信号処理とフーリエ変換 第 8 回

～離散 Fourier 変換 (1)～

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2020 年 11 月 18 日

目次

本日の内容・連絡事項

- これから 3 回、**離散 Fourier 変換**を説明する。今回は離散 Fourier 係数を説明する。周期関数をサンプリングしたデータから Fourier 係数を近似的に求めたものが、離散 Fourier 係数で、それを求めるのが離散 Fourier 変換とみなせる。離散フーリエ係数の基本的な性質と、Fourier 係数に関するサンプリング定理を紹介する。講義ノート [1] の §3.1 まで。

3 離散 Fourier 変換

これから説明する**離散 Fourier 変換**は、Fourier 級数の話の離散化とみなすことができる。

3 離散 Fourier 変換

これから説明する**離散 Fourier 変換**は、Fourier 級数の話の離散化とみなすことができる。実際にデータ処理する場合はサンプリングした離散データを扱わざるを得ず、離散 Fourier 変換の応用上の重要性はとても高い。

3 離散 Fourier 変換

これから説明する**離散 Fourier 変換**は、Fourier 級数の話の離散化とみなすことができる。実際にデータ処理する場合はサンプリングした離散データを扱わざるを得ず、離散 Fourier 変換の応用上の重要性はとても高い。

一方、離散 Fourier 変換は、周期数列についての Fourier 変換であり、Fourier 級数の近似理論にとどまらない意味を持っている。

3 離散 Fourier 変換

これから説明する**離散 Fourier 変換**は、Fourier 級数の話の離散化とみなすことができる。実際にデータ処理する場合はサンプリングした離散データを扱わざるを得ず、離散 Fourier 変換の応用上の重要性はとても高い。

一方、離散 Fourier 変換は、周期数列についての Fourier 変換であり、Fourier 級数の近似理論にとどまらない意味を持っている。

§2 (普通の Fourier 変換) もそうであったが、複素指数関数のみで説明する (あまり時間に余裕がなく、式を短く書きたいので、三角関数バージョンの説明はサボる)。

3.1 離散 Fourier 係数　サンプリング

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は周期 T とする。f がある程度滑らかならば [1]、次式が成り立つ。

(1)
$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x\in\mathbb{R}),$$

(2)
$$c_n := \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

[1] これまでは原点について対称な区間での積分 $c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$ で表していた。

3.1 離散 Fourier 係数　サンプリング

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 T とする。f がある程度滑らかならば[1]、次式が成り立つ。

(1)
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

(2)
$$c_n := \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

次式で $\{x_j\}$, $\{f_j\}$ を定める。$x_0, x_1, \cdots, x_N$ は $[0, T]$ の N 等分点となる。

(3)
$$h := \frac{T}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

[1] これまでは原点について対称な区間での積分 $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$ で表していた。

3.1 離散 Fourier 係数　サンプリング

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 T とする。f がある程度滑らかならば[1]、次式が成り立つ。

(1) $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

(2) $$c_n := \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

次式で $\{x_j\}$, $\{f_j\}$ を定める。$x_0, x_1, \cdots, x_N$ は $[0, T]$ の N 等分点となる。

(3) $$h := \frac{T}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

f が周期 T であることから ($x_{j+N} = x_j + T$ なので)

(4) $$f_{j+N} = f_j \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

すなわち $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は周期 N の周期数列である。

[1] これまでは原点について対称な区間での積分 $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$ で表していた。

3.1 離散 Fourier 係数　サンプリング

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 T とする。f がある程度滑らかならば[1]、次式が成り立つ。

(1)
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

(2)
$$c_n := \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

次式で $\{x_j\}$, $\{f_j\}$ を定める。$x_0, x_1, \cdots, x_N$ は $[0, T]$ の N 等分点となる。

(3)
$$h := \frac{T}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

f が周期 T であることから ($x_{j+N} = x_j + T$ なので)

(4)
$$f_{j+N} = f_j \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

すなわち $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は周期 N の周期数列である。

信号処理では、f を (連続) 信号、x_j を**標本点**、h を**サンプリング周期** (標本化周期, sampling period)、$1/h$ を**サンプリング周波数** (標本化周波数, sample rate, sampling rate) と呼ぶ。また、信号を測定して $\{f_j\}$ を得ることを**サンプリング** (標本化) と呼ぶ。

[1] これまでは原点について対称な区間での積分 $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$ で表していた。

Fourier 係数 c_n を知りたいとき、$\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ を用いて近似値を計算することを考える。

どのように計算するのが良いか。

3.1 離散 Fourier 係数　周期積分は台形公式で計算すべし

Fourier 係数 c_n を知りたいとき、$\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ を用いて近似値を計算することを考える。

どのように計算するのが良いか。結論を天下りに述べると

周期関数の 1 周期区間における積分の計算には台形則がベスト
(正しい意味でベスト。しばしば驚異的な高精度が達成される。)

(これは数値解析の常識であるが、説明は省略する。)

$F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ の定積分

$$I = \int_a^b F(x)\,dx$$

に対して

$$(5) \qquad I_N := h\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{F(x_{j-1})+F(x_j)}{2}\right) = h\left(\frac{F_0}{2}+\sum_{j=1}^{N-1}F_j+\frac{F_N}{2}\right)$$

をその近似値として採用するのが (複合) **台形公式**である。ただし

$$(6) \qquad h := \frac{b-a}{N}, \quad x_j := a+jh, \quad F_j := F(x_j) \quad (j=0,1,\cdots,N).$$

$F\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ の定積分

$$I=\int_a^b F(x)\,dx$$

に対して

$$\text{(5)}\qquad I_N := h\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{F(x_{j-1})+F(x_j)}{2}\right)=h\left(\frac{F_0}{2}+\sum_{j=1}^{N-1}F_j+\frac{F_N}{2}\right)$$

をその近似値として採用するのが (複合) **台形公式**である。ただし

$$\text{(6)}\qquad h:=\frac{b-a}{N},\quad x_j:=a+jh,\quad F_j:=F(x_j)\quad (j=0,1,\cdots,N).$$

F が周期 $b-a$ であれば、$F(a)=F(b)$ であるから $F_0=F_N$. ゆえに次式が成り立つ:

$$\text{(7)}\qquad I_N=h\sum_{j=0}^{N-1}F_j=h\sum_{j=1}^{N}F_j.$$

$F(x) := \frac{1}{T} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}$ の積分に台形則を適用して、c_n を近似計算したものを C_n (大文字表記) とする:

$$C_n := \frac{1}{T} \cdot h \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j}. \tag{8}$$

$F(x) := \frac{1}{T} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}$ の積分に台形則を適用して、c_n を近似計算したものを C_n (大文字表記) とする:

(8)
$$C_n := \frac{1}{T} \cdot h \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j}.$$

(9)
$$\omega := e^{i\frac{2\pi}{T}h} = e^{\frac{2\pi i}{N}} \quad \left(\because \frac{h}{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{N} = \frac{1}{N}\right)$$

とおくと
$$e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j} = e^{-in\frac{2\pi}{T}\cdot jh} = e^{-inj\frac{2\pi}{N}} = \omega^{-nj}.$$

ゆえに

(10)
$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}.$$

この C_n を f の**離散 Fourier 係数**と呼ぶ。

補題 7.1 (1 の N 乗根の性質)

$N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$ とおくとき、次の (1), (2) が成り立つ。

補題 7.1 (1 の N 乗根の性質)

$N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$ とおくとき、次の (1), (2) が成り立つ。

1. $1 \le m \le N-1$ ならば $\omega^m \ne 1$, $\omega^N = 1$　(ω は 1 の原始 N 乗根).
   (ゆえに $m \equiv 0 \pmod{N}$ ならば $\omega^m = 1$, そうでないならば $\omega^m \ne 1$.)

補題 7.1 (1 の N 乗根の性質)

$N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$ とおくとき、次の (1), (2) が成り立つ。

1. $1 \le m \le N-1$ ならば $\omega^m \ne 1$, $\omega^N = 1$　(ω は 1 の原始 N 乗根).
   (ゆえに $m \equiv 0 \pmod{N}$ ならば $\omega^m = 1$, そうでないならば $\omega^m \ne 1$.)
2. 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \begin{cases} N & (m \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

証明.

3.1 離散 Fourier 係数　準備: 1 の原始 N 乗根 ω の性質

補題 7.1 (1 の N 乗根の性質)

$N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$ とおくとき、次の (1), (2) が成り立つ。

1. $1 \le m \le N-1$ ならば $\omega^m \ne 1$, $\omega^N = 1$ (ω は 1 の原始 N 乗根).
   (ゆえに $m \equiv 0 \pmod N$ ならば $\omega^m = 1$, そうでないならば $\omega^m \ne 1$.)
2. 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \begin{cases} N & (m \equiv 0 \pmod N) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

証明.

1. (常識的だけれど一応) $\theta := \frac{2\pi}{N}$ とおくと、$\omega = e^{i\theta}$, $\omega^m = e^{im\theta}$. $1 \le m \le N-1$ ならば $0 < m\theta < 2\pi$ であるから、$\omega^m = e^{im\theta} \ne 1$. $\omega^N = e^{iN\theta} = e^{2\pi i} = 1$.

補題 7.1 (1 の N 乗根の性質)

$N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$ とおくとき、次の (1), (2) が成り立つ。

1. $1 \le m \le N-1$ ならば $\omega^m \ne 1$, $\omega^N = 1$ (ω は 1 の原始 N 乗根).
   (ゆえに $m \equiv 0 \pmod N$ ならば $\omega^m = 1$, そうでないならば $\omega^m \ne 1$.)
2. 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \begin{cases} N & (m \equiv 0 \pmod N) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

証明.

1. (常識的だけれど一応) $\theta := \frac{2\pi}{N}$ とおくと、$\omega = e^{i\theta}$, $\omega^m = e^{im\theta}$. $1 \le m \le N-1$ ならば $0 < m\theta < 2\pi$ であるから、$\omega^m = e^{im\theta} \ne 1$. $\omega^N = e^{iN\theta} = e^{2\pi i} = 1$.
2. $m \equiv 0 \pmod N$ であれば、$\omega^m = 1$ であるから $\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \sum_{j=0}^{N-1} 1 = N$.　(続く)

□

証明 (続き).

$m \equiv 0 \pmod N$ でなければ、$\omega^m \neq 1$. 初項 1, 公比 ω^m の等比級数の和であるから

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\omega^{mN}\right)}{1 - \omega^m} = \frac{1 - \left(\omega^N\right)^m}{1 - \omega^m} = \frac{1 - 1}{1 - \omega^m} = 0.$$

□

定理 7.2 (離散 Fourier 係数の性質)

周期 T の周期関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$h := \frac{T}{N}, \quad \omega := e^{2\pi i/N}, \quad x_j := jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

$$C_n := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

により $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定めるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

定理 7.2 (離散 Fourier 係数の性質)

周期 T の周期関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ と $N\in\mathbb{N}$ に対して

$$h := \frac{T}{N},\quad \omega := e^{2\pi i/N},\quad x_j := jh,\quad f_j := f(x_j)\quad (j\in\mathbb{Z}),$$

$$C_n := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\omega^{-nj}\quad (n\in\mathbb{Z})$$

により $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定めるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

1. $\{C_n\}_n$ は周期 N の周期数列である: $C_{n+N}=C_n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

定理 7.2 (離散 Fourier 係数の性質)

周期 T の周期関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$h := \frac{T}{N}, \quad \omega := e^{2\pi i/N}, \quad x_j := jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

$$C_n := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

により $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定めるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

1. $\{C_n\}_n$ は周期 N の周期数列である: $C_{n+N} = C_n$ $(n \in \mathbb{Z})$.
2. f の複素 Fourier 係数 c_n が $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ を満たすならば、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$C_n = \sum_{m\equiv n} c_m \quad \left(= \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{n+pN}\right). \tag{11}$$

$\displaystyle\sum_{m\equiv n}$ は、$m \equiv n \pmod N$ を満たすすべての m についての和を意味する。

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ という条件は、例えば f が連続で区分的に C^1 級であれば満たされる。

証明.

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ という条件は、例えば f が連続で区分的に C^1 級であれば満たされる。

証明.

1. $\omega^{-(n+N)j} = \omega^{-nj}\omega^{-Nj} = \omega^{-nj}$ であるから $C_{n+N} = C_n$.

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ という条件は、例えば f が連続で区分的に C^1 級であれば満たされる。

証明.

1. $\omega^{-(n+N)j} = \omega^{-nj}\omega^{-Nj} = \omega^{-nj}$ であるから $C_{n+N} = C_n$.
2. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$ であるから

$$f_j = f(x_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}j\frac{T}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \omega^{nj}. \tag{12}$$

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|<\infty$ という条件は、例えば f が連続で区分的に C^1 級であれば満たされる。

証明.

1. $\omega^{-(n+N)j}=\omega^{-nj}\omega^{-Nj}=\omega^{-nj}$ であるから $C_{n+N}=C_n$.
2. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$ であるから

$$f_j=f(x_j)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x_j}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\frac{2\pi}{T}j\frac{T}{N}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\omega^{nj}. \tag{12}$$

ゆえに (絶対収束することに注意して)

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}f_j\omega^{-nj}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\omega^{-nj}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\omega^{mj}\right)\\&=\frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{(m-n)j}=\frac{1}{N}\sum_{m\equiv n}c_mN=\sum_{m\equiv n}c_m.\end{aligned}$$

定理 7.2 の (1) から、$\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を求めよ、と要求されたとき、連続した N 項、例えば

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{pmatrix}$$

を計算すれば十分である。

"入力" $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ についても同様で、例えば

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

があれば十分である。

問題の舞台は $\mathbb{C}^N$ ということになる。

3.2 Fourier 係数のサンプリング定理

C_n は c_n を近似するように定めたが、本当にそうか？答えは、 “In a sense, Yes. But, ...”

定理 7.3 (Fourier 係数 (周期関数に対する Fourier 変換) に関するサンプリング定理)

周期 T の関数 $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が、有限 Fourier 級数

$$u(t) = \sum_{n=-M}^{M} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

で表せるとき、すなわち u の Fourier 係数 $\{c_n\}$ について

$$|n| > M \quad \Rightarrow \quad c_n = 0$$

が成り立つとき、$N > 2M$ を満たす N に対して、$\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ は、

$$(\bigstar) \qquad \begin{aligned} C_n &= c_n \quad (0 \le n \le M), \\ C_{N-n} &= c_{-n} \quad (1 \le n \le M), \\ C_n &= 0 \quad (M < n < N-M) \end{aligned}$$

を満たす。(特に、全ての (0 でない) Fourier 係数 $\{c_n\}_{n=-M}^{M}$ は、離散 Fourier 係数 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ から求まる。ゆえに $u(t)$ も完全に再現できる。)

3.2 Fourier 係数のサンプリング定理　vs. 通常のサンプリング定理

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

3.2 Fourier 係数のサンプリング定理　vs. 通常のサンプリング定理

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

通常、サンプリング定理と呼ばれるのは、(普通の Fourier 変換に関する) 別の定理であるが、上の定理 7.3 はそれに近い内容を持っている。(個人的な意見になるが、定理 7.3 の方が現実の (音などの) 現象の説明に便利である。この辺は “通常のサンプリング定理” を紹介したときに再び取り上げよう。)

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

通常、サンプリング定理と呼ばれるのは、(普通の Fourier 変換に関する) 別の定理であるが、上の定理 7.3 はそれに近い内容を持っている。(個人的な意見になるが、定理 7.3 の方が現実の (音などの) 現象の説明に便利である。この辺は "通常のサンプリング定理" を紹介したときに再び取り上げよう。)

仮定の自然さについて: Riemann-Lebesgue の定理から、

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$$

であるから、$|n|$ が大きいとき $|c_n|$ が小さいと期待するのは、それなりにもっともである。

3.2 Fourier 係数のサンプリング定理　vs. 通常のサンプリング定理

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

通常、サンプリング定理と呼ばれるのは、(普通の Fourier 変換に関する) 別の定理であるが、上の定理 7.3 はそれに近い内容を持っている。(個人的な意見になるが、定理 7.3 の方が現実の (音などの) 現象の説明に便利である。この辺は "通常のサンプリング定理" を紹介したときに再び取り上げよう。)

仮定の自然さについて: Riemann-Lebesgue の定理から、

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$$

であるから、$|n|$ が大きいとき $|c_n|$ が小さいと期待するのは、それなりにもっともである。

しかし、上の定理のように、$|n|$ が大きいとき $c_n = 0$ としてしまうと、f は実解析的となり、非常になめらかな関数ということになる。これは極端かもしれない。不連続関数にも使えるのが Fourier 級数の良いところだったのでは？

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

通常、サンプリング定理と呼ばれるのは、(普通の Fourier 変換に関する) 別の定理であるが、上の定理 7.3 はそれに近い内容を持っている。(個人的な意見になるが、定理 7.3 の方が現実の (音などの) 現象の説明に便利である。この辺は "通常のサンプリング定理" を紹介したときに再び取り上げよう。)

仮定の自然さについて: Riemann-Lebesgue の定理から、

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$$

であるから、$|n|$ が大きいとき $|c_n|$ が小さいと期待するのは、それなりにもっともである。

しかし、上の定理のように、$|n|$ が大きいとき $c_n = 0$ としてしまうと、f は実解析的となり、非常になめらかな関数ということになる。これは極端かもしれない。不連続関数にも使えるのが Fourier 級数の良いところだったのでは？

(信号処理分野の人は、小さいことと 0 であることの差をおおらかに考えているのかもしれないが、無限がからむので、そんなに簡単ではないのでは$\cdots$)

定理 7.3 の証明を書く前に、具体的な M, N に対して主張を確認すると、カラクリが見えてくる (と思う)。

$M = 1$ (つまり $|n| > 1 \Rightarrow c_n = 0$), $N = 10$ の場合、

定理 7.3 の証明を書く前に、具体的な M, N に対して主張を確認すると、カラクリが見えてくる (と思う)。

$M = 1$ (つまり $|n| > 1 \Rightarrow c_n = 0$), $N = 10$ の場合、

$$C_0 = \sum_{m \equiv 0} c_m = c_0 + c_{10} + c_{-10} + c_{20} + c_{-20} + c_{30} + \cdots = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0,$$

$$C_1 = \sum_{m \equiv 1} c_m = c_1 + c_{-9} + c_{11} + c_{-19} + c_{21} + \cdots = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1,$$

$$C_9 = \sum_{m \equiv 9} c_m = c_9 + c_{-1} + c_{19} + c_{-11} + c_{29} + c_{-21} + \cdots = 0 + c_{-1} + 0 + 0 + \cdots = c_{-1},$$

$$C_2 = \sum_{m \equiv 2} c_m = c_2 + c_{-8} + c_{12} + c_{-18} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

$$C_8 = \sum_{m \equiv 8} c_m = c_8 + c_{-2} + c_{18} + c_{-12} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

同様にして $2 \le n \le 8$ に対して、 $C_n = 0$ が得られる。

0 でない c_n は、$c_0 = C_0$, $c_1 = C_1$, $c_{-1} = C_9$ と求まる。

一方、$M = 5$ (つまり $|n| > 5 \Rightarrow c_n = 0$), $N = 10$ の場合は

$$C_0 = \sum_{m\equiv 0} c_m = c_0 + c_{-10} + c_{20} + c_{-20} + c_{30} + \cdots = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0,$$

$$C_1 = \sum_{m\equiv 1} c_m = c_1 + c_{-9} + c_{11} + c_{-19} + c_{21} + \cdots = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1,$$

$$C_9 = \sum_{m\equiv 9} c_m = c_9 + c_{-1} + c_{19} + c_{-11} + c_{29} + c_{-21} + \cdots = 0 + c_{-1} + 0 + 0 + \cdots = c_{-1},$$

$$C_2 = \sum_{m\equiv 2} c_m = c_2 + c_{-8} + c_{12} + c_{-18} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = c_2,$$

$$C_8 = \sum_{m\equiv 8} c_m = c_8 + c_{-2} + c_{18} + c_{-12} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = c_{-2},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$C_4 = \sum_{m\equiv 4} c_m = c_4 + c_{-6} + c_{14} + c_{-16} + \cdots = c_4 + 0 + 0 + \cdots = c_4,$$

$$C_6 = \sum_{m\equiv 6} c_m = c_6 + c_{-4} + c_{16} + c_{-14} + \cdots = 0 + c_{-4} + 0 + \cdots = c_{-4},$$

ここまでは調子が良い。ところが

$$C_5 = \sum_{m\equiv 5} c_m = c_5 + c_{-5} + c_{15} + c_{-15} + \cdots = c_5 + c_{-5} + 0 + 0 + \cdots = c_5 + c_{-5}.$$

$C_5 = c_5$ も $C_5 = c_{-5}$ も成り立たない。c_5, c_{-5} は簡単に求まりそうにない。

少し考えると、$M = 5$ であっても、$N > 10$ であれば、うまく行く ((★) が成り立つ) ことが分かる。
落ち着いて一般化すると、$N > 2M$ であれば (★) が成り立つ。

定理 7.3 の証明.

すでに示したように

$$C_n = \sum_{m \equiv n} c_m = c_n + \sum_{p=1}^{\infty} \left(c_{n+pN} + c_{n-pN} \right).$$

$0 \le n \le M$ であれば、

- $n + pN \ge N > 2M > M$ であるから、$c_{n+pN} = 0$.
- $n - pN \le M - N < -M$ であるから、$c_{n-pN} = 0$.

ゆえに $C_n = c_n$.
残りも同様にして証明できる。 □

次のことはぜひ頭に入れて欲しい。

$0 \le n \ll N$ であるとき、

- c_n の近似は C_n
- c_{-n} の近似は C_{N-n}　(C_{N-n} は c_{N-n} ではなく、c_{-n} の近似である)

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).