

信号処理とフーリエ変換 第4回

最短距離 \Leftrightarrow 垂直, Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年10月14日

1 本日の内容・連絡事項

2 Fourier 級数

- Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似
 - 垂線の足 (直交射影) は最も近い点
 - Bessel の不等式
 - 完全系, Parseval の等式, 内積空間の収束
 - 演習

3 課題 1 について

- 講義ノート [1] の §1.4 の部分 (最短距離 \Leftrightarrow 垂直) の内容を講義します。
- 次回 (11月21日) にレポート課題1を出します (締め切りは11月11日 15:20 の予定)。課題1のうち今回の授業範囲である部分については、10月14日 15:20 に公開します (動画 part 7)。また課題文は <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2020/kadai1.pdf> におくようにします。

1.4 Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似 復習と予告

(復習) §1.3 で、周期 2π の区分的 C^1 級関数の全体 $X_{2\pi}$ に内積

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

を導入し、Fourier 級数に用いる関数系 $(\cos mx$ と $\sin nx, e^{inx})$ の直交性を表した。
例えば

$$(m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \wedge m \neq n \Rightarrow (\cos mx, \cos nx) = 0,$$

$$(m, n \in \mathbb{N}) \wedge m \neq n \Rightarrow (\sin mx, \sin nx) = 0,$$

$$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\cos mx, \sin nx) = 0.$$

また一般の内積空間 X で、直交系 $\{\varphi_n\}$ による展開の係数を表す公式を得た。

$$f = \sum_n c_n \varphi_n \Rightarrow c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

(今日の予告) 次のことが成り立つことを示す。

- Fourier 級数の部分和は**直交射影**と呼ばれるものになっている。
- (一般の内積空間で) 直交射影は、ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ で測って**最良近似**である。
- (上2つの結果) Fourier 級数の部分和は最良近似である。

また、有名な **Bessel の不等式**を示し、ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ についての収束と**完全系**の概念を定義する。

1.4.1 垂線の足 (直交射影) は最も近い点

- 直線 $l = V$ とその上にない点 F . l 上の動点 G .
- 平面 $\pi = V$ とその上にない点 F . π 上の動点 G .

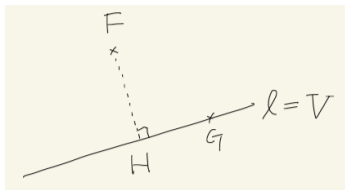


図 1: $V = l$

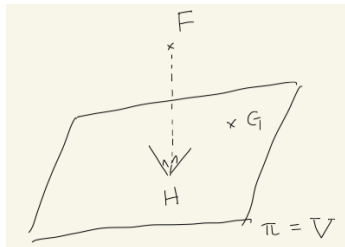


図 2: $V = \pi$

問 V 上の点 G をなるべく F に近くしたい。 FG が最短距離となる G (それを H と書く) を求められるか？

答 F から V に引いた垂線と V との交点 H

「 F から V に下ろした垂線の足 H 」あるいは「 F の V への直交射影」という。
論理を (短く) 言い切ると「最短 \Leftrightarrow 垂直」

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点 定理にする

定理 4.1 (垂直 \Leftrightarrow 最短)

体 \mathbb{K} 上の内積空間 X の部分空間 V と $f \in X, h \in V$ 対して

h は f の V への直交射影 $\Leftrightarrow h$ が最も f に近い

つまり次の2つが成り立つ。ただし $\| \cdot \|$ は内積から定まるノルムである。

- ① $f - h \perp V$ となる $h \in V$ があれば、 $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$.
- ② $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$ となる h (最短距離を達成する h) があれば $f - h \perp V$.

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点 定理の証明

(1) の証明 (直角三角形 $\triangle FGH$ の図を描く) $\forall g \in V$ に対して

$$\|f - h\|^2 + \|g - h\|^2 = \|f - g\|^2 \quad (\text{ピタゴラスの定理})$$

であるから $\|f - h\| \leq \|f - g\|$.

(2) の証明 $v := g - h$ とおく。関数

$$f(t) := \|f - (h + tv)\|^2 \quad (t \in \mathbb{K}).$$

は $t = 0$ で最小値を与える。これから実は $(f - h, v) = 0$ が導かれる。

ここでは $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合のみ紹介する。

$$\begin{aligned} f(t) &= \|(f - h) - tv, (f - h) - tv\| \\ &= \|f - h\|^2 - 2(f - h, v)t + t^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

が $t = 0$ のとき最小値をとるので、1 次の項の係数 $-2(f - h, v)$ は 0 である。

($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートを見よ。) □

系 4.2 (直交射影を表す式)

体 \mathbb{K} 上の内積空間 X の部分空間 V が直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ で張られている、つまり

$$V = \text{span}\langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \mid c_1, \dots, c_N \in \mathbb{K} \right\}$$

であれば、任意の $f \in X$ に対して、 f に最も近い $h \in V$ は (一意的に存在して)

$$(1) \quad h = \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n.$$

これは f の V への直交射影でもある。

V の範疇で、 f を近似するものを選ぶ、と考えると、(1) の h は、誤差 $\|f - h\|$ を最小にするので、「最良近似」と呼ぶのにふさわしい。

(Fourier 級数の部分和 s_N は (1) の h の形をしている。すなわち、Fourier 級数の部分和は (V の範囲内で) 最も f に近い。)

1.4.1 直交射影 (垂線の足) は最も近い点 直交射影の式

証明 $h \in V$ であるから、ある c_1, \dots, c_N が存在して

$$h = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、 $f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j, \varphi_n \right) = \sum_{j=1}^N c_j (\varphi_j, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

(4 つめの等号は前回説明済み)

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \quad \square$$

例 4.3 (Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似)

(三角関数を用いた) Fourier 級数の部分和

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は、 f の $V := \text{span}\langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos Nx, \sin Nx \rangle$ への直交射影であり、 f の V における最良近似でもある ($\|f - s_N\|$ が最も短いという意味)。

(複素指数関数を用いた) Fourier 級数の部分和

$$s_N = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

は、 f の $V := \text{span}\langle e^{-iNx}, \dots, e^{-ix}, e^{i0x}, e^{ix}, \dots, e^{iNx} \rangle$ への直交射影であり、 f の V における最良近似でもある (やはり $\|f - s_N\|$ が最も短いという意味)。 \square

1.4.2 Bessel の不等式

有名な Bessel の不等式を紹介する。

命題 4.4 (Bessel の不等式)

内積空間 X の直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ と任意の $f \in X$ に対して

$$(2) \quad \sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|f\|^2$$

が成り立つ。無限個の場合は (極限を取って)

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|f\|^2 \quad (\text{Bessel の不等式}).$$

特に $\{\psi_n\}$ が正規直交系の場合は

$$(4) \quad \sum_{n=1}^N |(f, \psi_n)|^2 \leq \|f\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2 \leq \|f\|^2.$$

1.4.2 Bessel の不等式

証明 $0, h, f$ を頂点とする直角三角形の図を描く。ピタゴラスの定理から

$$\|h\|^2 + \|f - h\|^2 = \|f\|^2.$$

ゆえに

$$\|h\|^2 \leq \|f\|^2.$$

左辺はやはりピタゴラスの定理より

$$\begin{aligned}\|h\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \left\| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N \left| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \right|^2 \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|f\|^2. \quad \square$$

1.4.3 完全系, Parseval の等式, 内積空間の収束

実は、任意の $f \in X$ に対して Bessel の不等式の不等号が等式となるような、つまり

$$(5) \quad (\forall f \in X) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} = \|f\|^2$$

が成り立つような直交系 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在するとき、 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は**完全系** (完全直交系) であるという。

またこの等式 (5) を **パーセバル Parseval の等式** と呼ぶ (「完全直交系に対して Parseval の等式が成り立つ」)。

N 項までの部分和 $\sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n$ を s_N と表すことにする。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} = \|f\|^2 &\Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \|s_N\|^2 = \|f\|^2 \\ &\Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N\| = 0. \end{aligned}$$

であるから ($\|s_N\|^2 + \|f - s_N\|^2 = \|f\|^2$ を思い出す)、

$$(6) \quad \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ が完全系} \Leftrightarrow (\forall f \in X) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N\| = 0.$$

1.4.3 完全系, Parseval の等式, 内積空間の収束

内積空間 X の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$(7) \quad \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ は } f \text{ に収束する} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - x_n\| = 0$$

と定義すると

$\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が完全系 \Leftrightarrow 任意の f に対して $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ は f に収束する。

すなわち、 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が X の完全系するとき、任意の $f \in X$ に対して

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n$$

が成り立つことになる。

例 4.5 (普通の Fourier 級数の場合)

$X_{2\pi}$ に $(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ という内積を与えた内積空間において、 $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と $\{\cos mx\}_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \cup \{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ は共に完全直交系である。

証明は手間がかかるので省略する (「数学とメディア」でやってある?)。

これは

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \right\| = 0$$

を意味する。ただし $\|\cdot\|$ は内積から定まるノルムである:

$$\|\varphi\| := \sqrt{(\varphi, \varphi)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

$\|\cdot\|$ についての収束は、 L^2 収束ということもある (既に紹介済み)。 □

問 この場合に Parseval の等式を書きなさい (解答はこの PDF の末尾)。

1.4 Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似 結び

今回の話は、実は Fourier 級数の L^2 理論のさわりである¹。

普通は、Lebesgue 積分を学んでから、 $L^2(-\pi, \pi)$ という完備な内積空間 (Hilbert 空間) を定義して、そこで議論を展開するが、内積空間 $(X_{2\pi})$ に完備性がなくても、この程度はやれる、ということである。

機会があれば、Lebesgue 積分、Hilbert 空間を学んで、フルバージョンを学ぶことを勧めたい。

積分は面積・体積レベルの話だと定義が曖昧なままでもなんとかなるが、Fourier 級数をきちんと取り扱おうとすると突き詰めて考える必要が生じる。Riemann が Riemann 積分、Lebesgue が Lebesgue 積分を考え出したきっかけは、ともに Fourier 級数であった、ということである。

¹「さわり」は、辞書によると、義太夫節や浄瑠璃で一曲のうち一番よい聴かせどころ。

1.4.4 演習 普通の Fourier 級数に対する Parseval の等式

問 普通の Fourier 級数の場合に Parseval の等式を書きなさい。

素朴な解答 もちろん、一般の Parseval の等式 (5) を書いて、それに当てはめれば解けるはず。Parseval の等式を再現するところからやってみよう。

$\{\varphi_n\}$ が完全直交系であれば

$$(8) \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n$$

が成り立つ (覚えるべき式)。直交系であることから、ピタゴラスの定理が適用できて

$$\|f\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \right|^2 \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2}.$$

ゆえに

$$(9) \quad \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \quad (\text{Parseval の等式}).$$

普通の Fourier 級数の場合、 $\{\varphi_n\}$ は $\{\cos mx\}_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \cup \{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ であるから

$$(10) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 = \frac{|(f, 1)|^2}{\|1\|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|(f, \cos nx)|^2}{\|\cos nx\|^2} + \frac{|(f, \sin nx)|^2}{\|\sin nx\|^2} \right).$$

1.4.4 演習 普通の Fourier 級数に対する Parseval の等式

準備として $n \in \mathbb{N}$ のとき、

$$\|\cos nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi,$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi,$$

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |1|^2 dx = 2\pi.$$

$$a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} \quad \text{よ} \text{り} \quad \frac{|(f, \cos nx)|^2}{\|\cos nx\|^2} = |a_n|^2 \|\cos nx\|^2 = \pi |a_n|^2.$$

$$\text{同様に} \quad \frac{|(f, \sin nx)|^2}{\|\sin nx\|^2} = \pi |b_n|^2.$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} \quad \text{よ} \text{り} \quad \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 = \frac{|(f, 1)|^2}{\|1\|^4} \quad \text{であるから} \quad \frac{|(f, 1)|^2}{\|1\|^2} = \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 \|1\|^2 = \frac{\pi}{2} |a_0|^2. \quad \text{これらを}$$

(10) に代入して

$$(11) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

(素朴な解答終わり)

1.4.4 演習 普通の Fourier 級数に対する Parseval の等式

実は簡単な別解がある。

(別解)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は直交系による展開なので、直接ピタゴラスの定理を適用して

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \left\| \frac{a_0}{2} \right\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|a_n \cos nx\|^2 + \|b_n \sin nx\|^2 \right) \\ &= \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 \|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 \|\cos nx\|^2 + |b_n|^2 \|\sin nx\|^2 \right) \\ &= \frac{|a_0|^2}{4} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 \pi + |b_n|^2 \pi \right) \\ &= \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right). \quad \square \end{aligned}$$

課題 1 について

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。(2014～).