

信号処理とフーリエ変換 第11回

～サンプリング定理, 離散時間 Fourier 変換, 畳み込み～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年12月9日

① 本日の内容・連絡事項

② サンプリング定理

- はじめに
- サンプリング定理と証明

③ 離散時間 Fourier 変換

- 離散時間 Fourier 変換の定義と反転公式
- Fourier ファミリーの一覧表

④ 畳み込み

- はじめに

- サンプル定理、離散時間 Fourier 変換の手短な紹介をし、これまでに現れた“4つの Fourier 変換”を振り返る。Fourier 変換で重要な畳み込みの説明を始める。
(講義ノート [1] の §5, 6, 7 に該当する。)
- 本日 (2020/12/9) 中にレポート課題 2 を発表する。締め切りは 2021/1/12. なるべく今年のうち質問を済ませること (12/9, 12/14, 12/16, 12/21 にオフィスアワーがある)。

5 サンプリング定理 5.1 はじめに

連続信号 $x(t)$ をサンプリングして、離散信号 $\{x(nT_s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を取り出すことにより、元の信号の情報がどれくらい失われるのか、どのくらい保存されているのか、これは重要な問題である。

この問題は、離散 Fourier 変換でも考えたが (定理 7.3)、ここでは周期関数でない $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の Fourier 変換に関する、有名なサンプリング定理 (定理 11.2) を紹介する。その結論を大まかに述べると、ある周波数以上の周波数成分の含まれていない信号は、2 倍のサンプリング周波数でサンプリングした (サンプリング \cdot) データから再現できる、という内容である。

(少し違う表現をすると — 信号に含まれる最大周波数の 2 倍より高いサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号を復元できる。)

個人的には、定理 11.2 は確かに正しい命題であるが、応用するにあたって、かなり不自然な内容である (現実との距離が大きすぎる) と考えている。

言いそびれたこと

離散 Fourier 変換のところで、周期的な信号の再現についての定理を紹介した。最大周波数の 2 倍を超えるサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号が復元可能である、という**十分性**を示す内容であったが、一方で**必要性**を示唆する次の事実も紹介しておくべきだった。

注意 11.1 (最大周波数のぴったり 2 倍では不足)

例えば周波数 f の正弦波 $x(t) = A \sin(2\pi ft)$ に対して、サンプリング周波数 $f_s = 2f$ でサンプリングすると、サンプリング周期は $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2f}$ 。

$$x(nT_s) = A \sin(2\pi f \cdot nT_s) = A \sin\left(2\pi f \cdot n \frac{1}{2f}\right) = A \sin(n\pi) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

何とサンプリングしたデータ $\{x(nT_s)\}$ は零数列である。当然復元は不可能である。 \square

5 サンプリング定理

5.2 サンプリング定理と証明

定理 11.2 (サンプリング定理, Nyquist, Shannon, 染谷)

関数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の Fourier 変換

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

が

$$(\exists W > 0)(\forall \omega \in \mathbb{R} : |\omega| \geq W) \quad X(\omega) = 0$$

を満たすならば、このような W を任意に一つ取って

$$T := \frac{\pi}{W}$$

とおくとき、次式が成り立つ。

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc} [\pi(t/T - n)].$$

ただし $\operatorname{sinc} x := \frac{\sin x}{x}$.

5.2 サンプリング定理と証明

つまり、 $\frac{W}{2\pi}$ 以上の周波数成分を含まない信号は、サンプリング周波数 $f_s := \frac{1}{T} = \frac{W}{\pi}$ ($= 2 \times \frac{W}{2\pi}$) でサンプリングした離散信号から復元できる。

言い換えると、 f 以上の周波数成分を含まない信号は、サンプリング周波数 $2f$ でサンプリングしたデータから復元できる。

5.2 サンプリング定理と証明

証明 Fourier 変換の反転公式

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (t \in \mathbb{R})$$

に仮定「 $|\omega| \geq W \Rightarrow X(\omega) = 0$ 」を適用すると

$$(1) \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^W X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (t \in \mathbb{R}).$$

この式は周期 $2W$ の関数の Fourier 係数の式に似ている。

周期 $2W$ の関数 X の Fourier 級数

$$c_n := \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(\omega) e^{-in\frac{2\pi}{2W}\omega} d\omega = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(\omega) e^{-inT\omega} d\omega \quad (T = \frac{\pi}{W} \text{ を代入})$$

とおくとき

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+in\frac{2\pi}{2W}\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+inT\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

5 サンプリング定理 証明 (続き)

これから、

$$(2) \quad c_n := \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(\omega) e^{+inT\omega} d\omega$$

とおくとき

$$(3) \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inT\omega} \quad (|\omega| \leq W).$$

(X の、 $[-W, W]$ の外での値を定義し直して、周期 $2W$ の関数としてから Fourier 級数展開した、と考える。)

(1) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^W X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ と (2) を見比べて、

$$(4) \quad c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega(nT)} d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W} x(nT) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} x(nT).$$

5 サンプリング定理 証明 (続き)

(3), (4) を (1) に代入すると

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^W \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-in\omega T} e^{i\omega t} d\omega \right) \\&= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-W}^W e^{i\omega(t-nT)} d\omega \\&= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot 2W \operatorname{sinc}(W(t-nT)) \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(W(t-nT)).\end{aligned}$$

ここで $\int_{-a}^a e^{ibx} dx = 2a \operatorname{sinc}(ab)$ ($a > 0, b \neq 0$) を用いた。また

$$W(t-nT) = \frac{\pi}{T}(t-nT) = \pi \left(\frac{t}{T} - n \right)$$

であるから

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(\pi(t/T - n)). \quad \square$$

ファミリーの最後のメンバー、離散時間 Fourier 変換を紹介する。実は、Fourier 級数の理論で本質的には済んでいる。

整数を添字に持つ複素数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を**離散信号** という (Cf. サンプリング定理)。これは $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ という写像とみなせる。 $f(n) = f_n$ ということ。

離散信号全体の集合を $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ と表す。

$f = \{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対して、

$$(5) \quad \mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

で定まる関数 $\mathcal{F}f$ を f の**離散時間 Fourier 変換** (discrete-time Fourier transform) と呼ぶ。

\hat{f} は周期 2π の関数である (確認しよう!)。ゆえに $\omega \in [0, 2\pi]$ あるいは $\omega \in [-\pi, \pi]$ で考えれば十分である。

反転公式は

$$(6) \quad f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega)e^{in\omega} d\omega \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

6.1 離散時間 Fourier 変換の定義と反転公式

証明 1 $f(n)$ は \hat{f} の第 $(-n)$ 番目の Fourier 係数と分かる。

Cf. 普通の Fourier 級数

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ 周期 } 2\pi \text{ に対し, } c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \text{ とおくと } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

証明 2 $\{e^{-in\omega}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は直交系である。実際 $m \neq n$ のとき

$$(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)\omega} d\omega = 0.$$

$m = n$ のとき

$$(e^{-in\omega}, e^{-in\omega}) = (e^{-in\omega}, e^{-in\omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi.$$

ゆえに (5) は、直交系 $e^{-in\omega}$ による \hat{f} の展開であるから、その係数 $f(n)$ は

$$f(n) = \frac{(\hat{f}, e^{-in\omega})}{(e^{-in\omega}, e^{-in\omega})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad \square$$

6.2 Fourier ファミリーの一覧表

これまでに出て来た、Fourier 変換、Fourier 級数 (Fourier 係数)、離散時間 Fourier 変換、離散 Fourier 変換の一覧表を作って整理してみよう。

対象	操作の名前	変換の定義式	反転公式
\mathbb{R} 上の関数	Fourier 変換	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi$
\mathbb{R} 上の周期関数	Fourier 係数	$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$	$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$
\mathbb{Z} 上の関数 (離散信号)	離散時間 Fourier 変換	$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega \in [0, 2\pi])$	$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(\omega)e^{in\omega} d\omega$
\mathbb{Z} 上の周期関数 (周期的離散信号)	離散 Fourier 変換	$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (0 \leq n \leq N-1),$ $\omega := \exp \frac{2\pi i}{N}$	$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{nj}$

しばらく観賞。式が良く似ていることに注目 (“ f は \sum の親戚”)。

その気になれば、もっと似せることも出来る。

- c_n, C_n を $\hat{f}(n)$ と書くとか (実際そうすることもある)。
- $\frac{1}{2\pi}$ を 2つの $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ に分けるとか。 $\frac{1}{N}$ を 2つの $\frac{1}{\sqrt{N}}$ に分けるとか。
- 離散 Fourier 変換で、 ω を $e^{2\pi i/N}$ で書くとか。
- 名前のつけ方もやり直すとか。

6.2 Fourier ファミリーの一覧表

写像の性質も似たところがある。

- どれも変換である (全単射で逆写像がある)。
- (少し式を直すと) 内積を保つ (ユニタリ変換)。

7 畳み込み 7.1 はじめに

色々な関数 (連続信号, 離散信号) f, g に対して、**畳み込み** $f * g$ が定義できる。
 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次式で定める。

$$(7) \quad f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}).$$

周期 2π の関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次式で定める。

$$(8) \quad f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を次式で定める。

$$(9) \quad f * g(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

周期 N の関数 $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を次式で定める。

$$(10) \quad f * g(n) := \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

7.1 はじめに

畳み込みは、素性の良さそうな性質を持ち、ある種の積であると考えられる (詳しいことは略)。

$$(11) \quad f * g = g * f, \quad (\text{交換法則})$$

$$(12) \quad (f * g) * h = f * (g * h), \quad (\text{結合法則})$$

$$(13) \quad (f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g, \quad (\text{分配法則, 線形性 (i)})$$

$$(14) \quad (cf) * g = c(f * g) \quad (\text{線形性 (ii)})$$

$$(15) \quad [f \neq 0 \quad \wedge \quad f * g = f * h] \Rightarrow g = h \quad (\text{零因子の非存在})$$

7.1 はじめに

畳み込みと Fourier 解析との関係では、次が重要である。

- ① 畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積に移る。

$$(16) \quad \mathcal{F}[f * g] = \text{定数} \times \mathcal{F}f \mathcal{F}g.$$

(定数が何になるかは、畳み込みや Fourier 変換の定義の流儀による。)

- ② 畳み込みには、単位元 (もどき) “デルタ” δ がある。

$$(17) \quad f * \delta = f.$$

- 連続信号に対しては、 δ はディラックのデルタ超関数 (普通の関数の範囲をはみ出してしまうので少し扱いにくい)
 - 離散信号に対しては、 $\delta = \{\delta_{n0}\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\dots, 0, 0, \underset{n=0}{1}, 0, 0, \dots\}$ (単位インパルス)
- ③ デルタ δ の Fourier 変換は定数関数 1 である。また定数関数 1 の Fourier 変換は δ である。

$$(18) \quad \mathcal{F}\delta = \text{定数} \times 1, \quad \mathcal{F}1 = \text{定数} \times \delta.$$

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。(2014～).