画像処理とフーリエ変換 課題 No. 3　(2020/1/8 出題, 締め切り 1/25 18:00)

__年__ 組____番　氏名____________　(Oh-o! Meiji に PDF で提出することを推奨, または A4 サイズの紙で桂田の研究室メールボックスに投函。)

(課題 No. 1, 2 レポートを提出しそびれた人用。)

(a) $a>0$ に対して、関数 f を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & (|x|<a)\\ 0 & (|x|>a)\end{cases}$$

で定めるとき、f の Fourier 変換を (Fourier 変換の定義に基づき) 求めよ。

(b) $a>0$ に対して、関数 $g(x)=\dfrac{\sin(ax)}{ax}$ $(x\in\mathbb{R})$ の Fourier 変換を求めよ (結果だけでなく、そうなる理由も述べよ)。

(c) 連続関数 $\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\quad ((x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)), \tag{1}$$

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\quad (x\in\mathbb{R}) \tag{2}$$

を満たす u を求めたい (波動方程式の初期値問題)。

(1) u の x に関する Fourier 変換 $\hat{u}(\xi,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、それを解け。

(2) $\hat{u}$ を逆 Fourier 変換することによって、u を求めよ。(この問題の解の公式は有名であり、それによると $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)\,dy$ となる。検算のために用いると良い。)

解説

(a) 講義ノートに書いてあるので省略 (後回し)。

(b) 講義ノートに書いてあるので省略 (後回し)。

(c) (1)

$$\frac{d^2}{dt^2}\widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2\widehat{u}(\xi,t), \quad \widehat{u}(\xi,0)=0, \quad \frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi,0)=\widehat{\psi}(\xi).$$

(一見難しそうだが) 任意に $\xi(\neq 0)$ を定めて考えると、これは単振動の方程式であり、一般解は

$$\widehat{u}(\xi,t) = A\cos(\xi t) + B\sin(\xi t) \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

初期条件に代入して

$$A=0, \quad \xi B = \widehat{\psi}(\xi).$$

これから $A=0$, $B=\dfrac{\widehat{\psi}(\xi)}{\xi}$. ゆえに

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{\sin(\xi t)}{\xi}\widehat{\psi}(\xi) = t\,\mathrm{sinc}(t\xi)\widehat{\psi}(\xi).$$

なお、$\xi=0$ の場合は

$$\widehat{u}(0,t) = A + Bt \quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

から $A=0$, $B=\widehat{\psi}(0)$ であるから

$$\widehat{u}(0,t) = t\widehat{\psi}(0) = t\,\mathrm{sinc}(t\xi)\widehat{\psi}(\xi)\Big|_{\xi=0}.$$

ゆえにすべての ξ に対して

$$(\star) \qquad \widehat{u}(\xi,t) = t\,\mathrm{sinc}(t\xi)\widehat{\psi}(\xi).$$

(2) ここで

$$G(x,t) := \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^*\left[\mathrm{sinc}(t\xi)\right](x)$$

とおくと (b) より

$$G(x,t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{2t} & (|x|<t)\\ 0 & (|x|>t)\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{2} & (|x|<t)\\ 0 & (|x|>t).\end{cases}$$

また

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left[G(\cdot,t)\right](\xi) = t\,\mathrm{sinc}(t\xi).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\widehat{u}(\xi,t) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left[G(\cdot,t)\right](\xi)\widehat{\psi}(\xi) = \mathcal{F}\left[G(\cdot,t)*\psi\right](\xi).$$

Fourier 逆変換すると ($|x-y|<t \Leftrightarrow y\in[x-t,x+t]$ に注意して)

$$u(x,t) = G(\cdot,t)*\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\psi(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)\,dy.\blacksquare$$