信号処理とフーリエ変換 第3回

〜 直交性 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020 年 10 月 7 日

目次

1. 本日の内容・連絡事項
2. Fourier 級数
   - Fourier 級数の収束
     - 収束の強弱
   - 直交性
     - 三角関数と指数関数の直交性
     - 対象とする関数の範囲
     - 関数の L^2 内積, L^2 ノルム
     - 内積の公理
     - 内積空間
     - 内積空間の基本的性質
     - 直交系と正規直交系
     - 正規化
     - 直交系による展開の係数の求め方
3. おまけ
   - おまけ: 5 ページ $\{f_n\}$ が 0 に各点収束すること
   - おまけ 2: 一般の周期関数の Fourier 級数

本日の内容・連絡事項

- (これはもっと早めに注意すべきでしたが) オンデマンド授業をしていますが、授業内容・進行はあえて例年と同じようにしています。それで動画を作ってみると、1 回の授業の時間は結構ばらつきが出ます。多分板書してそれをノートにとってもらうと時間がかかるけれど、スクリーンに映してそれを眺めてもらうには時間がかからない、ということだと考えています。
  - 動画の時間のばらつきは受け入れて下さい。
  - 重要な式を手で書く時間を確保して下さい (やり方は任せます)。

本日の内容・連絡事項

- (これはもっと早めに注意すべきでしたが) オンデマンド授業をしていますが、授業内容・進行はあえて例年と同じようにしています。それで動画を作ってみると、1 回の授業の時間は結構ばらつきが出ます。多分板書してそれをノートにとってもらうと時間がかかるけれど、スクリーンに映してそれを眺めてもらうには時間がかからない、ということだと考えています。
  - 動画の時間のばらつきは受け入れて下さい。
  - 重要な式を手で書く時間を確保して下さい (やり方は任せます)。
- Zoom オフィスアワーを月曜 12:30–13:30, 水曜 16:00–17:00 に設けます。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておきました。

本日の内容・連絡事項

- (これはもっと早めに注意すべきでしたが) オンデマンド授業をしていますが、授業内容・進行はあえて例年と同じようにしています。それで動画を作ってみると、1 回の授業の時間は結構ばらつきが出ます。多分板書してそれをノートにとってもらうと時間がかかるけれど、スクリーンに映してそれを眺めてもらうには時間がかからない、ということだと考えています。
  - 動画の時間のばらつきは受け入れて下さい。
  - 重要な式を手で書く時間を確保して下さい (やり方は任せます)。
- Zoom オフィスアワーを月曜 12:30–13:30, 水曜 16:00–17:00 に設けます。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておきました。
- 前回、Mathematica を使いました。(レポート課題 1 の半分くらいはそういう内容なので) 自分の Mac で Mathematica を整備して、例に出したプログラムが動くようにしておくこと。

本日の内容・連絡事項

- (これはもっと早めに注意すべきでしたが) オンデマンド授業をしていますが、授業内容・進行はあえて例年と同じようにしています。それで動画を作ってみると、1 回の授業の時間は結構ばらつきが出ます。多分板書してそれをノートにとってもらうと時間がかかるけれど、スクリーンに映してそれを眺めてもらうには時間がかからない、ということだと考えています。
  - 動画の時間のばらつきは受け入れて下さい。
  - 重要な式を手で書く時間を確保して下さい (やり方は任せます)。
- Zoom オフィスアワーを月曜 12:30–13:30, 水曜 16:00–17:00 に設けます。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておきました。
- 前回、Mathematica を使いました。(レポート課題 1 の半分くらいはそういう内容なので) 自分の Mac で Mathematica を整備して、例に出したプログラムが動くようにしておくこと。
- 今回は、講義ノート [1] の §1.3 の部分 (直交系) の内容を講義します。

1.2.5 やり残し: 3つの収束の強弱

1.2.5 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ L^p 収束」

注意: いずれも極限は共通である。

1.2.5 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ L^p 収束」

注意: いずれも極限は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

1.2.5 やり残し: 3 つの収束の強弱

定理 3.1

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ L^p 収束」

注意: いずれも極限は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx &\leq \int_a^b \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx \\ &= \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

1.2.5 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ L^p 収束」

注意: いずれも極限は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a,b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \leq \int_a^b \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx$$
$$= \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b-a) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (例 1)。

1.2.5 やり残し: 3 つの収束の強弱

定理 3.1

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ L^p 収束」

注意: いずれも極限は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) の証明:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \ dx \leq \int_a^b \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p dx$$
$$= \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right)^p (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (例 1)。
- 各点収束しても L^p 収束するとは限らない (例 2)。

1.2.5 やり残し: 3つの収束の強弱

定理 3.1

1. 「一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束」
2. 「(定義域が有界な場合) 一様収束 $\Rightarrow$ L^p 収束」

注意: いずれも極限は共通である。

(1) の証明: 任意の $x_0 \in [a, b]$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

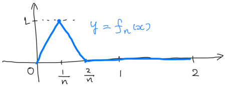
(2) の証明:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \ dx &\le \int_a^b \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\right)^p dx \\ &= \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\right)^p (b - a) \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

- (1), (2) どちらも、逆は成り立たない (例 1)。
- 各点収束しても L^p 収束するとは限らない (例 2)。
- (これは説明を省略する) L^p 収束すれば、ある部分列が存在して、ほとんどいたるところ各点収束する (伊藤 [2])。

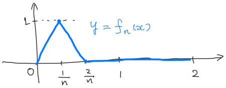
1.2.5 3つの収束の強弱　例 1

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。



1.2.5 3つの収束の強弱　例1

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。

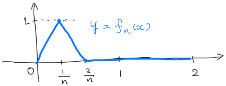


- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。

$$(\forall x \in [0,2]) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$ (各自証明してみよう. §2.1 を見よ。).

1.2.5 3つの収束の強弱　例1

$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, 1)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。

$$(\forall x \in [0,2]) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$ (各自証明してみよう．§2.<u>1</u> を見よ。).

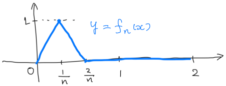
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、任意の p に対して 0 に L^p 収束する $(1 \le p < \infty)$。

$\because$　$0 \le f_n(x) \le 1$ であるから、$|f_n(x)|^p \le |f_n(x)|$ であるので

$$\int_0^2 |f_n(x) - 0|^p \, dx = \int_0^2 |f_n(x)|^p \, dx \le \int_0^2 |f_n(x)| \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n} \to 0.$$

1.2.5 3つの収束の強弱　例1

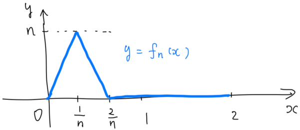
$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n,1)$, $(2/n,0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 (定数関数) に各点収束する。
$$(\forall x \in [0,2]) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (\text{各自証明してみよう. §2.}\underline{1}\text{ を見よ。}).$$
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、任意の p に対して 0 に L^p 収束する $(1 \le p < \infty)$。
$\because \quad 0 \le f_n(x) \le 1$ であるから、$|f_n(x)|^p \le |f_n(x)|$ であるので
$$\int_0^2 |f_n(x) - 0|^p \, dx = \int_0^2 |f_n(x)|^p \, dx \le \int_0^2 |f_n(x)| \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n} \to 0.$$
- しかし $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束しない。ある f に一様収束するならば、f に各点収束するので、$f(x) = 0$.
$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = 1 \not\to 0 \quad (n \to \infty).$$

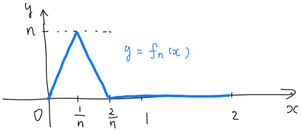
($\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は各点収束するが一様収束しない、というのは、Gibbs の現象に似ている。)

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



1.2.5 3つの収束の強弱　例 2

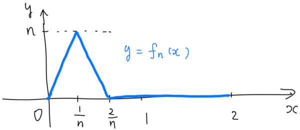
$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する。

1.2.5 3つの収束の強弱　例2

$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。

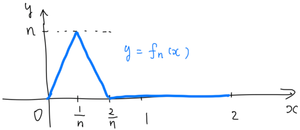


- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する。
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束しない。もし f に一様収束するならば、$f(x) = 0$ のはずであるが

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - = 0| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = n \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

1.2.5 3つの収束の強弱　例2

$f_n \colon [0,2] \to \mathbb{R}$ は、グラフが $(0,0)$, $(1/n, n)$, $(2/n, 0)$ を通る折れ線になる関数とする。



- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に各点収束する。
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束しない。もし f に一様収束するならば、$f(x) = 0$ のはずであるが
$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - = 0| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = n \to +\infty \quad (n \to \infty).$$
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は L^1 収束しない。実際 (やはり f に L^1 収束するならば、$f(x) = 0$ であることが分かるので)
$$\int_0^2 |f_n(x) - 0|\, dx = \int_0^2 |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1 \not\to 0 \quad (n \to \infty).$$

実は重要な直交性の話をする。

実は重要な直交性の話をする。

- 他の Fourier 変換にも、直交性が現れる。
- 内積を使った処理・考え方に慣れるべき。早めに触れよう。
- Fourier 級数は、直交系による展開で、係数の公式 (定理 3.10) は非常に広く一般的に成り立つ。ぜひともマスターしよう。
(通常の Fourier 級数だけでなく、Fourier の方法に現れる固有関数による「一般の Fourier 級数展開」, 直交多項式による展開などでも、この公式で係数が求まる。)
- 内積から導かれるノルムによる収束が重要になる。

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}),$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}),$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}),$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.
$\overline{e^{inx}}$ の $\overline{}$ は、共役複素数を表す記号である。

$$\overline{1 + 2i} = 1 - 2i, \quad \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。

(1a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \neq n),$$

(1b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n),$$

(1c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{N}),$$

(1d) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}} \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \; dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n).$$

一言でまとめると「違うものをかけて積分すると 0」.
$\overline{e^{inx}}$ の $\overline{}$ は、共役複素数を表す記号である。

$$\overline{1+2i} = 1 - 2i, \quad \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}.$$

注意: (1a), (1c) の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\mathbb{Z}$ で置き換えることは出来ない。(1b) の $\mathbb{N}$ を $\mathbb{Z}$ で置き換えることも出来ない。例えば $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos(-mx) dx = \pi \neq 0.$

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする[1]。

[1]最初から $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに $\mathbb{C}$ の場合はしばしば面倒になる。$\mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする [1]。

この講義では、周期 2π かつ区分的に C^1 級の関数の全体を考える。

$$(2) \qquad X_{2\pi} = X_{2\pi,\mathbb{K}} := \left\{ f \;\middle|\; f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad \text{周期 } 2\pi, \text{区分的に } C^1 \text{ 級} \right\}.$$

これは $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である (和 $f+g$, $c \in \mathbb{K}$ との積 cf が定義できる)。
$_{2\pi}$ は省略しない方が良い。

[1] 最初から $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに $\mathbb{C}$ の場合はしばしば面倒になる。$\mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする[1]。

この講義では、周期 2π かつ区分的に C^1 級の関数の全体を考える。

$$X_{2\pi} = X_{2\pi,\mathbb{K}} := \left\{ f \,\middle|\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad \text{周期 } 2\pi, \text{区分的に } C^1 \text{ 級} \right\}. \tag{2}$$

これは $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である (和 $f+g$, $c \in \mathbb{K}$ との積 cf が定義できる)。$_{2\pi}$ は省略しない方が良い。

(本当は、二乗可積分関数の全体

$$L^2(-\pi,\pi) = \left\{ f \,\middle|\, f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{C} \text{ Lebesgue 可測かつ } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < +\infty \right\}$$

で話をしたい。そうすると、すっきりした完璧に近い議論が出来る。)

[1] 最初から $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ としておけば十分ではあるが、証明などをするときに $\mathbb{C}$ の場合はしばしば面倒になる。$\mathbb{C}$ の場合の証明は講義ノートには書いてあるが、授業では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の証明のみを説明する、というやり方をしたい。

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

$$(3) \quad (f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ のときは } \overline{} \text{ がなくても同じ})$$

とおき、f と g の**内積**と呼ぶ。

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

(3) $\displaystyle (f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ 　($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは $\overline{}$ がなくても同じ)

とおき、f と g の**内積**と呼ぶ。

(4) $$\|f\| := \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx}$$

とおき、f の**ノルム** (L^2 ノルム, 長さ, 大きさ) とよぶ。

$f, g \in X_{2\pi}$ に対して

(3)　$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$　($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは $\overline{}$ がなくても同じ)

とおき、f と g の**内積**と呼ぶ。

(4)
$$\|f\| := \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx}$$

とおき、f の**ノルム** (L^2 ノルム, 長さ, 大きさ) とよぶ。

注意: 一般に $c \in \mathbb{C}$ に対して $c\overline{c} = |c|^2$ であるから $f(x)\overline{f(x)} = |f(x)|^2$

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$ ならば $(\cos mx, \cos nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ならば $(\sin mx, \sin nx) = 0$.
- $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ ならば $(\cos mx, \sin nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ ならば $\left(e^{imx}, e^{inx}\right) = 0$.

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$ ならば $(\cos mx, \cos nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ならば $(\sin mx, \sin nx) = 0$.
- $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ ならば $(\cos mx, \sin nx) = 0$.
- $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ ならば $\left(e^{imx}, e^{inx}\right) = 0$.

ノルムについても調べておこう。

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\cos 0x\| = \|1\| = \sqrt{2\pi},$$
$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \left\|e^{inx}\right\| = \sqrt{2\pi}.$$

上で説明した直交性は、この内積を使って書き表される。

- $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m\neq n$ ならば $(\cos mx,\cos nx)=0$.
- $m,n\in\mathbb{N}$, $m\neq n$ ならば $(\sin mx,\sin nx)=0$.
- $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$ ならば $(\cos mx,\sin nx)=0$.
- $m,n\in\mathbb{Z}$, $m\neq n$ ならば $\left(e^{imx},e^{inx}\right)=0$.

ノルムについても調べておこう。

$$\begin{aligned}
&(\forall n\in\mathbb{N}) \quad \|\cos nx\|=\|\sin nx\|=\sqrt{\pi}, \quad \|\cos 0x\|=\|1\|=\sqrt{2\pi},\\
&(\forall n\in\mathbb{Z}) \quad \left\|e^{inx}\right\|=\sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

例えば

$$\|\cos nx\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|^2dx}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx}=\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}.$$

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.2 (内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot, \cdot)$ は、(i), (ii), (iii) を満たす。

- (i) $(\forall f \in X)\ (f, f) \geq 0$. 等号 $\Leftrightarrow f = 0$.
- (ii) $(\forall f, g \in X)\ (g, f) = \overline{(f, g)}$.
- (iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.2 (内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot,\cdot)$ は、(i), (ii), (iii) を満たす。

(i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \ge 0$. 等号 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f, g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}$.

(iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)

細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「“ほとんどいたるところ” 0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.2 (内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot,\cdot)$ は、(i), (ii), (iii) を満たす。

- (i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \geq 0$. 等号 $\Leftrightarrow f = 0$.
- (ii) $(\forall f, g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}$.
- (iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

(証明は難しくないので任せる。)
細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「"ほとんどいたるところ" 0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

これから次式が導かれる。

(5) $$(f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1}(f, g_1) + \overline{c_2}(f, g_2),$$

(6) $$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + (f,g) + (g,f) + |g|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + |g|^2.$$

$X = X_{2\pi}$ とおく。数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の内積と同じような性質を持つ。

定理 3.2 (内積の公理を満たすこと)

X, $(\cdot, \cdot)$ は、(i), (ii), (iii) を満たす。

1. $(\forall f \in X)\ (f, f) \geq 0.$ 等号 $\Leftrightarrow f = 0.$
2. $(\forall f, g \in X)\ (g, f) = \overline{(f, g)}.$
3. $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g).$

(証明は難しくないので任せる。)
細かい注: (i) の $f = 0$ は、本当は「"ほとんどいたるところ" 0 に等しい」が正しい。連続関数については「いたるところ 0 に等しい」と同値である。

これから次式が導かれる。

$$(5) \qquad (f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1}(f, g_1) + \overline{c_2}(f, g_2),$$

$$(6) \qquad \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + |g|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f, g) + |g|^2.$$

(注: $(g, f) = \overline{(f, g)}$, $c + \overline{c} = 2\,\mathrm{Re}\,c$ により $(f, g) + (g, f) = 2\,\mathrm{Re}(f, g)$)

定義 3.3 (内積空間)

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X と、$X \times X$ で定義された関数 $(\cdot, \cdot)$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(\cdot, \cdot)$ を X の**内積**、X を $\mathbb{K}$ 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

(i) $(\forall f \in X)\ (f, f) \geq 0$. 等号 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f, g \in X)\ (g, f) = \overline{(f, g)}$.

(iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

定義 3.3 (内積空間)

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X と、$X \times X$ で定義された関数 $(\cdot,\cdot)$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(\cdot,\cdot)$ を X の**内積**、X を $\mathbb{K}$ 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

1. (i) $(\forall f \in X)\ (f,f) \geq 0.$ 等号 $\Leftrightarrow f = 0.$
2. (ii) $(\forall f,g \in X)\ (g,f) = \overline{(f,g)}.$
3. (iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g).$

$X_{2\pi}$ は、(31 ページの (3) で定めた $(,)$ と合わせて) 内積空間である。

定義 3.3 (内積空間)

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X と、$X \times X$ で定義された関数 $(\cdot, \cdot)$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、$(\cdot, \cdot)$ を X の**内積**、X を $\mathbb{K}$ 上の**内積空間** (プレ・ヒルベルト空間) という。

(i) $(\forall f \in X)\ (f, f) \geq 0$. 等号 $\Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $(\forall f, g \in X)\ (g, f) = \overline{(f, g)}$.

(iii) $(\forall f_1, f_2, g \in X)\ (\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$.

$X_{2\pi}$ は、(31 ページの (3) で定めた $(,)$ と合わせて) 内積空間である。

$X_{2\pi}$ 以外の内積空間の例を (もちろん) ずっと前から知っている。

- $\mathbb{R}^N$ は、$(\vec{x}, \vec{y}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j y_j$ を内積とする $\mathbb{R}$ 上の内積空間である。
- $\mathbb{C}^N$ は、$(\vec{x}, \vec{y}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j \overline{y_j}$ を内積とする $\mathbb{C}$ 上の内積空間である。

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.4 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f, g) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.4 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f, g) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

さらに f_1, f_2, $\cdots$, $f_n \in X$ が互いに直交している ($j \neq k \Rightarrow (f_j, f_k) = 0$) ならば

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2 .$$

$\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ の内積には慣れていると思うが、多くのことが一般の内積空間でも成立する。

命題 3.4 (ピタゴラスの定理)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して、

$$(f,g)=0 \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

さらに f_1, f_2, $\cdots$, $f_n \in X$ が互いに直交している ($j \neq k \Rightarrow (f_j, f_k) = 0$) ならば

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2 .$$

証明.

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = (f,f) + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + (g,g) = (f,f) + (g,g) = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

$\square$

命題 3.5 (Schwarz の不等式)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して

$$|(f,g)| \le \|f\| \, \|g\| \, .$$

証明.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときに示す。$f = 0$ のときは両辺とも 0. 以下 $f \neq 0$ とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 \le \|tf + g\|^2 = \|f\|^2 t^2 + 2t(f,g) + \|g\|^2 \, .$$

これから

$$0 \ge \frac{D}{4} = |(f,g)|^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \, .$$

(ていねいに考えると、等号の成立条件も分かるけれど、それは省略する。) □

命題 3.5 (Schwarz の不等式)

内積空間 X の任意の要素 f, g に対して

$$|(f,g)| \le \|f\|\,\|g\|\,.$$

証明.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のときに示す。$f=0$ のときは両辺とも 0. 以下 $f\neq 0$ とする。任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$0 \le \|tf+g\|^2 = \|f\|^2 t^2 + 2t(f,g) + \|g\|^2\,.$$

これから

$$0 \ge \frac{D}{4} = |(f,g)|^2 - \|f\|^2\,\|g\|^2\,.$$

(ていねいに考えると、等号の成立条件も分かるけれど、それは省略する。) □

(最初は無視して良い) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合は、$(f,g)=re^{i\theta}$ $(r\ge 0,\ \theta\in\mathbb{R})$ として、$\lambda := te^{-i\theta}$ $(t\in\mathbb{R})$ を用いて

$$0 \le \|\lambda f+g\|^2 = \|f\|^2 t^2 + 2t\,|(f,g)| + \|g\|^2$$

となることから分かる。

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m,n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$
2. $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう:

$$(\forall m, n) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(\,,\,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$
2. $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう:

$$(\forall m, n) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

(実は「直交系」という言葉はきちんと定義されないことが多く、$(\varphi_n, \varphi_n) \neq 0$ という条件を要求している本は珍しいと思われるが、次の定理は便利なので、この講義ではこの定義を採用する。)

定義 3.6 (内積空間の直交系と正規直交系)

X は内積空間、$(,)$ はその内積、$\{\varphi_n\}$ は X 内の点列とする。

1. $\{\varphi_n\}$ が**直交系**とは、次の 2 条件を満たすことをいう:
   - $(\forall m, n)\ m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0.$
   - $(\forall n)\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$
2. $\{\varphi_n\}$ が**正規直交系**とは、次の条件を満たすことをいう:

$$(\forall m, n) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}.$$

(実は「直交系」という言葉はきちんと定義されないことが多く、$(\varphi_n, \varphi_n) \neq 0$ という条件を要求している本は珍しいと思われるが、次の定理は便利なので、この講義ではこの定義を採用する。)

もちろん、正規直交系は直交系である。

次は常識的なことで断りなく使われることも多い (簡単なので慣れて欲しい)。

命題 3.7

直交系 $\{\psi_n\}$ があるとき、$\varphi_n := \dfrac{1}{\|\psi_n\|}\psi_n$ とおくと、$\{\varphi_n\}$ は正規直交系である。

次は常識的なことで断りなく使われることも多い (簡単なので慣れて欲しい)。

命題 3.7

直交系 $\{\psi_n\}$ があるとき、$\varphi_n := \dfrac{1}{\|\psi_n\|}\psi_n$ とおくと、$\{\varphi_n\}$ は正規直交系である。

証明.

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \left(\frac{1}{\|\psi_m\|}\psi_m, \frac{1}{\|\psi_n\|}\psi_n\right) = \frac{1}{\|\psi_m\|\,\|\psi_n\|}(\psi_m, \psi_n).$$

$m \neq n$ ならば $(\psi_m, \psi_n) = 0$ であるから $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$.
$m = n$ ならば

$$(\varphi_m, \varphi_n) = (\varphi_n, \varphi_n) = \frac{1}{\|\psi_n\|^2}(\psi_n, \psi_n) = \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\|\psi_n\|^2 = 1.$$

□

個々の関数の L^2 ノルムは求めてあるので、それで割り算すれば正規直交系が得られる。

例 3.8

$\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。 □

個々の関数の L^2 ノルムは求めてあるので、それで割り算すれば正規直交系が得られる。

例 3.8

$\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。 □

例 3.9

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$ は $X_{2\pi}$ の直交系である。

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin nx, \cdots\right\}$$

は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。 □

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (1)

定理 3.10 (直交系による展開の係数)

X は内積空間で、$(,)$ はその内積とする。

1. $\{\varphi_n\}$ は X の直交系で、$f \in X$ が

$$f = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \tag{7}$$

と表されるならば

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \quad (n = 1, 2, \cdots, N). \tag{8}$$

2. $\{\varphi_n\}$ は X の正規直交系で、$f \in X$ が

$$f = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$$

と表されるならば

$$c_n = (f, \varphi_n) \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (2) 定理の証明

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \displaystyle\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \displaystyle\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n)$$

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \le n \le N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right)$$

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \leq n \leq N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{N} c_m \left(\varphi_m, \varphi_n \right)$$

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \leq n \leq N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{N} c_m \left(\varphi_m, \varphi_n \right) = c_n \left(\varphi_n, \varphi_n \right).$$

($m \neq n$ のとき $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ に注意。)

証明.

(1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、$f = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m$ と書き直しても良い。

任意の n $(1 \leq n \leq N)$ に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{N} c_m \left(\varphi_m, \varphi_n \right) = c_n \left(\varphi_n, \varphi_n \right).$$

($m \neq n$ のとき $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ に注意。)

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_m, \varphi_n)}.$$

□

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。内積から定まるノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を用いて

(9) $$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\| = 0$$

で級数の和を定義すると

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

1.3.9 直交系による展開の係数の求め方 (3) 無限和の場合

実は無限和でも成り立つ。内積から定まるノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ を用いて

$$(9) \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\| = 0$$

で級数の和を定義すると

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

証明.

任意の n に対して、$N \geq n$ を満たす N に対して、

$$(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \left(f - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right).$$

Schwarz の不等式を用いて

$$|(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n)| = \left| \left(f - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m, \varphi_n \right) \right| \leq \left\| f - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m \right\| \|\varphi_n\|.$$

$N \to \infty$ とすると右辺は 0 に収束する。ゆえに左辺は 0. ゆえに $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$. □

直交系による展開の係数の求め方 (4) 例

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

直交系による展開の係数の求め方 (4) 例

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\star) \qquad a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\cos nx}\,dx}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx,$$

$$b_n = \frac{(f, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\sin nx}\,dx}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx.$$

直交系による展開の係数の求め方 (4) 例

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\star) \qquad a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\cos nx}\,dx}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx,$$

$$b_n = \frac{(f, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\sin nx}\,dx}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx.$$

また $a_0/2$ は $1 = \cos(0 \cdot x)$ の係数であるから

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{1}\ dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx \quad \therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx.$$

直交系による展開の係数の求め方 (5) 例 (続き)

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る (続き))

一方

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

に対しては

直交系による展開の係数の求め方 (5) 例(続き)

例 3.11 (通常の Fourier 級数を振り返る (続き))

一方

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

に対しては

$$c_n = \frac{(f, e^{inx})}{(e^{inx}, e^{inx})} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{inx}}dx}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{inx}}dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

直交系による展開の係数の求め方 (6) 一般の周期

例 3.12 (一般の周期関数の Fourier 級数)

周期 T の関数 f の Fourier 級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

の場合の a_n, b_n も、周期 T の関数の空間 X_T における内積を

$$(f, g) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義して

直交系による展開の係数の求め方 (6) 一般の周期

例 3.12 (一般の周期関数の Fourier 級数)

周期 T の関数 f の Fourier 級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

の場合の a_n, b_n も、周期 T の関数の空間 X_T における内積を

$$(f,g) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\overline{g(x)}dx$$

で定義して

$$a_n = \frac{(f, \cos\frac{2n\pi}{T}x)}{(\cos\frac{2n\pi}{T}x, \cos\frac{2n\pi}{T}x)}, \quad b_n = \frac{(f, \sin\frac{2n\pi}{T}x)}{(\sin\frac{2n\pi}{T}x, \sin\frac{2n\pi}{T}x)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f,1)}{(1,1)}$$

から求まる (やってみよう — おまけ 2 (このスライドの 2 つ先) も見てみよう)。これだけでは展開可能なことの “証明” にはならないけれど、係数の式は自信を持って書き下せるだろう。

2.1 おまけ: 5ページ $\{f_n\}$ が 0 に各点収束すること

(a) $x = 0$ のとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

(b) $0 < x \leq 2$ のとき、アルキメデスの公理より、ある自然数 N が存在して、$Nx > 2$. このとき $x > \frac{2}{N}$. ゆえに $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$x > \frac{2}{N} \geq \frac{2}{n}.$$

このとき $f_n(x) = 0$. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

以上より任意の $x \in [0, 2]$ に対して、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. すなわち $\{f_n\}$ は定数関数 0 に $[0, 2]$ で各点収束する。

2.2 おまけ 2: 24 ページ 一般の周期関数の Fourier 級数

第 1 回スライドの 13 ページに結果の式を書いておいた。再録しておくと

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

「画像処理とフーリエ変換 練習問題」の問 11 も参考になる。解答の解法 2 を見ると、$\cos \frac{2n\pi x}{T}$, $\sin \frac{2n\pi x}{T}$ で展開できることも理解できる。

参考文献

[1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/fourier-lecture-notes.pdf, 以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを直した。 (2014〜).

[2] 伊藤清三：ルベーグ積分入門, 裳華房 (1963).