

信号処理とフーリエ変換 第3回

～ 直交性 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年10月7日

1 本日の内容・連絡事項

2 Fourier 級数

- Fourier 級数の収束
 - 収束の強弱
- 直交性
 - 三角関数と指数関数の直交性
 - 対象とする関数の範囲
 - 関数の L^2 内積, L^2 ノルム
 - 内積の公理
 - 内積空間
 - 内積空間の基本的性質
 - 直交系と正規直交系
 - 正規化
 - 直交系による展開の係数の求め方

3 おまけ

- おまけ: 5 ページ $\{f_n\}$ が 0 に各点収束すること
- おまけ 2: 一般の周期関数の Fourier 級数

本日の内容・連絡事項

- (これはもっと早めに注意すべきでしたが) オンデマンド授業をしています
が、**授業内容・進行はあえて例年と同じ**ようにしています。それで動画を作ってみると、1回の授業の時間は結構ばらつきが出ます。多分板書してそれをノートにとってもらおうと時間がかかるけれど、スクリーンに映してそれを眺めてもらうには時間がかからない、ということだと考えています。
 - 動画の時間のばらつきは受け入れて下さい。
 - 重要な式を手で書く時間を確保して下さい (やり方は任せます)。
- Zoom オフィスアワーを月曜 12:30-13:30, 水曜 16:00-17:00 に設けます。
参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておきました。
- 前回、Mathematica を使いました。(レポート課題1の半分くらいはそういう内容なので) 自分の Mac で Mathematica を整備して、例に出したプログラムが動くようにしておくこと。
- 今回は、講義ノート [1] の §1.3 の部分 (直交系) の内容を講義します。

1.2.5 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1

- ① 「一様収束 \Rightarrow 各点収束」
- ② 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow L^p$ 収束」

注意: いずれも極限は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

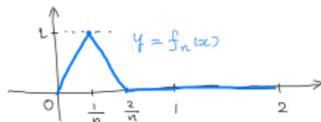
(2) の証明:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_a^b \left(\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx \\ &= \left(\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b - a) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (例 1)。
- 各点収束しても L^p 収束するとは限らない (例 2)。
- (これは説明を省略する) L^p 収束すれば、ある部分列が存在して、ほとんどいたるところ各点収束する (伊藤 [2])。

1.2.5 3つの収束の強弱 例1

$f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ は、グラフが $(0, 0)$, $(1/n, 1)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。

$$(\forall x \in [0, 2]) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (\text{各自証明してみよう. §2.1 を見よ。}).$$

- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は、任意の p に対して 0 に L^p 収束する ($1 \leq p < \infty$).

$\because 0 \leq f_n(x) \leq 1$ であるから、 $|f_n(x)|^p \leq |f_n(x)|$ であるので

$$\int_0^2 |f_n(x) - 0|^p dx = \int_0^2 |f_n(x)|^p dx \leq \int_0^2 |f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

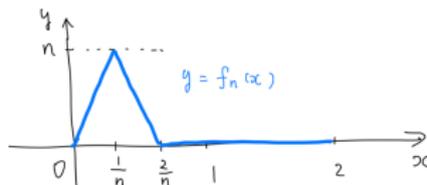
- しかし $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は一様収束しない。ある f に一様収束するならば、 f に各点収束するので、 $f(x) = 0$.

$$\sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x)| = 1 \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

($\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は各点収束するが一様収束しない、というのは、Gibbs の現象に似ている。)

1.2.5 3つの収束の強弱 例2

$f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ は、グラフが $(0, 0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する。
- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は一様収束しない。もし f に一様収束するならば、 $f(x) = 0$ のはずであるが

$$\sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x)| = n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は L^1 収束しない。実際 (やはり f に L^1 収束するならば、 $f(x) = 0$ であることが分かるので)

$$\int_0^2 |f_n(x) - 0| dx = \int_0^2 |f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1 \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

1 Fourier 級数

1.3 直交性

実は重要な直交性の話をする。

- 他の Fourier 変換にも、直交性が現れる。
- 内積を使った処理・考え方に慣れるべき。早めに触れよう。
- Fourier 級数は、直交系による展開で、係数の公式 (定理 3.10) は非常に広く一般的に成り立つ。ぜひともマスターしよう。
(通常の Fourier 級数だけでなく、Fourier の方法に現れる固有関数による「一般の Fourier 級数展開」, 直交多項式による展開などでも、この公式で係数が求まる。)
- 内積から導かれるノルムによる収束が重要になる。

1.3 直交性 1.3.1 三角関数と指数関数の直交性

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \dots\}$ とおく。

$$(1a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m \neq n),$$

$$(1b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N}, m \neq n),$$

$$(1c) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \in \mathbb{N}),$$

$$(1d) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.

$\overline{e^{inx}}$ の $\overline{}$ は、共役複素数を表す記号である。

$$\overline{1+2i} = 1-2i, \quad \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.$$

注意: (1a), (1c) の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を \mathbb{Z} で置き換えることは出来ない。(1b) の \mathbb{N} を \mathbb{Z} で置き換えることも出来ない。例えば $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos(-mx) \, dx = \pi \neq 0$.

1.3 直交性 1.3.2 対象とする関数の範囲

\mathbb{K} は \mathbb{R} または \mathbb{C} を表すとする¹。

この講義では、周期 2π かつ区分的に C^1 級の関数の全体を考える。

$$(2) \quad X_{2\pi} = X_{2\pi, \mathbb{K}} := \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \text{ 周期 } 2\pi, \text{ 区分的に } C^1 \text{ 級}\}.$$

これは \mathbb{K} 上のベクトル空間である (和 $f + g$, $c \in \mathbb{K}$ との積 cf が定義できる)。
 2π は省略しない方が良い。

(本当は、二乗可積分関数の全体

$$L^2(-\pi, \pi) = \left\{ f \mid f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C} \text{ Lebesgue 可測かつ } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

で話をしたい。そうすると、すっきりした完璧に近い議論が出来る。)

¹最初から $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに \mathbb{C} の場合はしばしば面倒になる。 \mathbb{C} の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

1.3 直交性 1.3.3 関数の L^2 内積, L^2 ノルム

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

$$(3) \quad (f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ のときは } \overline{\quad} \text{ がなくても同じ})$$

とおき、 f と g の内積と呼ぶ。

$$(4) \quad \|f\| := \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

とおき、 f のノルム (L^2 ノルム, 長さ, 大きさ) とよぶ。

注意: 一般に $c \in \mathbb{C}$ に対して $c\bar{c} = |c|^2$ であるから $f(x)\overline{f(x)} = |f(x)|^2$

1.3 直交性 1.3.3 関数の L^2 内積, L^2 ノルム

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$ ならば $(\cos mx, \cos nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ならば $(\sin mx, \sin nx) = 0$.
- $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ ならば $(\cos mx, \sin nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ ならば $(e^{imx}, e^{inx}) = 0$.

ノルムについても調べておこう。

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|\cos nx\| &= \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\cos 0x\| = \|1\| = \sqrt{2\pi}, \\(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \|e^{inx}\| &= \sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

例えば

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|^2 dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx} = \sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

1.3 直交性 1.3.4 内積の公理

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 \mathbb{C}^n の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.2 (内積の公理を満たすこと)

$X, (\cdot, \cdot)$ は、(i), (ii), (iii) を満たす。

- ❶ $(\forall f \in X) (f, f) \geq 0$. 等号 $\Leftrightarrow f = 0$.
- ❷ $(\forall f, g \in X) (g, f) = \overline{(f, g)}$.
- ❸ $(\forall f_1, f_2, g \in X) (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K}) (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)

細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「ほとんどいたるところ」0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

これから次式が導かれる。

$$(5) \quad (f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1} (f, g_1) + \overline{c_2} (f, g_2),$$

$$(6) \quad \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re}(f, g) + \|g\|^2.$$

(注: $(g, f) = \overline{(f, g)}$, $c + \bar{c} = 2 \operatorname{Re} c$ により $(f, g) + (g, f) = 2 \operatorname{Re}(f, g)$)

定義 3.3 (内積空間)

\mathbb{K} 上のベクトル空間 X と、 $X \times X$ で定義された関数 (\cdot, \cdot) が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、 (\cdot, \cdot) を X の**内積**、 X を \mathbb{K} 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

- ⓪ $(\forall f \in X) (f, f) \geq 0$. 等号 $\Leftrightarrow f = 0$.
- ⓫ $(\forall f, g \in X) (g, f) = \overline{(f, g)}$.
- ⓬ $(\forall f_1, f_2, g \in X) (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K}) (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

$X_{2\pi}$ は、(10 ページの (3) で定めた (\cdot, \cdot) と合わせて) 内積空間である。

$X_{2\pi}$ 以外の内積空間の例を (もちろん) ずっと前から知っている。

- \mathbb{R}^N は、 $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^N x_j y_j$ を内積とする \mathbb{R} 上の内積空間である。
- \mathbb{C}^N は、 $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^N x_j \bar{y}_j$ を内積とする \mathbb{C} 上の内積空間である。

1.3 直交性 1.3.6 内積空間の基本的性質 (1)

$\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$ の内積には慣れていていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.4 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f, g) = 0 \Rightarrow \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

さらに $f_1, f_2, \dots, f_n \in X$ が互いに直交している ($j \neq k \Rightarrow (f_j, f_k) = 0$) ならば

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \dots + \|f_n\|^2.$$

証明.

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + 2\operatorname{Re}(f, g) + (g, g) = (f, f) + (g, g) = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

□

1.3 直交性 1.3.6 内積空間の基本的性質 (2)

命題 3.5 (Schwarz の不等式)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

証明.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときに示す。 $f = 0$ のときは両辺とも 0. 以下 $f \neq 0$ とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 \leq \|tf + g\|^2 = \|f\|^2 t^2 + 2t(f, g) + \|g\|^2.$$

これから

$$0 \geq \frac{D}{4} = |(f, g)|^2 - \|f\|^2 \|g\|^2.$$

(ていねいに考えると、等号の成立条件も分かるけれど、それは省略する。) □

(最初は無視して良い) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は、 $(f, g) = re^{i\theta}$ ($r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$) として、 $\lambda := te^{-i\theta}$ ($t \in \mathbb{R}$) を用いて

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = \|f\|^2 t^2 + 2t|(f, g)| + \|g\|^2$$

となることから分かる。 □

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、 (\cdot, \cdot) はその内積、 $\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

① $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の2条件を満たすことをいう：

- $(\forall m, n) \ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
- $(\forall n) \ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$

② $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう：

$$(\forall m, n) \ (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases} .$$

(実は「直交系」という言葉はきちんと定義されないことが多く、 $(\varphi_n, \varphi_n) \neq 0$ という条件を要求している本は珍しいと思われるが、次の定理は便利なので、この講義ではこの定義を採用する。)

もちろん、**正規直交系は直交系**である。

1.3 直交性 1.3.8 正規化 (直交系から正規直交系を作る)

次は常識的なことで断りなく使われることも多い (簡単なので慣れて欲しい)。

命題 3.7

直交系 $\{\psi_n\}$ があるとき、 $\varphi_n := \frac{1}{\|\psi_n\|} \psi_n$ とおくと、 $\{\varphi_n\}$ は正規直交系である。

証明.

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \left(\frac{1}{\|\psi_m\|} \psi_m, \frac{1}{\|\psi_n\|} \psi_n \right) = \frac{1}{\|\psi_m\| \|\psi_n\|} (\psi_m, \psi_n).$$

$m \neq n$ ならば $(\psi_m, \psi_n) = 0$ であるから $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$.

$m = n$ ならば

$$(\varphi_m, \varphi_n) = (\varphi_n, \varphi_n) = \frac{1}{\|\psi_n\|^2} (\psi_n, \psi_n) = \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \|\psi_n\|^2 = 1.$$

□

1.3 直交性 1.3.8 正規化 (直交系から正規直交系を作る 例)

個々の関数の L^2 ノルムは求めてあるので、それで割り算すれば正規直交系が得られる。

例 3.8

$\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。 \square

例 3.9

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin nx, \dots \right\}$$

は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。 \square

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (1)

定理 3.10 (直交系による展開の係数)

X は内積空間で、 (\cdot, \cdot) はその内積とする。

① $\{\varphi_n\}$ は X の直交系で、 $f \in X$ が

$$(7) \quad f = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$$

と表されるならば

$$(8) \quad c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

② $\{\varphi_n\}$ は X の正規直交系で、 $f \in X$ が

$$f = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$$

と表されるならば

$$c_n = (f, \varphi_n) \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。 (1) を示す。

添字を表す文字を変えて、 $f = \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n ($1 \leq n \leq N$) に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^N c_m (\varphi_m, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

($m \neq n$ のとき $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ に注意。)

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

□

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。内積から定まるノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を用いて

$$(9) \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \right\| = 0$$

で級数の和を定義すると

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

証明.

任意の n に対して、 $N \geq n$ を満たす N に対して、

$$(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - \left(\sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \left(f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right).$$

Schwarz の不等式を用いて

$$|(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n)| = \left| \left(f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) \right| \leq \left\| f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m \right\| \|\varphi_n\|.$$

$N \rightarrow \infty$ とすると右辺は 0 に収束する。ゆえに左辺は 0。ゆえに $c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$. □

直交系による展開の係数の求め方 (4) 例

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(*) \quad a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\cos nx} dx}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{(f, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\sin nx} dx}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

また $a_0/2$ は $1 = \cos(0 \cdot x)$ の係数であるから

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{1} dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

直交系による展開の係数の求め方 (5) 例 (続き)

例 3.11 (通常 Fourier 級数を振り返る (続き))

一方

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

に対しては

$$c_n = \frac{(f, e^{inx})}{(e^{inx}, e^{inx})} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{inx}} dx}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

直交系による展開の係数の求め方 (6) 一般の周期

例 3.12 (一般の周期関数の Fourier 級数)

周期 T の関数 f の Fourier 級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

の場合の a_n, b_n も、周期 T の関数の空間 X_T における内積を

$$(f, g) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義して

$$a_n = \frac{(f, \cos \frac{2n\pi}{T} x)}{(\cos \frac{2n\pi}{T} x, \cos \frac{2n\pi}{T} x)}, \quad b_n = \frac{(f, \sin \frac{2n\pi}{T} x)}{(\sin \frac{2n\pi}{T} x, \sin \frac{2n\pi}{T} x)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)}$$

から求まる (やってみよう — おまけ 2 (このスライドの 2 つ先) も見てみよう)。これだけでは展開可能なことの “証明” にはならないけれど、係数の式は自信を持って書き下せるだろう。

2.1 おまけ: 5 ページ $\{f_n\}$ が 0 に各点収束すること

- a) $x = 0$ のとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- b) $0 < x \leq 2$ のとき、アルキメデスの公理より、ある自然数 N が存在して、 $Nx > 2$. このとき $x > \frac{2}{N}$. ゆえに $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$x > \frac{2}{N} \geq \frac{2}{n}.$$

このとき $f_n(x) = 0$. ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

以上より任意の $x \in [0, 2]$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. すなわち $\{f_n\}$ は定数関数 0 に $[0, 2]$ で各点収束する。

2.2 おまけ2: 24 ページ 一般の周期関数の Fourier 級数

第1回スライドの13ページに結果の式を書いておいた。再録しておく

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

「画像処理とフーリエ変換 練習問題」の問11も参考になる。解答の解法2を見ると、 $\cos \frac{2n\pi x}{T}$, $\sin \frac{2n\pi x}{T}$ で展開できることも理解できる。

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。(2014~).
- [2] 伊藤清三：ルベグ積分入門, 裳華房 (1963).