

# 信号処理とフーリエ変換 第7回

## ～Fourier 変換 (2)～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2020 年 11 月 11 日

## ① 本日の内容・連絡事項

## ② Fourier 変換 (続き)

- マスターすべき Fourier 変換 (続き)
  - まとめの定理
  - $e^{-ax^2}$  の Fourier 変換
- Fourier 変換の基本的な性質
- 利用した微積分の定理
- Fourier 変換の  $L^2$  理論
- とりあえずの結び

“フツの” Fourier 変換の説明を始めます。講義ノート [1] の §2.5 くらいまで。Fourier 変換は、畳み込みとの関係が重要であるが、それについては後日述べる。

“フツの” Fourier 変換の説明を始めます。講義ノート [1] の §2.5 くらいまで。Fourier 変換は、畳み込みとの関係が重要であるが、それについては後日述べる。

Fourier 変換の議論は、(色々な計算が出て来て) 微積分や関数論の良い演習になる。この講義では関数論の知識は仮定しない (それが必要な部分は軽く流すことにする)。微積分を適宜復習することを心がけよう。

何回かこの科目を担当した結果、この科目の単位を取得できるかどうかは、微積分の力にかかっている、と考えるようになった。今回の授業に現れる式変形も、きちんと理解できているかどうか、自分で判断し、不確かなところがあったら、復習して解消すること。

## 2.3.1 まとめの定理 (再掲)

### 定理 6.2 マスターすべき Fourier 変換

以下  $a > 0$  とする。

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{F} \left[ e^{-a|x|} \right] (\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{F} \left[ \frac{1}{x^2 + a^2} \right] (\xi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\xi|}.$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2a} & (-a < x < a) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad \text{とおくとき、} \mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{a\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(a\xi).$$

ただし  $\text{sinc } x := \frac{\sin x}{x}$ .

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{F} \left[ \frac{\sin(ax)}{ax} \right] (\xi) = \sqrt{2\pi} \times \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a) \\ \frac{1}{4a} & (\xi = \pm a). \end{cases}.$$

$$\textcircled{5} \quad \mathcal{F} \left[ e^{-ax^2} \right] (\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \quad (\leftarrow \text{この説明が残っている。})$$

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換

正の定数  $a$  を用いて、 $f(x) = e^{-ax^2}$  と表される関数を **Gaussian** と呼ぶ。  
よく出て来る重要な関数である。

実は (定理 6.2 (5) で述べたように)

$$\mathcal{F} \left[ e^{-ax^2} \right] (\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

が成り立つ。

非常に重要な結果なので、2つの証明を与える。

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 証明 1

**証明 1**  $e^{-ax^2}e^{-i\xi x} = e^{-ax^2-i\xi x}$  の指数部を平方完成して

$$-ax^2 - i\xi x = -a \left( x^2 + \frac{i\xi}{a}x \right) = -a \left( x + \frac{i\xi}{2a} \right)^2 - \frac{\xi^2}{4a}.$$

ゆえに

$$\mathcal{F} \left[ e^{-ax^2} \right] (\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left( x + \frac{i\xi}{2a} \right)^2} dx.$$

実は

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left( x + \frac{i\xi}{2a} \right)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx.$$

が成り立つ。この事実は、ふつう “正則関数の線積分の積分路の変形” によって示される。とりあえず認めて先に進む。簡単な変数変換  $\sqrt{a}x = y$  によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

ゆえに

$$\mathcal{F} \left[ e^{-ax^2} \right] (\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 証明 1 (続き)

(1) を証明しよう。任意の  $X > 0$  に対して、複素平面で 4 点  $-X, X, X + \frac{i\xi}{2a}, -X + \frac{i\xi}{2a}$  を頂点とする長方形の周を正の向きに 1 周する閉曲線を  $C_X$  とする。 $e^{-az^2}$  は全平面で正則である。Cauchy の積分定理から

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_X} e^{-az^2} dz \\ &= \int_{-X}^X e^{-ax^2} dx + \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz - \int_{-X}^X e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx - \int_{[-X, -X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz \end{aligned}$$



## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 証明 1 (続き)

(1) を証明しよう。任意の  $X > 0$  に対して、複素平面で 4 点  $-X, X, X + \frac{i\xi}{2a}, -X + \frac{i\xi}{2a}$  を頂点とする長方形の周を正の向きに 1 周する閉曲線を  $C_X$  とする。 $e^{-az^2}$  は全平面で正則である。Cauchy の積分定理から

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_X} e^{-az^2} dz \\ &= \int_{-X}^X e^{-ax^2} dx + \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz - \int_{-X}^X e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx - \int_{[-X, -X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz \end{aligned}$$

$X \rightarrow +\infty$  としたとき、右辺第 2 項, 第 4 項は 0 に収束する。

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 証明 1 (続き)

(1) を証明しよう。任意の  $X > 0$  に対して、複素平面で 4 点  $-X, X, X + \frac{i\xi}{2a}, -X + \frac{i\xi}{2a}$  を頂点とする長方形の周を正の向きに 1 周する閉曲線を  $C_X$  とする。 $e^{-az^2}$  は全平面で正則である。Cauchy の積分定理から

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_X} e^{-az^2} dz \\ &= \int_{-X}^X e^{-ax^2} dx + \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz - \int_{-X}^X e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx - \int_{[-X, -X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz \end{aligned}$$

$X \rightarrow +\infty$  としたとき、右辺第 2 項, 第 4 項は 0 に収束する。実際、 $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) としたとき  $x = \pm X, |y| \leq \frac{|\xi|}{2a}$  であるから

$$\left| e^{-az^2} \right| = e^{\operatorname{Re}(-az^2)} = e^{-a(x^2-y^2)} \leq e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2}.$$

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 証明 1 (続き)

(1) を証明しよう。任意の  $X > 0$  に対して、複素平面で 4 点  $-X, X, X + \frac{i\xi}{2a}, -X + \frac{i\xi}{2a}$  を頂点とする長方形の周を正の向きに 1 周する閉曲線を  $C_X$  とする。 $e^{-az^2}$  は全平面で正則である。Cauchy の積分定理から

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_X} e^{-az^2} dz \\ &= \int_{-X}^X e^{-ax^2} dx + \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz - \int_{-X}^X e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx - \int_{[-X, -X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz \end{aligned}$$

$X \rightarrow +\infty$  としたとき、右辺第 2 項, 第 4 項は 0 に収束する。実際、 $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) としたとき  $x = \pm X, |y| \leq \frac{|\xi|}{2a}$  であるから

$$\left| e^{-az^2} \right| = e^{\operatorname{Re}(-az^2)} = e^{-a(x^2 - y^2)} \leq e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2}.$$

ゆえに  $X \rightarrow +\infty$  のとき

$$\begin{aligned} \left| \int_{[\pm X, \pm X + i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz \right| &\leq \int_{[\pm X, \pm X + i\frac{\xi}{2a}]} \left| e^{-az^2} \right| |dz| \\ &\leq e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2} \int_{[\pm X, \pm X + i\frac{\xi}{2a}]} |dz| = e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2} \cdot \frac{|\xi|}{2a} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 証明 1 (続き)

(1) を証明しよう。任意の  $X > 0$  に対して、複素平面で 4 点  $-X, X, X + \frac{i\xi}{2a}, -X + \frac{i\xi}{2a}$  を頂点とする長方形の周を正の向きに 1 周する閉曲線を  $C_X$  とする。 $e^{-az^2}$  は全平面で正則である。Cauchy の積分定理から

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_X} e^{-az^2} dz \\ &= \int_{-X}^X e^{-ax^2} dx + \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz - \int_{-X}^X e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx - \int_{[-X, -X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz \end{aligned}$$

$X \rightarrow +\infty$  としたとき、右辺第 2 項, 第 4 項は 0 に収束する。実際、 $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) としたとき  $x = \pm X, |y| \leq \frac{|\xi|}{2a}$  であるから

$$\left| e^{-az^2} \right| = e^{\operatorname{Re}(-az^2)} = e^{-a(x^2-y^2)} \leq e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2}.$$

ゆえに  $X \rightarrow +\infty$  のとき

$$\begin{aligned} \left| \int_{[\pm X, \pm X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz \right| &\leq \int_{[\pm X, \pm X+i\frac{\xi}{2a}]} \left| e^{-az^2} \right| |dz| \\ &\leq e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2} \int_{[\pm X, \pm X+i\frac{\xi}{2a}]} |dz| = e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2} \cdot \frac{|\xi|}{2a} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ゆえに (1) が成り立つ。

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換

(1) の証明は、慣れないと大変な計算に感じられるかもしれないが、関数論には似たような計算が良く出て来るので、実は難しくはない。

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換

(1) の証明は、慣れないと大変な計算に感じられるかもしれないが、関数論には似たような計算が良く出て来るので、実は難しくはない。

ちなみに、関数論を使うと、定理 6.2 (2)

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{x^2 + a^2} \right] (\xi) = \frac{\pi e^{-a|\xi|}}{a}$$

も (反転公式を使わずに) 証明できる。これは関数論の授業で学ぶ。

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 証明 2

### 証明 2

$$g(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx$$

とおく。

## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 証明 2

### 証明 2

$$g(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx$$

とおく。積分記号下の微分ができることの証明は難しくない (と言ってサボる)。

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{i}{2a} e^{-ax^2} \right)' e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ \frac{i}{2a} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2a} e^{-ax^2} (-i\xi) e^{-ix\xi} dx \right) \\ &= -\frac{\xi}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = -\frac{\xi}{2a} g(\xi), \end{aligned}$$



## 2.3.4 $e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 証明 2

### 証明 2

$$g(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx$$

とおく。積分記号下の微分ができることの証明は難しくない (と言ってサボる)。

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{i}{2a} e^{-ax^2} \right)' e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ \frac{i}{2a} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2a} e^{-ax^2} (-i\xi) e^{-ix\xi} dx \right) \\ &= -\frac{\xi}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = -\frac{\xi}{2a} g(\xi), \end{aligned}$$

一方、

$$g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

ゆえに  $Y = g(\xi)$  は、次の変数分離型常微分方程式の初期値問題

$$(2) \quad \frac{dY}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a} Y, \quad Y(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

の解である。

ゆえに  $Y = g(\xi)$  は、次の変数分離型常微分方程式の初期値問題

$$(2) \quad \frac{dY}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a} Y, \quad Y(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

の解である。これを解くと

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \quad \square$$

ゆえに  $Y = g(\xi)$  は、次の変数分離型常微分方程式の初期値問題

$$(2) \quad \frac{dY}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a} Y, \quad Y(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

の解である。これを解くと

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \quad \square$$

練習 (2) を解け。

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

すでに見た、

### a) 反転公式

$$(3) \quad \mathcal{F}^* \mathcal{F} f = f, \quad \mathcal{F} \mathcal{F}^* g = g$$

### b) Fourier 変換と共役 Fourier 変換の関係

$$(4) \quad \mathcal{F}^* f(\xi) = \mathcal{F} f(-\xi)$$

以外に比較的簡単に得られる Fourier 変換の性質 (公式) をあげる。

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

すでに見た、

### a) 反転公式

$$(3) \quad \mathcal{F}^* \mathcal{F} f = f, \quad \mathcal{F} \mathcal{F}^* g = g$$

### b) Fourier 変換と共役 Fourier 変換の関係

$$(4) \quad \mathcal{F}^* f(\xi) = \mathcal{F} f(-\xi)$$

以外に比較的簡単に得られる Fourier 変換の性質 (公式) をあげる。

これらの性質の証明は、積分の収束まで示すのは難しい場合もあるが、それを除けば簡単である。ぜひ自力で出来るようになって (2,3 分で計算出来て、自分で公式が書ける・チェックできるようになる)。

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

すでに見た、

### a) 反転公式

$$(3) \quad \mathcal{F}^* \mathcal{F} f = f, \quad \mathcal{F} \mathcal{F}^* g = g$$

### b) Fourier 変換と共役 Fourier 変換の関係

$$(4) \quad \mathcal{F}^* f(\xi) = \mathcal{F} f(-\xi)$$

以外に比較的簡単に得られる Fourier 変換の性質 (公式) をあげる。

これらの性質の証明は、積分の収束まで示すのは難しい場合もあるが、それを除けば簡単である。ぜひ自力で出来るようになろう (2,3 分で計算出来て、自分で公式が書ける・チェックできるようになろう)。

### 線形性

$$(5a) \quad \mathcal{F}(f_1 + f_2) = \mathcal{F} f_1 + \mathcal{F} f_2,$$

$$(5b) \quad \mathcal{F}(cf) = c \mathcal{F} f.$$

これは積分の線形性から従う。

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

平行移動  $\leftrightarrow$  指数関数の掛け算

$$(6) \quad \mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}f(\xi),$$

$$(7) \quad \mathcal{F}[f(x)e^{iax}](\xi) = \mathcal{F}f(\xi-a).$$



## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

平行移動  $\leftrightarrow$  指数関数の掛け算

$$(6) \quad \mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}f(\xi),$$

$$(7) \quad \mathcal{F}[f(x)e^{iax}](\xi) = \mathcal{F}f(\xi-a).$$

**証明** 実際  $u = x - a$  と変数変換して、 $du = dx$ ,  $x = u + a$ ,  $x \rightarrow -\infty$  のとき  $u \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $u \rightarrow \infty$  であるから

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

平行移動  $\leftrightarrow$  指数関数の掛け算

$$(6) \quad \mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}f(\xi),$$

$$(7) \quad \mathcal{F}[f(x)e^{iax}](\xi) = \mathcal{F}f(\xi-a).$$

証明 実際  $u = x - a$  と変数変換して、 $du = dx$ ,  $x = u + a$ ,  $x \rightarrow -\infty$  のとき  $u \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $u \rightarrow \infty$  であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x-a)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(u+a)\xi} du \\ &= e^{-ia\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\xi} du = e^{-ia\xi} \mathcal{F}f(\xi). \end{aligned}$$

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

平行移動  $\leftrightarrow$  指数関数の掛け算

$$(6) \quad \mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}f(\xi),$$

$$(7) \quad \mathcal{F}[f(x)e^{iax}](\xi) = \mathcal{F}f(\xi-a).$$

証明 実際  $u = x - a$  と変数変換して、 $du = dx$ ,  $x = u + a$ ,  $x \rightarrow -\infty$  のとき  $u \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $u \rightarrow \infty$  であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x-a)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(u+a)\xi} du \\ &= e^{-ia\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\xi} du = e^{-ia\xi} \mathcal{F}f(\xi). \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)e^{iax}](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(\xi-a)} dx \\ &= \mathcal{F}f(\xi-a). \quad \square \end{aligned}$$

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

スケーリング  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  とするとき

$$(8a) \quad \mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

スケーリング  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  とするとき

$$(8a) \quad \mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

特に

$$(8b) \quad \mathcal{F}[f(-x)](\xi) = \mathcal{F}f(-\xi).$$

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

スケーリング  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  とするとき

$$(8a) \quad \mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

特に

$$(8b) \quad \mathcal{F}[f(-x)](\xi) = \mathcal{F}f(-\xi).$$

**証明**  $a > 0$  のとき、 $u = ax$  とおくと、 $du = a dx$ ,  $x = \frac{u}{a}$ ,  $x \rightarrow -\infty$  のとき  $u \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $u \rightarrow \infty$  であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(ax)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\frac{u}{a}\xi} \cdot \frac{1}{a} du \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\frac{\xi}{a}} du = \frac{1}{a} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right). \end{aligned}$$

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

スケーリング  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  とするとき

$$(8a) \quad \mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

特に

$$(8b) \quad \mathcal{F}[f(-x)](\xi) = \mathcal{F}f(-\xi).$$

**証明**  $a > 0$  のとき、 $u = ax$  とおくと、 $du = a dx$ ,  $x = \frac{u}{a}$ ,  $x \rightarrow -\infty$  のとき  $u \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $u \rightarrow \infty$  であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(ax)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\frac{u}{a}\xi} \cdot \frac{1}{a} du \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\frac{\xi}{a}} du = \frac{1}{a} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right). \end{aligned}$$

$a < 0$  のとき、上とほぼ同様であるが、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $u \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $u \rightarrow -\infty$  であるから

$$\mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(u) e^{-iu\frac{\xi}{a}} \cdot \frac{1}{a} du = -\frac{1}{a} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

以上まとめると (8a) を得る。

## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

微分  $\leftrightarrow$  座標の掛け算 (1) 導関数の Fourier 変換について



## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

微分  $\leftrightarrow$  座標の掛け算 (1) 導関数の Fourier 変換について

$$(9a) \quad \mathcal{F}[f'(x)](\xi) = (i\xi)\mathcal{F}f(\xi),$$

$$(9b) \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad \mathcal{F}[f^{(k)}(x)](\xi) = (i\xi)^k \mathcal{F}f(\xi).$$

証明  $f$  と  $f'$  が積分可能で、 $f(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) とすると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R_1}^{R_2} f'(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \left( [f(x) e^{-ix\xi}]_{-R_1}^{R_2} - \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \cdot (-i\xi) e^{-ix\xi} dx \right) \\ &= i\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = i\xi \mathcal{F}f(\xi).\end{aligned}$$

(9a) が得られた。(9b) は帰納法で得られる。



## 2.4 Fourier 変換の基本的な性質

微分  $\leftrightarrow$  座標の掛け算 (2)    Fourier 変換の導関数について

$$(10a) \quad \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi) = -i \mathcal{F}[xf(x)](\xi),$$

$$(10b) \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad \left( \frac{d}{d\xi} \right)^k \mathcal{F}f(\xi) = (-i)^k \mathcal{F}[x^k f(x)](\xi).$$

**証明**  $f$  と  $xf(x)$  が積分可能ならば、 $\left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(x) e^{-ix\xi} \right| = |-ixf(x)e^{-ix\xi}| = |x| |f(x)|$  も積分可能であるから、積分記号下の微分ができて

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-ix\xi} dx = -i \mathcal{F}[xf(x)](\xi). \end{aligned}$$

$f$  と  $x^k f(x)$  がともに積分可能な場合、帰納法で (10b) が得られる。 □

## 2.5 利用した微積分の定理

(反省パート)

反転公式の証明は難しい (証明をサボっている)。しかし、公式自体は覚えやすいであろう。

## 2.5 利用した微積分の定理

(反省パート)

反転公式の証明は難しい (証明をサボっている)。しかし、公式自体は覚えやすいであろう。

その他の公式は、暗記するよりは、公式を導けるようにしておくことを勧める (Fourier 変換には色々な流儀があるが、流儀ごとに公式は違うので、何かの流儀での公式を丸暗記するよりは、その場で導けるようにするのが便利である)。

## 2.5 利用した微積分の定理

(反省パート)

反転公式の証明は難しい (証明をサボっている)。しかし、公式自体は覚えやすいであろう。

その他の公式は、暗記するよりは、公式を導けるようにしておくことを勧める (Fourier 変換には色々な流儀があるが、流儀ごとに公式は違うので、何かの流儀での公式を丸暗記するよりは、その場で導けるようにするのが便利である)。

これらの公式の証明には、微積分の定理 (公式) を用いる。どういうものを使うかまとめておこう。

- ① 部分積分
- ② 積分の変数変換 (置換積分)
- ③ 微分と積分の順序交換 (積分記号下の微分)

## 2.5 利用した微積分の定理 部分積分

これはよく知っているであろうが、念のため。

$$(11) \quad \int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

この講義では (1 変数関数しか扱わないので) あまり使わないが、 $n$  重積分の場合は

$$(12) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)n_j d\sigma - \int_{\Omega} f(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) dx.$$

ここで  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の領域。 $\partial\Omega$  は  $\Omega$  の境界、 $d\sigma$  は面積要素、 $n_j$  は  $\Omega$  の境界上の点  $x$  における外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$  の第  $j$  成分を表す。

## 2.5 利用した微積分の定理 積分の変数変換 (置換積分)

積分の変数変換も (意外と証明は難しいが) 良く知っているであろう。

④  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^1$  級,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$  とすると

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

⑤  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $C^1$  級かつ単射,  $\Omega = \varphi(D)$  とすると

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_D f(\varphi(u)) |\det \varphi'(u)| du.$$

特に、 $a, b$  を定数として  $x = au + b$  とすると、(i) より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(au + b) \cdot a du & (a > 0) \\ \int_{\infty}^{-\infty} f(au + b) \cdot a du & (a < 0). \end{cases}$$

次のように書くと  $a$  の符号によらない (これが (ii) に対応する)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(au + b) |a| du.$$

## 2.5 利用した微積分の定理 微分と積分の順序交換 (積分記号下の微分)

次の式を「微分と積分の順序交換」あるいは「積分記号下の微分」という。

$$(13) \quad \frac{d}{d\xi} \int_{\Omega} f(x, \xi) \, dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) \, dx.$$



## 2.5 利用した微積分の定理 微分と積分の順序交換 (積分記号下の微分)

次の式を「微分と積分の順序交換」あるいは「積分記号下の微分」という。

$$(13) \quad \frac{d}{d\xi} \int_{\Omega} f(x, \xi) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) dx.$$

$\Omega$  が有界閉区間  $[a, b]$  であり、 $f$  と  $\frac{\partial f}{\partial \xi}$  が  $[a, b] \times (\alpha, \beta)$  で連続である場合は、初等的な証明ができる。

## 2.5 利用した微積分の定理 微分と積分の順序交換 (積分記号下の微分)

次の式を「微分と積分の順序交換」あるいは「積分記号下の微分」という。

$$(13) \quad \frac{d}{d\xi} \int_{\Omega} f(x, \xi) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) dx.$$

$\Omega$  が有界閉区間  $[a, b]$  であり、 $f$  と  $\frac{\partial f}{\partial \xi}$  が  $[a, b] \times (\alpha, \beta)$  で連続である場合は、初等的な証明ができる。

しかし、Fourier 変換の場合は、 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  は有界閉区間ではないので、その定理では不十分である。

## 2.5 利用した微積分の定理 微分と積分の順序交換 (積分記号下の微分)

次の式を「微分と積分の順序交換」あるいは「積分記号下の微分」という。

$$(13) \quad \frac{d}{d\xi} \int_{\Omega} f(x, \xi) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) dx.$$

$\Omega$  が有界閉区間  $[a, b]$  であり、 $f$  と  $\frac{\partial f}{\partial \xi}$  が  $[a, b] \times (\alpha, \beta)$  で連続である場合は、初等的な証明ができる。

しかし、Fourier 変換の場合は、 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  は有界閉区間ではないので、その定理では不十分である。

Fourier 変換については、次の定理が便利である。

### Lebesgue 積分から

ある可積分関数  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  が存在して、

$$(\forall x \in \Omega)(\forall \xi \in (\alpha, \beta)) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) \right| \leq \varphi(x)$$

が成り立つならば (13) が成り立つ。

## 2.6 Fourier 変換の $L^2$ 理論

Fourier 級数は内積との相性が良いことが分かった。Fourier 変換も内積との相性が良い。それに関する性質をきちんと証明するのは手間がかかるが、証明抜きでざっと紹介する。

## 2.6 Fourier 変換の $L^2$ 理論

Fourier 級数は内積との相性が良いことが分かった。Fourier 変換も内積との相性が良い。それに関する性質をきちんと証明するのは手間がかかるが、証明抜きでざっと紹介する。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$  を満たすとき、 $f$  は  $\mathbb{R}$  で **二乗可積分** という。

$\mathbb{R}$  で (Lebesgue 可測かつ) 二乗可積分な 関数全体の集合を  $L^2(\mathbb{R})$  と表す。

## 2.6 Fourier 変換の $L^2$ 理論

Fourier 級数は内積との相性が良いことが分かった。Fourier 変換も内積との相性が良い。それに関する性質をきちんと証明するのは手間がかかるが、証明抜きでざっと紹介する。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$  を満たすとき、 $f$  は  $\mathbb{R}$  で **二乗可積分** という。

$\mathbb{R}$  で (Lebesgue 可測かつ) 二乗可積分な 関数全体の集合を  $L^2(\mathbb{R})$  と表す。

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$  に対して

$$(f, g)_{L^2} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

と定めると、 $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  は  $L^2(\mathbb{R})$  上の内積の性質を満たし、 $L^2(\mathbb{R})$  は完備な内積空間 (Hilbert 空間) となる。この内積で定まるノルムを  $\|\cdot\|_{L^2}$  と表す:

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{(f, f)_{L^2}}.$$

## 2.6 Fourier 変換の $L^2$ 理論

Fourier 級数は内積との相性が良いことが分かった。Fourier 変換も内積との相性が良い。それに関する性質をきちんと証明するのは手間がかかるが、証明抜きでざっと紹介する。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$  を満たすとき、 $f$  は  $\mathbb{R}$  で **二乗可積分** という。

$\mathbb{R}$  で (Lebesgue 可測かつ) 二乗可積分な 関数全体の集合を  $L^2(\mathbb{R})$  と表す。

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$  に対して

$$(f, g)_{L^2} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

と定めると、 $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  は  $L^2(\mathbb{R})$  上の内積の性質を満たし、 $L^2(\mathbb{R})$  は完備な内積空間 (Hilbert 空間) となる。この内積で定まるノルムを  $\|\cdot\|_{L^2}$  と表す:

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{(f, f)_{L^2}}.$$

$f \in L^2(\mathbb{R})$  のとき、Fourier 変換  $\mathcal{F}f$  が定義できて、 $\mathcal{F}f$  も二乗可積分である。

ゆえに写像  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  が定義される。

## 2.6 Fourier 変換の $L^2$ 理論

Fourier 級数は内積との相性が良いことが分かった。Fourier 変換も内積との相性が良い。それに関する性質をきちんと証明するのは手間がかかるが、証明抜きでざっと紹介する。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$  を満たすとき、 $f$  は  $\mathbb{R}$  で **二乗可積分** という。

$\mathbb{R}$  で (Lebesgue 可測かつ) 二乗可積分な 関数全体の集合を  $L^2(\mathbb{R})$  と表す。

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$  に対して

$$(f, g)_{L^2} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

と定めると、 $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  は  $L^2(\mathbb{R})$  上の内積の性質を満たし、 $L^2(\mathbb{R})$  は完備な内積空間 (Hilbert 空間) となる。この内積で定まるノルムを  $\|\cdot\|_{L^2}$  と表す:

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{(f, f)_{L^2}}.$$

$f \in L^2(\mathbb{R})$  のとき、Fourier 変換  $\mathcal{F}f$  が定義できて、 $\mathcal{F}f$  も二乗可積分である。

ゆえに写像  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  が定義される。

実は  $\mathcal{F}$  は全単射であり、逆写像は共役 Fourier 変換である:  $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ .



## 2.6 Fourier 変換の $L^2$ 理論

Fourier 級数は内積との相性が良いことが分かった。Fourier 変換も内積との相性が良い。それに関する性質をきちんと証明するのは手間がかかるが、証明抜きでざっと紹介する。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$  を満たすとき、 $f$  は  $\mathbb{R}$  で **二乗可積分** という。

$\mathbb{R}$  で (Lebesgue 可測かつ) 二乗可積分な 関数全体の集合を  $L^2(\mathbb{R})$  と表す。

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$  に対して

$$(f, g)_{L^2} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

と定めると、 $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  は  $L^2(\mathbb{R})$  上の内積の性質を満たし、 $L^2(\mathbb{R})$  は完備な内積空間 (Hilbert 空間) となる。この内積で定まるノルムを  $\|\cdot\|_{L^2}$  と表す:

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{(f, f)_{L^2}}.$$

$f \in L^2(\mathbb{R})$  のとき、Fourier 変換  $\mathcal{F}f$  が定義できて、 $\mathcal{F}f$  も二乗可積分である。ゆえに写像  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  が定義される。

実は  $\mathcal{F}$  は全単射であり、逆写像は共役 Fourier 変換である:  $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ 。

実は  $\mathcal{F}$  は内積、長さを保つ。すなわち次式が成り立つ (Parseval の等式)。

$$(14) \quad (f, g)_{L^2} = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)_{L^2}, \quad \|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

参考書としては、例えば倉田 [2], 伊藤 [3] を勧める。

## 2.7 とりあえずの結び

Fourier 変換と深く関係する「**畳み込み**」という重要なものの説明が残っているが、とりあえず話を中断して、その他の (広い意味の) Fourier 変換の紹介に話を進める。

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。(2014~).
- [2] 倉田和浩：フーリエ解析の基礎と応用, 数理工学社 (2020/7/10).
- [3] 伊藤清三：ルベーク積分入門, 裳華房 (1963).