信号処理とフーリエ変換 第7回

～Fourier 変換 (2)～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2020年11月11日

目次

本日の内容・連絡事項

“フツーの”Fourier 変換の説明を始めます。講義ノート [1] の §2.5 くらいまで。Fourier 変換は、畳み込みとの関係が重要であるが、それについては後日述べる。

Fourier 変換の議論は、(色々な計算が出て来て) 微積分や関数論の良い演習になる。この講義では関数論の知識は仮定しない (それが必要な部分は軽く流すことにする)。微積分を適宜復習することを心がけよう。

何回かこの科目を担当した結果、この科目の単位を取得できるかどうかは、微積分の力にかかっている、と考えるようになった。今回の授業に現れる式変形も、きちんと理解できているかどうか、自分で判断し、不確かなところがあったら、復習して解消すること。

2.3.1 まとめの定理 (再掲)

定理 6.2　マスターすべき Fourier 変換

以下 $a > 0$ とする。

1. $\mathscr{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{\xi^2 + a^2}.$
2. $\mathscr{F}\left[\dfrac{1}{x^2 + a^2}\right](\xi) = \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-a|\xi|}.$
3. $f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (-a < x < a) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ とおくとき、$\mathscr{F}f(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sin(a\xi)}{a\xi} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sinc}(a\xi).$
   ただし $\operatorname{sinc} x := \dfrac{\sin x}{x}.$
4. $\mathscr{F}\left[\dfrac{\sin(ax)}{ax}\right](\xi) = \sqrt{2\pi} \times \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a) \\ \dfrac{1}{4a} & (\xi = \pm a). \end{cases}.$
5. $\mathscr{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$　(← この説明が残っている。)

2.3.4 e^{-ax^2} の Fourier 変換

正の定数 a を用いて、$f(x) = e^{-ax^2}$ と表される関数を **Gaussian** と呼ぶ。よく出て来る重要な関数である。

実は (定理 6.2 (5) で述べたように)

$$\mathscr{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

が成り立つ。

非常に重要な結果なので、2 つの証明を与える。

2.3.4 e^{-ax^2} の Fourier 変換　証明 1

証明 1　$e^{-ax^2}e^{-i\xi x} = e^{-ax^2-i\xi x}$ の指数部を平方完成して

$$-ax^2 - i\xi x = -a\left(x^2 + \frac{i\xi}{a}x\right) = -a\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4a}.$$

ゆえに

$$\mathscr{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}dx.$$

実は

(1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx.$$

が成り立つ。この事実は、ふつう “正則関数の線積分の積分路の変形” によって示される。とりあえず認めて先に進む。簡単な変数変換 $\sqrt{a}x = y$ によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

ゆえに

$$\mathscr{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi) = e^{-\frac{\xi}{4a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

(1) を証明しよう。任意の $X > 0$ に対して、複素平面で 4 点 $-X$, X, $X + \frac{i\xi}{2a}$, $-X + \frac{i\xi}{2a}$ を頂点とする長方形の周を正の向きに 1 周する閉曲線を C_X とする。e^{-az^2} は全平面で正則である。Cauchy の積分定理から

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{C_X} e^{-az^2}\,dz \\
&= \int_{-X}^{X} e^{-ax^2}\,dx + \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2}\,dz - \int_{-X}^{X} e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2}\,dx - \int_{[-X, -X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2}\,dz
\end{aligned}
$$

$X \to +\infty$ としたとき、右辺第 2 項, 第 4 項は 0 に収束する。実際、$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ としたとき $x = \pm X$, $|y| \le \frac{|\xi|}{2a}$ であるから

$$
\left| e^{-az^2} \right| = e^{\mathrm{Re}(-az^2)} = e^{-a(x^2-y^2)} \le e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2}.
$$

ゆえに $X \to +\infty$ のとき

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{[\pm X, \pm X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz \right| &\le \int_{[\pm X, \pm X+i\frac{\xi}{2a}]} \left| e^{-az^2} \right| |dz| \\
&\le e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2} \int_{[\pm X, \pm X+i\frac{\xi}{2a}]} |dz| = e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2} \cdot \frac{|\xi|}{2a} \to 0.
\end{aligned}
$$

ゆえに (1) が成り立つ。 □

2.3.4 e^{-ax^2} の Fourier 変換

(1) の証明は、慣れないと大変な計算に感じられるかもしれないが、関数論には似たような計算が良く出て来るので、実は難しくはない。

ちなみに、関数論を使うと、定理 6.2 (2)

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right](\xi)=\frac{\pi e^{-a|\xi|}}{a}$$

も (反転公式を使わずに) 証明できる。これは関数論の授業で学ぶ。

証明 2

$$g(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, dx$$

とおく。積分記号下の微分ができることの証明は難しくない (と言ってサボる)。

$$\begin{aligned}
g'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i}{2a} e^{-ax^2} \right)' e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{i}{2a} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2a} e^{-ax^2} (-i\xi) e^{-ix\xi}\, dx \right) \\
&= -\frac{\xi}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, dx = -\frac{\xi}{2a} g(\xi),
\end{aligned}$$

一方、

$$g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

2.3.4 定理 6.2 の証明 (続き) e^{-ax^2} の Fourier 変換　証明 2

ゆえに $Y = g(\xi)$ は、次の変数分離型常微分方程式の初期値問題

$$(2) \qquad \frac{dY}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a} Y, \quad Y(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

の解である。これを解くと

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \quad \square$$

練習　(2) を解け。

2.4 Fourier 変換の基本的な性質

すでに見た、

(a) 反転公式

(3) $$\mathscr{F}^*\mathscr{F}f = f, \quad \mathscr{F}\mathscr{F}^*g = g$$

(b) Fourier 変換と共役 Fourier 変換の関係

(4) $$\mathscr{F}^*f(\xi) = \mathscr{F}f(-\xi)$$

以外に比較的簡単に得られる Fourier 変換の性質 (公式) をあげる。

これらの性質の証明は、積分の収束まで示すのは難しい場合もあるが、それを除けば簡単である。ぜひ自力で出来るようになろう (2,3 分で計算出来て、自分で公式が書ける・チェックできるようになろう)。

線形性

(5a) $$\mathscr{F}(f_1 + f_2) = \mathscr{F}f_1 + \mathscr{F}f_2,$$

(5b) $$\mathscr{F}(cf) = c\mathscr{F}f.$$

これは積分の線形性から従う。

2.4 Fourier 変換の基本的な性質

平行移動 $\leftrightarrow$ 指数関数の掛け算

(6)
$$\mathscr{F}\left[f(x-a)\right](\xi) = e^{-ia\xi}\mathscr{F}f(\xi),$$
(7)
$$\mathscr{F}\left[f(x)e^{iax}\right](\xi) = \mathscr{F}f(\xi-a).$$

証明　実際 $u = x - a$ と変数変換して、$du = dx$, $x = u + a$, $x \to -\infty$ のとき $u \to -\infty$, $x \to \infty$ のとき $u \to \infty$ であるから

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(x-a)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i(u+a)\xi}\,du \\ &= e^{-ia\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}\,du = e^{-ia\xi}\mathscr{F}f(\xi).\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(x)e^{iax}](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(\xi-a)}\,dx \\ &= \mathscr{F}f(\xi-a). \quad \square\end{aligned}$$

2.4 Fourier 変換の基本的な性質

スケーリング　$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とするとき

(8a)
$$\mathscr{F}\left[f(ax)\right](\xi) = \frac{1}{|a|}\mathscr{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

特に

(8b)
$$\mathscr{F}[f(-x)](\xi) = \mathscr{F}f(-\xi).$$

証明　$a > 0$ のとき、$u = ax$ とおくと、$du = a\,dx$, $x = \frac{u}{a}$, $x \to -\infty$ のとき $u \to -\infty$, $x \to \infty$ のとき $u \to \infty$ であるから

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(ax)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{u}{a}\xi}\cdot\frac{1}{a}\,du\\ &= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\frac{\xi}{a}}\,du = \frac{1}{a}\mathscr{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).\end{aligned}$$

$a < 0$ のとき、上とほぼ同様であるが、$x \to -\infty$ のとき $u \to \infty$, $x \to \infty$ のとき $u \to -\infty$ であるから

$$\mathscr{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} f(u)e^{-iu\frac{\xi}{a}}\cdot\frac{1}{a}\,du = -\frac{1}{a}\mathscr{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

以上まとめると (8a) を得る。　□

微分 $\leftrightarrow$ 座標の掛け算 (1)　導関数の Fourie 変換について

(9a)
$$\mathscr{F}\left[f'(x)\right](\xi)=(i\xi)\mathscr{F}f(\xi),$$

(9b)
$$(\forall k\in\mathbb{N})\quad \mathscr{F}\left[f^{(k)}(x)\right](\xi)=(i\xi)^k\,\mathscr{F}f(\xi).$$

証明　f と f' が積分可能で、$f(x)\to 0$ $(x\to\pm\infty)$ とすると

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f'(x)](\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R_1,R_2\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R_1}^{R_2}f'(x)e^{-ix\xi}\,dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R_1,R_2\to\infty}\left(\left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-R_1}^{R_2}-\int_{-R_1}^{R_2}f(x)\cdot(-i\xi)e^{-ix\xi}\,dx\right)\\
&=i\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}\,dx=i\xi\mathscr{F}f(\xi).
\end{aligned}$$

(9a) が得られた。(9b) は帰納法で得られる。 □

微分 $\leftrightarrow$ **座標の掛け算** (2)　Fourier 変換の導関数について

(10a) $$\frac{d}{d\xi}\mathscr{F}f(\xi) = -i\mathscr{F}\left[xf(x)\right](\xi),$$

(10b) $$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \mathscr{F}f(\xi) = (-i)^k \mathscr{F}\left[x^k f(x)\right](\xi).$$

証明　f と $xf(x)$ が積分可能ならば、$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}f(x)e^{-ix\xi}\right| = \left|-ixf(x)e^{-ix\xi}\right| = |x|\,|f(x)|$ も積分可能であるから、積分記号下の微分ができて

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\mathscr{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}f(x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-ix\xi}dx = -i\mathscr{F}[xf(x)](\xi).\end{aligned}$$

f と $x^k f(x)$ がともに積分可能な場合、帰納法で (10b) が得られる。 $\square$

2.5 利用した微積分の定理

(反省パート)

反転公式の証明は難しい (証明をサボっている)。しかし、公式自体は覚えやすいであろう。

その他の公式は、暗記するよりは、公式を導けるようにしておくことを勧める (Fourier 変換には色々な流儀があるが、流儀ごとに公式は違うので、何かの流儀での公式を丸暗記するよりは、その場で導けるようにするのが便利である)。

これらの公式の証明には、微積分の定理 (公式) を用いる。どういうものを使うかまとめておこう。

1. 部分積分
2. 積分の変数変換 (置換積分)
3. 微分と積分の順序交換 (積分記号下の微分)

2.5 利用した微積分の定理　部分積分

これはよく知っているであろうが、念のため。

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{11}$$

この講義では (1 変数関数しか扱わないので) あまり使わないが、n 重積分の場合は

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)g(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)n_j\,d\sigma - \int_\Omega f(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\,dx. \tag{12}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域。$\partial\Omega$ は Ω の境界、$d\sigma$ は面積要素、n_j は Ω の境界上の点 x における外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x)$ の第 j 成分を表す。

積分の変数変換も (意外と証明は難しいが) 良く知っているであろう。

(i) $\varphi\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ は C^1 級, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

(ii) $\varphi\colon D\to\mathbb{R}^n$ は C^1 級かつ単射, $\Omega=\varphi(D)$ とすると

$$\int_\Omega f(x)\,dx=\int_D f(\varphi(u))\left|\det\varphi'(u)\right|\,du.$$

特に、a, b を定数として $x=au+b$ とすると、(i) より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(au+b)\cdot a\,du & (a>0)\\ \displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} f(au+b)\cdot a\,du & (a<0).\end{cases}$$

次のように書くと a の符号によらない (これが (ii) に対応する)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(au+b)\,|a|\,du.$$

次の式を「微分と積分の順序交換」あるいは「積分記号下の微分」という。

$$\frac{d}{d\xi}\int_\Omega f(x,\xi)\,dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial\xi} f(x,\xi)\,dx. \tag{13}$$

Ω が有界閉区間 $[a,b]$ であり、f と $\frac{\partial f}{\partial\xi}$ が $[a,b]\times(\alpha,\beta)$ で連続である場合は、初等的な証明ができる。

しかし、Fourier 変換の場合は、$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ は有界閉区間ではないので、その定理では不十分である。

Fourier 変換については、次の定理が便利である。

Lebesgue 積分から

ある可積分関数 $\varphi\colon\Omega\to\mathbb{C}$ が存在して、

$$(\forall x\in\Omega)(\forall\xi\in(\alpha,\beta))\quad \left|\frac{\partial}{\partial\xi}f(x,\xi)\right|\le\varphi(x)$$

が成り立つならば (13) が成り立つ。

2.6 Fourier 変換の L^2 理論

Fourier 級数は内積との相性が良いことが分かった。Fourier 変換も内積との相性が良い。

それに関する性質をきちんと証明するのは手間がかかるが、証明抜きでざっと紹介する。

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ を満たすとき、f は $\mathbb{R}$ で**二乗可積分**という。

$\mathbb{R}$ で (Lebesgue 可測かつ) 二乗可積分な 関数全体の集合を $L^2(\mathbb{R})$ と表す。

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(f,g)_{L^2} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定めると、$(\cdot,\cdot)_{L^2}$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の内積の性質を満たし、$L^2(\mathbb{R})$ は完備な内積空間 (Hilbert 空間) となる。この内積で定まるノルムを $\|\cdot\|_{L^2}$ と表す:

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{(f,f)_{L^2}}.$$

$f \in L^2(\mathbb{R})$ のとき、Fourier 変換 $\mathscr{F}f$ が定義できて、$\mathscr{F}f$ も二乗可積分である。

ゆえに写像 $\mathscr{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ が定義される。

実は $\mathscr{F}$ は全単射であり、逆写像は共役 Fourier 変換である: $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^*$.

実は $\mathscr{F}$ は内積、長さを保つ。すなわち次式が成り立つ (Parseval の等式)。

$$(f,g)_{L^2} = (\mathscr{F}f, \mathscr{F}g)_{L^2}, \quad \|f\|_{L^2} = \|\mathscr{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{14}$$

参考書としては、例えば倉田 [2], 伊藤 [3] を勧める。

2.7 とりあえずの結び

Fourier 変換と深く関係する「**畳み込み**」という重要なものの説明が残っているが、とりあえず話を中断して、その他の (広い意味の) Fourier 変換の紹介に話を進める。

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).

[2] 倉田和浩：フーリエ解析の基礎と応用, 数理工学社 (2020/7/10).

[3] 伊藤清三：ルベーグ積分入門, 裳華房 (1963).