omega T_s)$
(あるいは元の連続信号の周波数 F と離散信号の周波数 f の関係は？)

$$\Omega = F_s\omega, \quad F = F_s f \qquad \left(F_s = \frac{1}{T_s}\text{ をかければ良い}\right). \tag{11}$$

実際 $\omega = \Omega T_s$ であるから

$$\Omega = \frac{\omega}{T_s} = F_s\omega, \quad F = \frac{\Omega}{2\pi} = F_s\frac{\omega}{2\pi} = F_s f.$$

念のため記号の意味のおさらい

- Ω, F はそれぞれ元の信号の角周波数, 周波数 ($X(t) = e^{i\Omega t}$, $\Omega = 2\pi F$)
- ω, f はそれぞれサンプリングで得た信号の (正規化) 角周波数, (正規化) 周波数 ($\omega = \Omega T_s$, $\omega = 2\pi f$)
- F_s, T_s はそれぞれサンプリング周波数, サンプリング周期 ($F_s = \frac{1}{T_s}$)

8.5.5 連続信号の周波数と離散化信号の周波数の関係

連続信号 $e^{i\Omega t}(=e^{2\pi iFt})$ をサンプリングして離散信号 $e^{in\omega}(=e^{2\pi ifn})$ を求めた。

元の連続信号の角周波数 Ω と離散信号の角周波数 ω の関係は？　$(\omega \overset{\text{def.}}{=} \Omega T_s)$
(あるいは元の連続信号の周波数 F と離散信号の周波数 f の関係は？)

$$\Omega = F_s\omega, \quad F = F_s f \qquad \left(F_s = \frac{1}{T_s} \text{ をかければ良い}\right). \tag{11}$$

実際 $\omega = \Omega T_s$ であるから

$$\Omega = \frac{\omega}{T_s} = F_s\omega, \quad F = \frac{\Omega}{2\pi} = F_s\frac{\omega}{2\pi} = F_s f.$$

念のため記号の意味のおさらい

- Ω, F はそれぞれ元の信号の角周波数, 周波数 $(X(t) = e^{i\Omega t}, \Omega = 2\pi F)$
- ω, f はそれぞれサンプリングで得た信号の (正規化) 角周波数, (正規化) 周波数 $(\omega = \Omega T_s, \omega = 2\pi f)$
- F_s, T_s はそれぞれサンプリング周波数, サンプリング周期 $(F_s = \frac{1}{T_s})$

問　ある正弦波をサンプリング周波数 $F_s = 44100\text{Hz}$ でサンプリングしたら、得られた離散信号の正規化角周波数 $\omega = \pi/10$ であった。もとの正弦波の周波数 F を求めよ。

8.5.5 連続信号の周波数と離散化信号の周波数の関係

連続信号 $e^{i\Omega t}(=e^{2\pi iFt})$ をサンプリングして離散信号 $e^{in\omega}(=e^{2\pi ifn})$ を求めた。

元の連続信号の角周波数 Ω と離散信号の角周波数 ω の関係は？　$(\omega \overset{\text{def.}}{=} \Omega T_s)$
(あるいは元の連続信号の周波数 F と離散信号の周波数 f の関係は？)

$$\Omega = F_s\omega, \quad F = F_s f \qquad \left(F_s = \frac{1}{T_s} \text{ をかければ良い}\right). \tag{11}$$

実際 $\omega = \Omega T_s$ であるから

$$\Omega = \frac{\omega}{T_s} = F_s\omega, \quad F = \frac{\Omega}{2\pi} = F_s\frac{\omega}{2\pi} = F_s f.$$

念のため記号の意味のおさらい

- Ω, F はそれぞれ元の信号の角周波数, 周波数 ($X(t)=e^{i\Omega t}$, $\Omega = 2\pi F$)
- ω, f はそれぞれサンプリングで得た信号の (正規化) 角周波数, (正規化) 周波数 ($\omega = \Omega T_s$, $\omega = 2\pi f$)
- F_s, T_s はそれぞれサンプリング周波数, サンプリング周期 ($F_s = \frac{1}{T_s}$)

問　ある正弦波をサンプリング周波数 $F_s = 44100\mathrm{Hz}$ でサンプリングしたら、得られた離散信号の正規化角周波数 $\omega = \pi/10$ であった。もとの正弦波の周波数 F を求めよ。

解　$\Omega = F_s\omega$, $\Omega = 2\pi F$ であるから、$F = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{F_s\omega}{2\pi} = \frac{44100\mathrm{Hz}}{2\pi} \times \frac{\pi}{10} \fallingdotseq 2205\ \mathrm{Hz}$.

8.5.6 フィルターの周波数特性

LTI フィルター F に、離散正弦波 $\{e^{in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を入力したときの出力を調べよう。

8.5.6 フィルターの周波数特性

LTI フィルター F に、離散正弦波 $\{e^{in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を入力したときの出力を調べよう。

線型定常であるから $h := F[\delta]$ とおくと、$F[x] = x * h$.

8.5.6 フィルターの周波数特性

LTI フィルター F に、離散正弦波 $\{e^{in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を入力したときの出力を調べよう。

線型定常であるから $h := F[\delta]$ とおくと、$F[x] = x * h$.

$x_n = e^{in\omega}$ $(n \in \mathbb{Z})$, $y := F[x]$ とおくと

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(n-k)\omega} h_k = e^{in\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h_k.$$

8.5.6 フィルターの周波数特性

LTI フィルター F に、離散正弦波 $\{e^{in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を入力したときの出力を調べよう。

線型定常であるから $h := F[\delta]$ とおくと、$F[x] = x * h$.

$x_n = e^{in\omega}$ $(n \in \mathbb{Z})$, $y := F[x]$ とおくと

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(n-k)\omega} h_k = e^{in\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h_k.$$

ゆえに、h の離散時間フーリエ変換

(12)
$$\widehat{h}(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h_k \quad (\omega \in [-\pi, \pi])$$

を用いると

(13)
$$y_n = e^{in\omega} \widehat{h}(\omega) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

8.5.6 フィルターの周波数特性

LTI フィルター F に、離散正弦波 $\{e^{in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を入力したときの出力を調べよう。

線型定常であるから $h := F[\delta]$ とおくと、$F[x] = x * h$.

$x_n = e^{in\omega}$ $(n \in \mathbb{Z})$, $y := F[x]$ とおくと

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(n-k)\omega} h_k = e^{in\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h_k.$$

ゆえに、h の離散時間フーリエ変換

$$\widehat{h}(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h_k \quad (\omega \in [-\pi, \pi]) \tag{12}$$

を用いると

$$y_n = e^{in\omega} \widehat{h}(\omega) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{13}$$

出力信号 $y = \{y_n\}$ は、入力信号 x と同じ離散正弦波であり、角周波数は入力信号のそれと同じ ω である。つまり、次のことが分かった。

正弦波を線形定常フィルターに入力すると、同じ周波数の正弦波が出力される。

8.5.6 フィルターの周波数特性

LTI フィルター F に、離散正弦波 $\{e^{in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を入力したときの出力を調べよう。

線型定常であるから $h := F[\delta]$ とおくと、$F[x] = x * h$.

$x_n = e^{in\omega}$ $(n \in \mathbb{Z})$, $y := F[x]$ とおくと

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(n-k)\omega} h_k = e^{in\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h_k.$$

ゆえに、h の離散時間フーリエ変換

$$\widehat{h}(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h_k \quad (\omega \in [-\pi, \pi]) \tag{12}$$

を用いると

$$y_n = e^{in\omega} \widehat{h}(\omega) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{13}$$

出力信号 $y = \{y_n\}$ は、入力信号 x と同じ離散正弦波であり、角周波数は入力信号のそれと同じ ω である。つまり、次のことが分かった。

正弦波を線形定常フィルターに入力すると、同じ周波数の正弦波が出力される。

$\widehat{h}(\omega)$ は、“増幅率” とでも呼ぶべきものである。それは角周波数 ω の関数になっている。これをフィルター F の**周波数応答** (frequency response), **周波数特性** (frequency characteristic) と呼ぶ。

おまけ: z 変換、伝達関数

信号処理のテキストでは、この周波数応答を、h の z 変換を用いて表現してあるものが多い。一応紹介しておく。$h=\{h_n\}$ の **z 変換**とは、

$$(14)\qquad H(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h_k}{z^k} \qquad \text{(Laurent 級数ですね)}$$

で定義される複素関数 $H(z)$ で、これを用いると

$$(15)\qquad \widehat{h}(\omega) = H\left(e^{i\omega}\right).$$

$H(z)$ をフィルター F の**伝達関数** (transfer function) と呼ぶ。

周波数応答の絶対値と偏角に名前がついている。

- $G(\omega) := \left|\widehat{h}(\omega)\right| = \left|H\left(e^{i\omega}\right)\right|$ を**利得** (gain) と呼ぶ。
- $\theta(\omega) := \arg \widehat{h}(\omega) = \arg H\left(e^{i\omega}\right)$ を**位相シフト** (phase shift) と呼ぶ。
  (信号処理の本では、arg を $\angle$ と書くことがある。)

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).