信号処理とフーリエ変換 第11回
～サンプリング定理, 離散時間 Fourier 変換, 畳み込み～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年12月9日

目次

本日の内容・連絡事項

- サンプリング定理、離散時間 Fourier 変換の手短な紹介をし、これまでに現れた“4 つの Fourier 変換” を振り返る。Fourier 変換で重要な畳み込みの説明を始める。
(講義ノート [1] の §5, 6, 7 に該当する。)
- 本日 (2020/12/9) 中にレポート課題 2 を発表する。締め切りは 2021/1/12. なるべく今年のうちに質問を済ませること (12/9, 12/14, 12/16, 12/21 にオフィスアワーがある)。

連続信号 $x(t)$ をサンプリングして、離散信号 $\{x(nT_s)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を取り出すことにより、元の信号の情報がどれくらい失われるのか、どのくらい保存されているのか、これは重要な問題である。

5 サンプリング定理　5.1 はじめに

連続信号 $x(t)$ をサンプリングして、離散信号 $\{x(nT_s)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を取り出すことにより、元の信号の情報がどれくらい失われるのか、どのくらい保存されているのか、これは重要な問題である。

この問題は、離散 Fourier 変換でも考えたが (定理 7.3)、ここでは周期関数でない $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の Fourier 変換に関する、有名なサンプリング定理 (定理 11.2) を紹介する。その結論を大まかに述べると、ある周波数以上の周波数成分の含まれていない信号は、2 倍のサンプリング周波数でサンプリングした (サンプリング・) データから再現できる、という内容である。

5 サンプリング定理　5.1 はじめに

連続信号 $x(t)$ をサンプリングして、離散信号 $\{x(nT_s)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を取り出すことにより、元の信号の情報がどれくらい失われるのか、どのくらい保存されているのか、これは重要な問題である。

この問題は、離散 Fourier 変換でも考えたが (定理 7.3)、ここでは周期関数でない $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の Fourier 変換に関する、有名なサンプリング定理 (定理 11.2) を紹介する。その結論を大まかに述べると、ある周波数以上の周波数成分の含まれていない信号は、2 倍のサンプリング周波数でサンプリングした (サンプリング・) データから再現できる、という内容である。

(少し違う表現をすると — 信号に含まれる最大周波数の 2 倍より高いサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号を復元できる。)

連続信号 $x(t)$ をサンプリングして、離散信号 $\{x(nT_s)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を取り出すことにより、元の信号の情報がどれくらい失われるのか、どのくらい保存されているのか、これは重要な問題である。

この問題は、離散 Fourier 変換でも考えたが (定理 7.3)、ここでは周期関数でない $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の Fourier 変換に関する、有名なサンプリング定理 (定理 11.2) を紹介する。その結論を大まかに述べると、ある周波数以上の周波数成分の含まれていない信号は、2 倍のサンプリング周波数でサンプリングした (サンプリング・) データから再現できる、という内容である。

(少し違う表現をすると — 信号に含まれる最大周波数の 2 倍より高いサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号を復元できる。)

個人的には、定理 11.2 は確かに正しい命題であるが、応用するにあたって、かなり不自然な内容である (現実との距離が大きすぎる) と考えている。

言いそびれたこと

離散 Fourier 変換のところで、周期的な信号の再現についての定理を紹介した。最大周波数の 2 倍を超えるサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号が復元可能である、という十分性を示す内容であったが、一方で必要性を示唆する次の事実も紹介しておくべきだった。

言いそびれたこと

離散 Fourier 変換のところで、周期的な信号の再現についての定理を紹介した。最大周波数の 2 倍を超えるサンプリング周波数でサンプリングすれば、元の信号が復元可能である、という十分性を示す内容であったが、一方で必要性を示唆する次の事実も紹介しておくべきだった。

注意 11.1 (最大周波数のぴったり 2 倍では不足)

例えば周波数 f の正弦波 $x(t)=A\sin(2\pi ft)$ に対して、サンプリング周波数 $f_s=2f$ でサンプリングすると、サンプリング周期は $T_s=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{2f}$.

$$x(nT_s)=A\sin\left(2\pi f\cdot nT_s\right)=A\sin\left(2\pi f\cdot n\frac{1}{2f}\right)=A\sin(n\pi)=0\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

何とサンプリングしたデータ $\{x(nT_s)\}$ は零数列である。当然復元は不可能である。 □

定理 11.2 (サンプリング定理, Nyquist, Shannon, 染谷)

関数 $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の Fourier 変換

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

が

$$(\exists W > 0)(\forall \omega \in \mathbb{R} : |\omega| \geq W) \quad X(\omega) = 0$$

を満たすならば、このような W を任意に一つ取って

$$T := \frac{\pi}{W}$$

とおくとき、次式が成り立つ。

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left[\pi(t/T - n)\right].$$

ただし $\operatorname{sinc} x := \dfrac{\sin x}{x}$.

5.2 サンプリング定理と証明

つまり、$\dfrac{W}{2\pi}$ 以上の周波数成分を含まない信号は、サンプリング周波数 $f_s := \dfrac{1}{T} = \dfrac{W}{\pi}$ $(= 2 \times \frac{W}{2\pi})$ でサンプリングした離散信号から復元できる。

言い換えると、f 以上の周波数成分を含まない信号は、サンプリング周波数 $2f$ でサンプリングしたデータから復元できる。

5.2 サンプリング定理と証明

証明　Fourier 変換の反転公式

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (t\in\mathbb{R})$$

に仮定「$|\omega|\geq W \Rightarrow X(\omega)=0$」を適用すると

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-W}^{W}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (t\in\mathbb{R}). \tag{1}$$

この式は周期 $2W$ の関数の Fourier 係数の式に似ている。

5.2 サンプリング定理と証明

証明　Fourier 変換の反転公式

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega\quad(t\in\mathbb{R})$$

に仮定「$|\omega|\geq W\Rightarrow X(\omega)=0$」を適用すると

$$(1)\qquad x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-W}^{W}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega\quad(t\in\mathbb{R}).$$

この式は周期 $2W$ の関数の Fourier 係数の式に似ている。

周期 $2W$ の関数 X の Fourier 級数

$$c_n:=\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}X(\omega)e^{-in\frac{2\pi}{2W}\omega}d\omega=\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}X(\omega)e^{-inT\omega}d\omega\quad\left(T=\frac{\pi}{W}\text{ を代入}\right)$$

とおくとき

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{+in\frac{2\pi}{2W}\omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{+inT\omega}\quad(\omega\in\mathbb{R}).$$

これから、

(2) $$c_n := \frac{1}{2W}\int_{-W}^{W} X(\omega)e^{+inT\omega}d\omega$$

とおくとき

(3) $$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inT\omega} \quad (|\omega| \le W).$$

(X の、$[-W, W]$ の外での値を定義し直して、周期 $2W$ の関数としてから Fourier 級数展開した、と考える。)
(1) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-W}^{W} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ と (2) を見比べて、

(4) $$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega(nT)}d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W}x(nT) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}x(nT).$$

5 サンプリング定理　証明 (続き)

(3), (4) を (1) に代入すると

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^{W} \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-in\omega T} e^{i\omega t} d\omega \right) \\
&= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-W}^{W} e^{i\omega(t-nT)} d\omega \\
&= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot 2W \operatorname{sinc}(W(t-nT)) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(W(t-nT)).
\end{aligned}
$$

ここで $\int_{-a}^{a} e^{ibx}\, dx = 2a \operatorname{sinc}(ab)$ $(a > 0,\ b \neq 0)$ を用いた。また

$$
W(t-nT) = \frac{\pi}{T}(t-nT) = \pi\left(\frac{t}{T} - n\right)
$$

であるから

$$
x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(\pi(t/T - n)). \quad \square
$$

ファミリーの最後のメンバー、離散時間 Fourier 変換を紹介する。実は、Fourier 級数の理論で本質的には済んでいる。

ファミリーの最後のメンバー、離散時間 Fourier 変換を紹介する。実は、Fourier 級数の理論で本質的には済んでいる。

整数を添字に持つ複素数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を**離散信号** という (Cf. サンプリング定理)。これは $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ という写像とみなせる。$f(n)=f_n$ ということ。

ファミリーの最後のメンバー、離散時間 Fourier 変換を紹介する。実は、Fourier 級数の理論で本質的には済んでいる。

整数を添字に持つ複素数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を**離散信号**という (Cf. サンプリング定理)。これは $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ という写像とみなせる。$f(n)=f_n$ ということ。

離散信号全体の集合を $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ と表す。

$f=\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して、

$$\mathscr{F}f(\omega)=\widehat{f}(\omega):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}\quad(\omega\in\mathbb{R}) \tag{5}$$

で定まる関数 $\mathscr{F}f$ を f の**離散時間 Fourier 変換** (discrete-time Fourier transform) と呼ぶ。

$\widehat{f}$ は周期 2π の関数である (確認しよう！)。ゆえに $\omega\in[0,2\pi]$ あるいは $\omega\in[-\pi,\pi]$ で考えれば十分である。

ファミリーの最後のメンバー、離散時間 Fourier 変換を紹介する。実は、Fourier 級数の理論で本質的には済んでいる。

整数を添字に持つ複素数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を**離散信号** という (Cf. サンプリング定理)。これは $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ という写像とみなせる。$f(n)=f_n$ ということ。

離散信号全体の集合を $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ と表す。

$f=\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して、

$$\mathscr{F}f(\omega)=\widehat{f}(\omega):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}\quad(\omega\in\mathbb{R}) \tag{5}$$

で定まる関数 $\mathscr{F}f$ を f の**離散時間 Fourier 変換** (discrete-time Fourier transform) と呼ぶ。

$\widehat{f}$ は周期 2π の関数である (確認しよう！)。ゆえに $\omega\in[0,2\pi]$ あるいは $\omega\in[-\pi,\pi]$ で考えれば十分である。

反転公式は

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(\omega)e^{in\omega}\,d\omega\quad(n\in\mathbb{Z}). \tag{6}$$

6.1 離散時間 Fourier 変換の定義と反転公式

6.1 離散時間 Fourier 変換の定義と反転公式

証明 1　$f(n)$ は $\widehat{f}$ の第 $(-n)$ 番目の Fourier 係数と分かる。

Cf. 普通の Fourier 級数

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 周期 2π に対し、$c_n := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ とおくと $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

6.1 離散時間 Fourier 変換の定義と反転公式

証明 1　$f(n)$ は $\widehat{f}$ の第 $(-n)$ 番目の Fourier 係数と分かる。

Cf. 普通の Fourier 級数

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 周期 2π に対し、$c_n := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$ とおくと $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

証明 2　$\{e^{-in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は直交系である。実際 $m\neq n$ のとき

$$\left(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)\omega}d\omega = 0.$$

$m = n$ のとき

$$\left(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}\right) = \left(e^{-in\omega}, e^{-in\omega}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi.$$

ゆえに (5) は、直交系 $e^{-in\omega}$ による $\widehat{f}$ の展開であるから、その係数 $f(n)$ は

$$f(n) = \frac{\left(\widehat{f}, e^{-in\omega}\right)}{\left(e^{-in\omega}, e^{-in\omega}\right)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(\omega)e^{in\omega}\,d\omega. \quad \square$$

6.2 Fourier ファミリーの一覧表

これまでに出て来た、Fourier 変換、Fourier 級数 (Fourier 係数)、離散時間 Fourier 変換、離散 Fourier 変換の一覧表を作って整理してみよう。

6.2 Fourier ファミリーの一覧表

これまでに出て来た、Fourier 変換、Fourier 級数 (Fourier 係数)、離散時間 Fourier 変換、離散 Fourier 変換の一覧表を作って整理してみよう。

対象	操作の名前	変換の定義式	反転公式
$\mathbb{R}$ 上の関数	Fourier 変換	$\widehat{f}(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi\in\mathbb{R})$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$
$\mathbb{R}$ 上の周期関数	Fourier 係数	$c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad (n\in\mathbb{Z})$	$f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$
$\mathbb{Z}$ 上の関数 (離散信号)	離散時間 Fourier 変換	$\widehat{f}(\omega)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega\in[0,2\pi])$	$f(n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\widehat{f}(\omega)e^{in\omega}\,d\omega$
$\mathbb{Z}$ 上の周期関数 (周期的離散信号)	離散 Fourier 変換	$C_n=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} f_j\omega^{-nj} \quad (0\le n\le N-1),$ $\omega:=\exp\dfrac{2\pi i}{N}$	$f_j=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} C_n\omega^{nj}$

しばらく観賞。式が良く似ていることに注目 (“$\int$ は $\sum$ の親戚”)。

6.2 Fourier ファミリーの一覧表

これまでに出て来た、Fourier 変換、Fourier 級数 (Fourier 係数)、離散時間 Fourier 変換、離散 Fourier 変換の一覧表を作って整理してみよう。

対象	操作の名前	変換の定義式	反転公式
$\mathbb{R}$ 上の関数	Fourier 変換	$\widehat{f}(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}\,dx\quad(\xi\in\mathbb{R})$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$
$\mathbb{R}$ 上の周期関数	Fourier 係数	$c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}\,dx\quad(n\in\mathbb{Z})$	$f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$
$\mathbb{Z}$ 上の関数 (離散信号)	離散時間 Fourier 変換	$\widehat{f}(\omega)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}\quad(\omega\in[0,2\pi])$	$f(n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\widehat{f}(\omega)e^{in\omega}\,d\omega$
$\mathbb{Z}$ 上の周期関数 (周期的離散信号)	離散 Fourier 変換	$C_n=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}f_j\omega^{-nj}\quad(0\le n\le N-1),$ $\omega:=\exp\dfrac{2\pi i}{N}$	$f_j=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}C_n\omega^{nj}$

しばらく観賞。式が良く似ていることに注目 (“$\int$ は $\sum$ の親戚”)。

その気になれば、もっと似せることも出来る。

- c_n, C_n を $\widehat{f}(n)$ と書くとか (実際そうすることもある)。
- $\dfrac{1}{2\pi}$ を 2 つの $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ に分けるとか。$\dfrac{1}{N}$ を 2 つの $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ に分けるとか。
- 離散 Fourier 変換で、ω を $e^{2\pi i/N}$ で書くとか。
- 名前のつけ方もやり直すとか。

6.2 Fourier ファミリーの一覧表

写像の性質も似たところがある。

- どれも変換である (全単射で逆写像がある)。
- (少し式を直すと) 内積を保つ (ユニタリ変換)。

色々な関数 (連続信号, 離散信号) f, g に対して、**畳み込み** $f * g$ が定義できる。

色々な関数 (連続信号, 離散信号) f, g に対して、**畳み込み** $f * g$ が定義できる。

$f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、$f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を次式で定める。

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{7}$$

周期 2π の関数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、$f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を次式で定める。

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{8}$$

$f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ に対して、$f * g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を次式で定める。

$$f * g(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{9}$$

周期 N の関数 $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ に対して、$f * g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を次式で定める。

$$f * g(n) := \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{10}$$

7.1 はじめに

畳み込みは、素性の良さそうな性質を持ち、ある種の積であると考えられる (詳しいことは略)。

$$f * g = g * f, \qquad \text{(交換法則)} \tag{11}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h), \qquad \text{(結合法則)} \tag{12}$$

$$(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g, \qquad \text{(分配法則, 線形性 (i))} \tag{13}$$

$$(cf) * g = c(f * g) \qquad \text{(線形性 (ii))} \tag{14}$$

$$[f \neq 0 \quad \wedge \quad f * g = f * h] \quad \Rightarrow \quad g = h \qquad \text{(零因子の非存在)} \tag{15}$$

7.1 はじめに

畳み込みと Fourier 解析との関係では、次が重要である。

7.1 はじめに

畳み込みと Fourier 解析との関係では、次が重要である。

1. 畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積に移る。

$$\mathscr{F}[f * g] = 定数 \times \mathscr{F}f\mathscr{F}g. \tag{16}$$

   (定数が何になるかは、畳み込みや Fourier 変換の定義の流儀による。)

7.1 はじめに

畳み込みと Fourier 解析との関係では、次が重要である。

1. 畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積に移る。

$$\mathscr{F}[f * g] = \text{定数} \times \mathscr{F} f \mathscr{F} g. \tag{16}$$

(定数が何になるかは、畳み込みや Fourier 変換の定義の流儀による。)

2. 畳み込みには、単位元 (もどき) "デルタ" δ がある。

$$f * \delta = f. \tag{17}$$

- 連続信号に対しては、δ はディラックのデルタ超関数 (普通の関数の範囲をはみ出してしまうので少し扱いにくい)
- 離散信号に対しては、$\delta = \{\delta_{n0}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\cdots, 0, 0, \underset{n=0}{1}, 0, 0, \cdots\right\}$ (単位インパルス)

7.1 はじめに

畳み込みと Fourier 解析との関係では、次が重要である。

1. 畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積に移る。

$$\mathscr{F}[f * g] = \text{定数} \times \mathscr{F}f\mathscr{F}g. \tag{16}$$

(定数が何になるかは、畳み込みや Fourier 変換の定義の流儀による。)

2. 畳み込みには、単位元 (もどき) “デルタ” δ がある。

$$f * \delta = f. \tag{17}$$

- 連続信号に対しては、δ はディラックのデルタ超関数 (普通の関数の範囲をはみ出してしまうので少し扱いにくい)
- 離散信号に対しては、$\delta = \{\delta_{n0}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\cdots, 0, 0, \underset{n=0}{1}, 0, 0, \cdots\right\}$ (単位インパルス)

3. デルタ δ の Fourier 変換は定数関数 1 である。また定数関数 1 の Fourier 変換は δ である。

$$\mathscr{F}\delta = \text{定数} \times 1, \quad \mathscr{F}1 = \text{定数} \times \delta. \tag{18}$$

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).