

画像処理とフーリエ変換 課題 No. 3 (2020/1/8 出題, 締め切り 1/25 18:00)

__年__組__番 氏名_____ (Oh-o! Meiji に PDF で提出することを推奨, または A4 サイズの紙で桂田の研究室メールボックスに投函。)

(課題 No. 1, 2 レポートを提出しそびれた人用。)

(a) $a > 0$ に対して、関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

で定めるとき、 f の Fourier 変換を (Fourier 変換の定義に基づき) 求めよ。

(b) $a > 0$ に対して、関数 $g(x) = \frac{\sin(ax)}{ax}$ ($x \in \mathbb{R}$) の Fourier 変換を求めよ (結果だけでなく、そうなる理由も述べよ)。

(c) 連続関数 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)),$$

$$(2) \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす u を求めたい (波動方程式の初期値問題)。

(1) u の x に関する Fourier 変換 $\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、それを解け。

(2) \hat{u} を逆 Fourier 変換することによって、 u を求めよ。(この問題の解の公式は有名であり、それによると $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy$ となる。検算のために用いると良い。)