

# 信号処理とフーリエ変換 第5回

～Fourier 級数と微分との関係～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2020年10月21日

## 1 本日の内容・連絡事項

## 2 Fourier 級数

- 微分との関係
  - 微分と Fourier 係数の関係
  - Fourier 係数の大きさ
  - Fourier 係数の減衰と微分可能性

- 講義ノート [1] の §1.5 の部分 (Fourier 級数と微分との関係) の内容を講義します。
- レポート課題 1
  - 公式の問題文は 10 月 21 日 15:20 までに公開する。  
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/kadai1.pdf>
  - 締め切りは 11 月 11 日 15:20。Oh-o! Meiji で提出。
  - フォーマットは A4 サイズの PDF。原則として単一のファイル。  
やむを得ず複数のファイルとする場合は、表紙で区別できるようにする。
  - 課題の内容については、前半部分は前回の講義動画でコメントしてあります。
- 10 月 21 日 (水曜) 16:00~17:00 のオフィスアワーはお休みにするかもしれません。(風邪気味のため。お知らせに注意して下さい。)

言いたいこと ( $A$  の Fourier 級数が  $B$  であることを  $A \sim B$  と書くことにして)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

とするとき

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}.$$

これは項別微分して出来る式なので、覚える苦勞はない (定理 5.1, 5.3)。

関数  $f$  の複素 Fourier 係数 (上の  $c_n$ ) を  $\mathcal{F}[f](n)$  と書くことにすると

$$(*) \quad \mathcal{F}[f'](n) = in\mathcal{F}[f](n).$$

この公式は、普通の Fourier 変換においても対応するものがある。

これらは Fourier 級数、Fourier 変換の微分方程式への応用においても重要である。

(\*) を利用して、連続かつ区分的  $C^1$  級の関数の Fourier 級数が一様収束することが証明できる (定理 5.7)。

## 1.5.1 微分と Fourier 係数の関係

$f$  の Fourier 級数、 $f'$  の Fourier 級数が出て来るので、この節では次のような記号を用いる。

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$
$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx.$$

### 定理 5.1 (微分と Fourier 係数の関係)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  周期  $2\pi$  かつ  $C^1$  級ならば

$$a_n(f') = \begin{cases} nb_n(f) & (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & (n = 0), \end{cases} \quad b_n = -na_n(f) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$c_n(f') = inc_n(f) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

## 1.5.1 微分と Fourier 係数の関係

**定理 5.1 の証明** アイディア一発「部分積分」

$f(x) \cos nx$  が周期  $2\pi$  であるから、 $x = \pm\pi$  での値が同じなので  $[f(x) \cos nx]_{-\pi}^{\pi} = 0$ .  
これを用いると

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ [f(x) \cos nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-n \sin nx) dx \right] \\ &= n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \begin{cases} nb_n(f) & (n \geq 1) \\ 0 & (n = 0). \end{cases} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} b_n(f') &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ [f(x) \sin nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (n \cos nx) dx \right] \\ &= -n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = -na_n(f). \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[ [f(x) e^{inx}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (-ine^{-inx}) dx \right] \\ &= -in \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = -inc_n(f). \quad \square \end{aligned}$$

## 1.5.1 微分と Fourier 係数の関係 例

Fourier 級数は、不連続な関数にも適用できることが重要であった。

上の定理は関数が  $C^1$  級でない場合にも拡張できる。次の例をみてみよう。

### 例 5.2 (連続かつ区分的に $C^1$ 級の関数とその導関数の Fourier 級数)

第 2 回の授業で、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  と  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が周期  $2\pi$  で

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

を満たすとき、 $f$  と  $g$  の Fourier 級数展開が

$$(1) \quad f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right),$$

$$(2) \quad g(x) \sim 4 \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

であることを示した。

$f$  は  $C^1$  級ではないが、(1) の右辺を項別微分すると、(2) の右辺になる。これは偶然ではない。少し複雑にはなるが、この例にも適用できるような定理を述べよう。

## 1.5.1 微分と Fourier 係数の関係

### 定理 5.3 (微分と Fourier 係数の関係 (拡張版))

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  周期  $2\pi$ , 連続かつ区分的に  $C^1$  級ならば

$$a_n(f') = \begin{cases} nb_n(f) & (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & (n = 0), \end{cases} \quad b_n = -na_n(f) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$c_n(f') = inc_n(f) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

区分的に  $C^1$  級とはどういうことか、きちんとした定義を述べる (証明をするので)。

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  が区分的に  $C^1$  級とは、ある有限数列  $\{x_j\}_{j=0}^N$  が存在して、

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$

かつ各  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  に対して、 $f$  は开区間  $(x_{j-1}, x_j)$  で  $C^1$  級で、極限

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow x_{j-1}+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_j-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_{j-1}+0} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_j-0} f'(x)$$

が存在することをいう。

- 周期関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が区分的に  $C^1$  級とは、1 周期区間  $[a, b]$  に対して、 $f$  (の  $[a, b]$  への制限) が  $[a, b]$  で区分的に  $C^1$  級であることをいう。

# 言葉の意味の確認: 区分的に $C^1$ 級とは

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  が連続な場合は、区分的に  $C^1$  級とは、ある有限数列  $\{x_j\}_{j=0}^N$  が存在して、

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$

かつ各  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  に対して、 $f$  を  $[x_{j-1}, x_j]$  に制限すると  $C^1$  級であることと同値である。特に区間の端点  $x_{j-1}, x_j$  において片側微分係数

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_{j-1} + h) - f(x_{j-1})}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_j + h) - f(x_j)}{h}$$

が存在する、ということである。

$f$  は  $[a, b] \setminus \{x_j \mid j = 1, \dots, N\}$  で微分できる。 $x_j$  では  $f'$  は定義できない(かもしれない)が、それ以外の点では  $f'$  は定義できて、 $f'$  は  $[a, b]$  で(広義)積分可能である。

$f$  が定理 5.3 の仮定を満たすとき、ある  $\{x_j\}_{j=0}^N$  が存在して

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi,$$

各  $j = 1, \dots, N$  に対して  $f$  を  $[x_{j-1}, x_j]$  に制限すると  $C^1$  級であり、 $f'$  は  $x_j$  以外では定義され、 $f'(x) \cos nx$ ,  $f'(x) \sin nx$ ,  $f'(x)e^{-inx}$  は  $[-\pi, \pi]$  で広義積分可能であり、 $a_n(f')$ ,  $b_n(f')$ ,  $c_n(f')$  が定まる。

## 1.5.1 微分と Fourier 係数の関係

**定理 5.3 の証明**  $f$  は区分的に  $C^1$  級であるから

$(\exists\{x_j\}_{j=0}^n) \quad -\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi,$  各小区間  $[x_{j-1}, x_j]$  で  $f$  は  $C^1$  級。  
一般に次式が成り立つことに注意せよ。

$$(5a) \quad \sum_{j=1}^n [F(x)]_{x_{j-1}}^{x_j} = F(x_n) - F(x_0) = F(\pi) - F(-\pi),$$

$$(5b) \quad \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} F(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx.$$

積分を  $[x_{j-1}, x_j]$  での積分に分けてから部分積分する。どれでも同様なので、複素 Fourier 級数の場合のみ示す。

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \left( \left[ f(x) e^{-inx} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cdot (-ine^{-inx}) dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ f(x) e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right\} = \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = inc_n(f). \quad \square \end{aligned}$$

## 1.5.1 微分と Fourier 係数の関係 注意

### 系 5.4 ( $C^k$ 級の場合 (高階導関数の Fourier 係数))

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が周期  $2\pi$  かつ  $C^k$  級のとき  $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ .  
( $f$  が  $C^{k-1}$  級で、 $f^{(k-1)}$  が連続かつ区分的に  $C^1$  級のときも成り立つ。)

### 注意 5.5 (ふつうの Fourier 変換との比較, 超関数)

- $c_n(f)$  を後で出て来る Fourier 変換の記号のマネをして  $\mathcal{F}[f](n)$  と書くと、 $c_n(f') = inc_n(f)$  は

$$\mathcal{F}[f'](n) = in\mathcal{F}[f](n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と書き直せる。2章で紹介する、ふつうの Fourier 変換の場合の公式

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi\mathcal{F}[f](\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

と見比べると「同じだ」という印象を持つであろう。

- 連続かつ区分的に  $C^1$  級な関数  $f$  は、微積分の意味では、微分可能でない点を持ちうる。ある意味で不完全な  $f'$  (値が未定義の点がある) の Fourier 係数を用いるのは心配かもしれないが、超関数論を学ぶと、 $f$  の定める超関数の導関数は、ここで用いた  $f'$  の定める超関数と一致することがわかる。

### ① 微分方程式

微分が  $in$  の掛け算になる。微分方程式が代数方程式の問題になる。そうして解けることもある。後でそういう例が見られるかも。

### ② 収束についての議論

$n \rightarrow \pm\infty$  のときの Fourier 係数の減衰は、たくさんの回数微分可能な関数ほど速いことが示される。たくさん微分できる関数の Fourier 級数は良い収束をする。

それに対して、(有限回しか微分可能でない関数は) 微分するたびに Fourier 係数の減衰が遅くなり、収束が悪くなる。

## 1.5.2 Fourier 係数の大きさ

### 定理 5.6

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$  とする。

①  $f$  が積分可能ならば

$$\text{a) } |a_n|, |b_n| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \quad |c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx.$$

特に  $|f(x)| \leq M$  ならば

$$|a_0|, |a_n|, |b_n| \leq 2M \quad (n \in \mathbb{N}), \quad |c_n| \leq M \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

② (Riemann-Lebesgue の定理)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0.$$

③ (Parseval の等式)  $f$  が  $L^2$  ならば

$$\pi \left( \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

## 1.5.2 Fourier 係数の大きさ

**証明**  $|e^{inx}| = 1$ ,  $|\cos nx| \leq 1$ ,  $|\sin nx| \leq 1$  に注意しよう。

(1-a) は簡単。例えば複素 Fourier 係数ならば

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) e^{-inx}| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi M = M. \end{aligned}$$

(1-b) は「数学とメディア」で証明した(?)。ここでは一般の場合の証明は省略するが、 $|f|^2$  が積分可能な場合は、(2) から (級数が収束するので)

$$\text{一般項} = |a_n|^2 + |b_n|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が分かるので  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

( $f$  が積分可能でも、 $|f|^2$  が積分可能とは限らないので、(1-b) の証明になるわけではないが、実際上は十分であろう。)

## 1.5.2 Fourier 係数の大きさ

証明 (続き) (2) (これは既に一度やってある。)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と直交性から導かれる “ピタゴラスの等式”

$$\|f\|^2 = \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 \|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 \|\cos nx\|^2 + |b_n|^2 \|\sin nx\|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \|e^{inx}\|^2.$$

に

$$\|\cos nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|^2 dx = \begin{cases} \pi & (n \in \mathbb{N}) \\ 2\pi & (n = 0), \end{cases}$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx|^2 dx = \pi \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\|e^{inx}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{inx}|^2 dx = 2\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を代入すれば良い。

□

## 1.5.2 Fourier 係数の大きさ 応用として以前言ったこ

**定理 5.7** (連続かつ区分的に  $C^1$  級の関数の Fourier 級数は一様収束する)

$f$  が連続かつ区分的に  $C^1$  級ならば  $f$  の Fourier 級数は一様収束して、和は  $f$  に等しい。

**証明** 複素 Fourier 級数の場合に、Fourier 級数が一様収束することを示す。

$f, f'$  の Fourier 係数をそれぞれ  $c_n, c'_n$  と表す。定理 5.3 により、 $inc_n = c'_n$ 。定理 5.6 より

$$(6) \quad \|f'\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |inc_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2.$$

Schwarz の不等式  $\left| \sum_n a_n b_n \right| \leq \sqrt{\sum_n |a_n|^2} \sqrt{\sum_n |b_n|^2}$  と (6) と  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  を使って

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} |c_n| = \sum_{n \neq 0} n |c_n| \cdot \frac{1}{n} \leq \sqrt{\sum_{n \neq 0} n^2 |c_n|^2} \sqrt{\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \|f'\|^2} \sqrt{2 \cdot \frac{\pi^2}{6}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \|f'\| < \infty.$$

$|c_n e^{inx}| = |c_n|$  であるから、Weierstrass の M test により、 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  は一様収束する。

Fourier 級数が一様収束するとき、その和が元の関数に等しいという定理が成り立つ (その証明は省略する。講義ノート付録 C に書いてある)。□

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上?) は次の定理を用いる。

### 複素関数 定理 10.5 (Weierstrass の M-test)

$\Omega$  は空でない集合、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $\Omega$  上の関数列 (各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $a_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ )、数列  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は

①  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall z \in \Omega) |a_n(z)| \leq M_n$

②  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  は収束

を満たすとする。このとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は  $\Omega$  で一様収束する。

結論部分を「 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は  $\Omega$  で一様絶対収束する」という人が多い。特に  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は一様収束

するし (項別積分出来る)、各点  $z$  で  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$  は絶対収束する (和の順序が変えられる)。

## 1.5.3 Fourier 係数の減衰と微分可能性

定理 5.8 (関数がたくさん微分できるほど、Fourier 係数の減衰が速い)

$k \in \mathbb{N}$ ,  $f$  が周期  $2\pi$  かつ  $C^k$  級ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k b_n(f) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^k c_n(f) = 0.$$

(Landau の little-o notation を用いると、 $a_n = b_n = o(n^{-k})$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  
 $c_n = o(n^{-k})$  ( $n \rightarrow \pm\infty$ ) と表せる。)

証明.

$n^k c_n(f) = i^{-k} c_n(f^{(k)})$  ( $n$ ). また  $f^{(k)}$  は連続なので、Riemann-Lebesgue の定理 (定理 5.6 (1-b)) から、 $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f^{(k)}) = 0$ . ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^k c_n(f) = 0$ . □

## 1.5.3 Fourier 係数の減衰と微分可能性

上の定理の大まかな逆のような定理が成り立つ。

**定理 5.9** (関数の Fourier 係数の減衰が速ければ、たくさんの回数微分可能)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $2\pi$  かつ連続で、その Fourier 係数  $a_n, b_n$  が、ある自然数  $k$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) < \infty$$

を満たすとする。このとき  $f$  は  $C^k$  級であり、 $f$  の Fourier 級数は  $k$  回項別微分可能である。

**証明.**

Weierstrass の M test と 「 $\{f_n\}$  が  $C^1$  級の関数列で  $f$  に各点収束、 $\{f'_n\}$  が  $g$  に一様収束するならば、 $f$  は  $C^1$  級で  $f' = g$ 」 という定理を用いる。詳細は省略する。  $\square$

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。(2014～).