

信号処理とフーリエ変換

桂田 祐史

2014年10月3日, 2020年2月29日

筆記体 (cursive letters, script letters)

Fourier 変換を学ぶので F はちゃんと覚えよう。それ以外は読めると良い (うまく書けなくても)。

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

ギリシャ文字

ギリシャ語のアルファベットは、24 文字からなっている。大文字、小文字、対応するローマ字、読み (英語、仮名、発音記号) を以下に示す。

A	α	a	alpha	アルファ	áelfə
B	β	b	beta	ベータ	bí:tə, béitə
Γ	γ	g	gamma	ガンマ	gáemə
Δ	δ	d	delta	デルタ	déltə
E	ϵ, ε	e	epsilon	イプシロン	épsilən/-lan, epsáilən
Z	ζ	z	zeta	ゼータ	zí:tə
H	η	e	eta	エータ	ítə, éitə
Θ	θ, ϑ	t	theta	シータ	θí:tə, théitə
I	ι	i	iota	イオタ	íoutə, aióutə
K	κ	k	kappa	カッパ	káepə
Λ	λ	l	lambda	ラムダ	láemdə
M	μ	m	mu	ミュー	mju:, mu:
N	ν	n	nu	ニュー	nju:, nu:
Ξ	ξ	x	xi	クシー	gzai, ksi:/-sai
O	\omicron	o	omicron	オミクロン	óumikrən, oumái-
Π	π, ϖ	p	pi	パイ	pai
P	ρ, ϱ	r	rho	ロー	rou
Σ	σ, ς	s	sigma	シグマ	sígmə
T	τ	t	tau	タウ	tau, tɔ:
Υ	υ	u	upsilon	ウプシロン	jú:psilən, ju:psáilən
Φ	ϕ, φ	p	phi	ファイ	fí:, fai
X	χ	c	chi	カイ	kai
Ψ	ψ	p	psi	プサイ	psai, psi:/-sai
Ω	ω	o	omega	オメガ	óumigə, oumégə/-mí:-

ネットで「ギリシャ文字 読み方」あるいは「ギリシャ文字 書き方」で検索すると、色々ヒットする。 ξ や ρ は高校ではあまり見かけない人が多いであろう (複素関数だと ζ が良く出て来るが...)。少し練習しておくことを勧める。

記号表

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ (最近は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と書くのが普通かな?)

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

\mathbb{Q} = 有理数全体の集合

\mathbb{R} = 実数全体の集合

\mathbb{C} = 複素数全体の集合

\mathbb{K} で \mathbb{R}, \mathbb{C} のどちらかを表すことが多い。

$X_{2\pi} = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ 区分的に } C^1 \text{ 級で、周期 } 2\pi \text{ の周期関数}\}$ (この文書だけの記号, p. 20)

δ_{mn} クロネッカーのデルタ ($m = n$ ならば 1, そうでなければ 0)

\bar{z} 複素数 z の共役複素数 (例えば $\overline{1+2i} = 1-2i$)

$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ それぞれ z の実部、虚部 (例えば $\operatorname{Re}(1+2i) = 1, \operatorname{Im}(1+2i) = 2$)

$\operatorname{Span}\langle \varphi_1, \dots, \varphi_N \rangle = \{c_1\varphi_1 + \dots + c_N\varphi_N \mid c_1, \dots, c_N \in \mathbb{K}\}$ (p. 141)

f の Fourier 変換は、 $\mathcal{F}f, \mathcal{F}f, \widehat{f}, \mathcal{F}[f(x)](\xi)$ などの記号で表す。 \mathcal{F}, \mathcal{F} は F の花文字、筆記体である (フーリエ解析を勉強しているのだから、F くらいは慣れて欲しい)。

$\operatorname{sinc} x := \frac{\sin x}{x}$ (発音は Wikipedia 等によると [sɪŋk])

$$\int_{-a}^a e^{ibx} dx = 2a \operatorname{sinc}(ab).$$

覚えておいて欲しい用語等

f が**偶関数** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x) f(-x) = f(x)$.

f が**奇関数** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x) f(-x) = -f(x)$.

f が C^1 級とは、 f が各変数について偏微分可能で、それら偏導関数がみな連続であることをいう。

複素数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は、 $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, a(n) = a_n$ という写像とみなせる。複素数列の全体を $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ と表す (集合 X から集合 Y への写像全体の集合を Y^X と書く慣習に基づく)。

同様に、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は、 $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ という写像とみなせ、そういうものの全体を $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ と表す。

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ が**区分的に C^1 級**とは、ある有限数列 $\{x_j\}_{j=0}^N$ が存在して、

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

かつ各 $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して、 f は开区間 (x_{j-1}, x_j) で C^1 級で、極限

$$\lim_{x \rightarrow x_{j-1}+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_j-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_{j-1}+0} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_j-0} f'(x)$$

が存在することをいう。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が**区分的に C^1 級**とは、任意のコンパクト区間 $[a, b]$ に対して、 f (の $[a, b]$ への制限) が $[a, b]$ で区分的に C^1 級であることをいう。

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ が連続な場合は、区分的に C^1 級とは、ある有限数列 $\{x_j\}_{j=0}^N$ が存在して、

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

かつ各 $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して、 f を $[x_{j-1}, x_j]$ に制限すると C^1 級であることと同値である。つまり x_j では片側微分係数 $f'(x_j - 0), f'(x_j + 0)$ が存在する、ということである。

よく使う事項

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin(n + 1/2)\pi = (-1)^n.$$

部分積分

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

広義積分: 簡単のため、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は連続とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx.$$

積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換): 簡単のため、 $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $F: [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ が C^1 級ならば

$$\frac{d}{d\xi} \int_a^b F(x, \xi) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \xi} F(x, \xi) dx \quad (\xi \in [\alpha, \beta]).$$

広義積分の場合はやや難しいが、

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} F(x, \xi) \right| \leq \varphi(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx < +\infty$$

を満たす φ が存在する場合は

$$\frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \xi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} F(x, \xi) dx \quad (\xi \in [\alpha, \beta]).$$

(Fourier 変換の場合、 $F(x, \xi) = f(x)e^{-ix\xi}$ であるから、 $\varphi(x) := |xf(x)|$ について $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx < +\infty$ が成り立てば良い。)

確率積分 (Gauss 積分)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

目次

イントロ	9
この講義は	9
歴史について	10
第1章 Fourier 級数 (復習+α)	12
1.1 概観 (ほぼ復習) — 2つの定理もどきから	12
1.2 関数列の収束	17
1.3 直交性 (内積空間)	20
1.4 “最短距離 \Leftrightarrow 垂直” (最近点=直交射影) の原理	29
1.4.1 「最短 \Leftrightarrow 垂直」の原理と直交射影	29
1.4.2 Fourier 級数の部分和は直交射影であり、(ある意味で) 最良近似である	32
1.4.3 Bessel の不等式, Parseval の等式, 完全正規直交系	33
1.5 微分との関係	36
1.6 この章のまとめ	40
1.7 おまけ: この後の Fourier 級数の勉強	41
第2章 Fourier 変換	42
2.0 イントロ	42
2.1 Fourier 変換の導入, Fourier の反転公式	43
2.1.1 詳しい目の説明	43
2.1.2 軽めの説明	46
2.2 定義式・反転公式から得られる便利な公式	47
2.3 具体的な関数の Fourier 変換	48
2.3.1 Fourier 変換とのつきあい方	48
2.3.2 覚えるべきフーリエ変換	48
2.3.3 e^{-ax^2} の Fourier 変換	53
2.3.4 おまけ: $\frac{1}{x^2+a^2}$ の Fourier 変換の複素関数論を使った導出	55
2.3.5 Mathematica の利用	56
2.4 Fourier 変換の性質 (畳み込み以外)	57
2.4.1 線形性	57
2.4.2 Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係	57
2.4.3 平行移動	57
2.4.4 スケーリング	58
2.4.5 導関数の Fourier 変換	58
2.4.6 Fourier 変換の導関数	58
2.5 おまけ: 使用した微積分の式変形のまとめ	59
2.6 おまけ: 滑らかさ (\equiv 微分可能性) と遠方での減衰性の関係	60
2.7 おまけ: Fourier 変換向きの関数空間	61
2.7.1 二乗 (自乗) 可積分関数の空間 $L^2(\mathbb{R})$ と Sobolev 空間 $H^m(\mathbb{R})$	62

2.7.2	急減小関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ と緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	62
第 3 章	離散 Fourier 変換	64
3.1	離散 Fourier 係数 — なぜそのように定義するか	65
3.2	離散 Fourier 変換	70
3.3	FFT について	75
3.3.1	耳学問	75
3.3.2	Mathematica で離散 Fourier 変換	76
3.4	おまけ: 実関数の場合、離散余弦変換、離散正弦変換	76
3.4.1	準備: 離散 Fourier 係数 C_n, A_n, B_n の関係	76
3.4.2	実関数の離散 Fourier 変換	77
3.4.3	離散余弦変換	78
3.4.4	離散正弦変換	79
第 4 章	音声信号の周波数を調べる実験	81
4.1	まずやってみよう	81
4.1.1	準備	81
4.1.2	guitar-5-3.wav の音を離散 Fourier 変換する	81
4.2	PCM による音のデジタル信号表現	84
4.3	結果の分析	85
4.3.1	一般論の復習	85
4.3.2	今回の実習では	85
4.3.3	$ C_n $ ($1 \leq n \leq N - 1$) は左右対称	86
4.3.4	第 n 項の周波数は $ n /T$	86
4.3.5	より精密に	87
4.4	Mathematica での音の取り扱い	88
第 5 章	サンプリング定理	89
5.1	定理と証明	89
5.2	余談: 歴史覚書と発展	90
5.2.1	歴史覚書	90
5.2.2	小倉の定理	91
第 6 章	離散時間 Fourier 変換と Fourier ファミリー	92
6.1	離散時間 Fourier 変換	92
6.2	Fourier ファミリーの一覧表	93
第 7 章	畳み込み	94
7.1	はじめに	94
7.2	畳み込みの形式的定義	95
7.3	畳み込みの例	95
7.3.1	Fourier 級数の Dirichlet 核	95
7.3.2	静電場からの例	96
7.3.3	軟化作用素	99
7.3.4	高速乗算法	99
7.4	畳み込みの基本的な性質の証明	99
7.4.1	線形性	99

7.4.2	交換法則 $f * g = g * f$	99
7.4.3	結合法則 $(f * g) * h = f * (g * h)$	100
7.4.4	零因子の非存在 (the Titchmarsh convolution theorem)	100
7.5	畳み込みの Fourier 変換は Fourier 変換の積	100
7.5.1	“普通の関数” の Fourier 変換の場合	101
7.5.2	周期関数の “Fourier 変換” — Fourier 係数の場合	102
7.5.3	周期数列の “Fourier 変換” — 離散 Fourier 変換の場合	103
7.5.4	数列の “Fourier 変換” — 離散時間 Fourier 変換の場合	104
7.5.5	(おまけ) 共役 Fourier 変換	105
7.6	微分との関係	106
第 8 章	デジタル・フィルター	107
8.1	離散信号	107
8.2	畳込みと単位インパルス	107
8.3	線形定常フィルター (LTI フィルター)	108
8.4	FIR フィルター	109
8.5	音声信号の高音部をカットする実験	109
8.5.1	最初は以前やったことの復習	111
8.5.2	サンプリング周波数を変えて再生	111
8.5.3	離散 Fourier 変換してスペクトルを表示	112
8.5.4	高い音をカットしてみる	113
8.6	デジタル・フィルターを作る	114
8.6.1	全体の処理の流れ: サンプリングしてからフィルターに入力	114
8.6.2	正弦波をサンプリングすると等比数列が得られる	115
8.6.3	元の信号の周波数と正規化周波数の関係	116
8.6.4	離散化した正弦波をフィルターに入力すると — フィルターの周波数特性	116
8.6.5	ローパス・フィルター	117
第 9 章	Fourier 変換の微分方程式への応用	121
9.1	まず簡単な例 — 解が畳み込みが表せる仕組みを見る	121
9.2	半平面における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題	122
9.3	熱方程式の初期値問題	124
9.4	1次元波動方程式の初期値問題	127
第 10 章	応用: CT の数理	128
10.1	準備: 多変数関数の Fourier 変換	128
10.2	準備	128
10.3	CT の数理	128
付録 A	問題解答	133
付録 B	参考書案内 & 独り言	135
付録 C	Fourier 級数 (第 1 章) の補足	138
C.1	内積空間の距離と極限	138
C.2	Fourier 余弦級数, Fourier 正弦級数	139
C.3	参考: 内積空間の不等式 (Bessel の不等式, Schwarz の不等式, 最良近似性)	141
C.4	Fourier 級数と一様収束	144

C.5 備忘録	147
付録 D Hilbert 空間	148
D.1 射影定理	148
D.2 Riesz の表現定理	150
D.3 書き足そうか	150
付録 E Fourier 変換に関する事項のもう少し数学的な取り扱い	151
E.1 Lebesgue 積分の紹介	151
E.1.1 耳学問	151
E.1.2 零集合	151
E.1.3 測度空間、可測関数、完備性	151
E.1.4 Lebesgue 測度, Lebesgue 可測関数	151
E.1.5 ほとんどいたるところ等しい関数の同一視	151
E.1.6 Lebesgue 空間	152
E.2 Lebesgue 積分の収束定理	153
E.2.1 項別積分	153
E.2.2 微分と積分の順序交換	153
E.3 Lebesgue 可積分な関数の Fourier 変換	154
E.4 Lebesgue の意味で自乗可積分な関数の Fourier 変換	155
付録 F Fourier 変換に関する事項のもう少し数学的な取り扱い (旧版)	157
F.1 記号表	157
F.2 \mathbb{R} 上の関数の Fourier 変換と畳込み	157
F.2.1 $L^1(\mathbb{R})$ に属する関数についての定義	157
F.2.2 $L^2(\mathbb{R})$ に属する関数についての定義	158
F.2.3 その他の空間での Fourier 変換	159
F.2.4 畳込み	159
F.2.5 畳込みと Fourier 変換	160
F.2.6 Fourier 変換の流儀	160
F.2.7 その他	161
F.3 \mathbb{R} 上の周期 2π の関数の Fourier 変換と畳み込み	161
F.4 \mathbb{Z} 上の関数の離散時間 Fourier と畳み込み	161
付録 G 離散 Fourier 変換についてのガラクタ箱	163
G.1 離散 Fourier 係数を用いた級数の和	163
G.2 数学的応用 1 巡回行列	165
付録 H 微分方程式	167
H.1 1次元空間 \mathbb{R}^1 における波動方程式	167
H.1.1 d'Alembert の解	167
H.1.2 波動方程式の初期値問題, d'Alembert の波動公式	169
付録 I $[0, \infty)$ 上の関数の Laplace 変換と畳み込み	171

付録J	メモ	172
J.1	172
J.2	sinc	172
J.3	復習: 周期、周波数、角周波数	173
付録K	Laplace 変換、z 変換	175
K.0.1	Laplace 変換	175
K.1	z 変換	175

イントロ

この講義は

「数学とメディア」という講義科目に続くものと考えてもらいたい。

テーマを手短に説明すると

この講義のテーマは、数学としては ^{フーリエ}Fourier 解析である。

応用例としては、主に信号処理を取り上げる。

どんな風にやるか

すべてを数学的に厳密に説明しようとは考えていない。重要な概念と計算手法のいくつかにスポットライトをあてることを目的として、収束等の問題の数学的正当化は必要な人が必要になったときに各自で学んで下さい、というスタンスでやる¹。

Fourier 解析は、数学として真面目に説明しようとする、かなり難しい。無限次元の解析学の性格があつて、Lebesgue ^{ルベグ}積分や関数解析を学んだ後か、少なくともそれらと並行して学ぶもので、数学科では3年生または4年生の科目であるのが普通である。それでも超関数による取り扱いまで説明するのは不可能で、それをするのはゼミレベル、大学院レベルということになる。

一方で Fourier 解析は、理工系の人間にとって重要な道具であり、なるべく早い段階で出会いを済ませるべきものである。実際私(桂田)自身は、大学2年生の春学期に物理学の授業(「振動と波動」という科目名だったか)の中で遭遇することになった²。そういうわけで、2年生の春学期に「数学とメディア」という名前の科目で、振動現象・波動現象とからめて学ぶのは自然である、とも言える(カリキュラム案を聞いたとき「なるほど」と思いました)。

演習について

授業では、演習のために時間を割けない。練習問題を用意するので、自習してもらいたい。ぜひとも身につけてもらいたいことについては、宿題を出す。

手計算以外に、コンピューターを使った計算についても慣れてもらいたいと考えていて(コンピューターを使わないで離散 Fourier 解析を学ぶのは無理である)、そのための宿題(レポート課題)がある。プログラミング言語は何を用いても良いが、授業では、最大公約数的に便利な Mathematica を使って取り組むにはどうすれば良いか、解説する。

¹筆者は同じ学期に「複素関数」という、いわゆる関数論の講義を担当していて、そちらは数学的にきちんと説明する。それとは相当に違ったやり方で講義することになる。

²こういうことは珍しくなくて、他にもベクトル解析などが数学で学ぶよりも早く、それなりに詳しく、物理学に必要な事柄として叩き込まれた(大変だったけれど後々役に立った)。

歴史について

Fourier

Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768 年フランスの Auxerre に生まれ、1830 年フランスの Paris にて没する) がパイオニアである。Fourier はナポレオンと同時代のフランス人であった。『熱の解析的理論』(邦訳 [1], [2]) という論文・本を発表した (1809, 1812, 1822)。その中で熱伝導現象の数学モデルとして、いわゆる**熱 (伝導) 方程式**と呼ばれる

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u$$

を導出した (例えば桂田 [3] の第 2 章 §1, 2)。ここで $u = u(x, t)$ は場所 x , 時刻 t における媒質の温度を表し、 c は単位体積あたりの熱容量 (正の定数とみなせる)、 k は**熱伝導率** (狭い温度範囲では正の定数とみなせる) である。そして Δ は**ラプラス作用素**と呼ばれる、次式で定義される微分作用素である:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Fourier はさらにこの方程式の解法 (Fourier 級数, Fourier 変換, Fourier の変数分離法) を編み出した。そこで**Fourier 解析**が誕生した。

その方法は、熱伝導方程式だけでなく、**波動方程式**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

についても (まるで、このために用意された方法のように) 適用できる。

18 世紀末頃、解析学は行き詰まりも感じられていたが、この Fourier の発見により息を吹き返した、とのことである (ケルナー [4], §91)。Fourier 解析は、現在では、数学の骨格の重要な部分を占める (解析学にとっては背骨かもしれない)。

— というわけで、伝統的な数学のカリキュラムとしては、偏微分方程式への応用が重視されている。

Shannon

20 世紀中ごろから、Fourier 解析の**信号処理**への応用が目覚ましい。メルクマールとしては Shannon の名を挙げるべきであろう。

Claude Elwood Shannon (1916 年アメリカ ミシガン州 Gaylord に生まれ、2001 年アメリカ マサチューセッツ州 Medford にて没する) は、『通信の数学的理論』[5] を著す (1948 年)。情報のエントロピー、情報の単位であるビットなどの概念を提出し、サンプリング定理を発見した (1949 年 — これについては講義で解説する) など。

FFT

FFT (高速 Fourier 変換, fast Fourier transform) とは、**離散 Fourier 変換** (「数学とメディア」にも出て来たが、この講義でも後で解説する) の高速なアルゴリズムで、1965 年 Cooley-Tukey [6] によって発見された。これにより多くの問題がコンピューター上で現実的な効率で処理可能になり、デジタル信号処理が開花した。

(余談) 実は FFT は、既に Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) によって発見されていたが、忘れられていた (コンピューターのない時代に大した応用は無かったからだろうか)。Cooley-Tukey はそれとは独立な再発見ということになる。なお、同じようなアルゴリズムは他の人達も気づいていたらしいが (必要は発明の母)、広く認知されることになったきっかけが Cooley-Tukey の論文 [6] であるのは間違いなさそうである。

おまけ: この講義の「方針」

(ここは書きかけ)

私自身の根が数学者なので、数学的な説明が多くなっているとは思いますが、実はいわゆる数学の講義にするつもりはない。説明しているときも、数学、物理、信号処理、数値実験、…とチャンネルを切り替えている (つもり)。(聴いている人には、どこで切り替わっているか、時々わかりにくくなっているかもしれない。この点は出来るだけ注意しようと考えている。)

数学に徹しようとする、と、わずかなことしか説明できず、それでいて決して分かりやすい授業にならないと推察している。

フーリエ解析自体は非常に広範な応用を持っている。もちろん数学の中でも大きな存在感がある。特定の数学の問題を解決するために利用されるだけでなく、基礎的な数学概念 (関数, 積分, 収束, 集合, …) の見直し・発見をうながした面がある。

どういうやり方 (内容の選択、説明の仕方) が良いか、学生達には申し訳ないが、まだまだ試行錯誤しているところがある。

収束については、

- どうなるか、出来る範囲でとりあえず説明する。しかし深追いはしない (完全にするのは困難、してもキリがない)。質問されたら、とことん相手をする。
- 数学の講義では、何か種類の「収束」をとりあげて、緻密な議論をする場合が多いが、ここでは色々な種類の収束 (各点収束、一様収束、 L^2 収束、超関数としての収束) について、大まかにイメージを持ってもらうことを目指した。その方が「实际的」でもあるし、色々な数学理論が必要になることを漠然ながら示すことが出来ると考えている (期待している)。
- 講義ノートの付録や余談に、証明や証明のアウトライン、証明へのリンクのいずれかを必ず書くように努める (ようにしたい…現状では出来ていない)。これは何か気がなる学生に直接役立つ情報を与えるという意味もあるが、どんなことが必要になるか、それとなく見せておくべきと考えるからである。例えば、Lebesgue 積分を学ぶ動機付けになれば嬉しい。

第1章 Fourier 級数 (復習 + α)

「数学とメディア」という先行する講義科目が用意されていて、そこで説明されたはずであるから、Fourier 級数の導入、というのは省略する。

1.1 概観 (ほぼ復習) — 2つの定理もどきから

「数学とメディア」で学んだこと(?)をざっと振り返りつつ、少し先のことに触れる。

定理 1.1.1 (本当は定理もどき) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数で、ある程度の滑らかさを持つとする。このとき

$$(1.1) \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(1.2) \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で $\{a_n\}_{n \geq 0}$, $\{b_n\}_{n \geq 1}$ を定めると、級数

$$(1.3) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

はある意味で収束し、 $f(x)$ に等しい。すなわち

$$(1.4) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

「ある程度の滑らかさ」、「ある意味で」は曖昧なので、厳密には定理じゃないですよ。

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を f の **Fourier 係数**、級数 (1.3) を f の **Fourier 級数**、(1.4) を f の **Fourier 級数展開** という。

この定理は、Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ より得られる、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

それと $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ などを使うと、次のように書き換えられる。

定理 1.1.2 (本当は定理もどき) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数で、ある程度の滑らかさを持つとする。このとき

$$(1.5) \quad c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

で $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を定めると、級数

$$(1.6) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

はある意味で収束し、 $f(x)$ に等しい。すなわち

$$(1.7) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\{c_n\}$ を f の (複素) Fourier 係数、級数 (1.6) を f の (複素) Fourier 級数、(1.7) を f の (複素) Fourier 級数展開という。

f が簡単な関数の場合に、自分で Fourier 係数、Fourier 級数を計算する問題を解いておこう。(「数学とメディア」でやった人は思い出す程度にやれば良いが、初めて Fourier 級数に触れる場合は、少なくとも 5, 6 題は解くこと。別途、練習問題を用意する (<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2019/fourier2019-ex.pdf>)。)

問 1. a_n, b_n, c_n を (1.1), (1.2), (1.5) で定めるとき、次のことを示せ。

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. また $c_0 = \frac{a_0}{2}$.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. また $a_0 = 2c_0$.

(3) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

(4) f が実数値関数ならば、 a_n と b_n は実数であり、 $c_{-n} = \overline{c_n}$ (特に c_0 は実数である). また $a_n = 2 \operatorname{Re} c_n$, $b_n = -2 \operatorname{Im} c_n$.

この定理の式の部分は必ず書けるようにしておくこと。丸暗記ではなく、自分なりに正しいと確信を持って書けるようになる。

- 周期を 2π としたが、これは式をシンプルにするためで、本質的なことではない。任意の正数 T を周期とする周期関数が同様に展開できる ($\cos(\frac{2n\pi}{T}x)$, $\sin(\frac{2n\pi}{T}x)$ や $e^{i\frac{2n\pi}{T}x}$ を使う)。その場合の式も自力で導出できるようにしておくことが望ましい (後述する)。
- 被積分関数は周期 2π の周期関数であるので、積分範囲は幅が 2π であれば何でもよい:

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \sin nx \\ e^{-inx} \end{Bmatrix} dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \sin nx \\ e^{-inx} \end{Bmatrix} dx.$$

$[-\pi, \pi]$ や $[0, 2\pi]$ が使われることが多いが、ここでは (偶関数、奇関数の議論をするとき分かりやすいので) 原点について対称な $[-\pi, \pi]$ を選んだ。

- 関数を周期関数とすることは、絶対に必要というわけではない。有限区間 $(-\pi, \pi]$ で定義された関数 f があるとき、

$$\tilde{f}(x) := f(y) \quad (x \in \mathbb{R} \text{ に対して、} y \text{ は } x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ を満たす } y \in (-\pi, \pi])$$

で定義される関数 \tilde{f} (グラフで言うと、 f のグラフを無限回コピペしたものが \tilde{f} のグラフになる) は周期 2π の周期関数であるので、

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

と展開できる。 $(-\pi, \pi]$ で \tilde{f} は f に一致するので、 a_n, b_n の式の中の \tilde{f} は f に置き換えて良く、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in (-\pi, \pi])$$

が成り立つ。

- f が偶関数あるいは奇関数である場合、Fourier 級数はそれぞれ \cos, \sin のみで書き表される:

$$\begin{aligned} f \text{ が偶関数} &\Rightarrow \text{Fourier 級数} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ f \text{ が奇関数} &\Rightarrow \text{Fourier 級数} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

これは、「偶関数 \times 偶関数、奇関数 \times 奇関数はともに偶関数」、「偶関数 \times 奇関数は奇関数」、それと (高校でも学んだはずの)

$$\int_{-a}^a (\text{奇関数}) dx = 0, \quad \int_{-a}^a (\text{偶関数}) dx = 2 \int_0^a (\text{偶関数}) dx$$

などから容易に導ける。

- (この項目は後ろの節に持っていく予定) Fourier 係数は番号を大きくすると減衰する。例えば、 f が連続であれば (より一般に Lebesgue 可積分であれば)

$$(1.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

が成り立つ (**Riemann-Lebesgue の定理**, 「数学とメディア」で区分的に滑らかな関数の各点収束を示すために用いられた)。Fourier 級数が各点収束するのであれば、一般項が 0 に収束することから、(1.8) が導かれる。つまり (1.8) は各点収束のための必要条件である。さらに微分との関係 (後述の式 (1.27)) を見ると、

$$f \text{ が } C^k \text{ 級} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k b_n = 0$$

が成り立つことが分かる。これから、関数が滑らかなほど (微分可能な回数が多いほど)、Fourier 級数の収束が速いことが分かる。この逆ではないが、それに近いものとして

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) < \infty \Rightarrow f \text{ は } C^k \text{ 級}$$

を示すことも出来る。

例 1.1.3 (滑らかな関数、不連続な関数に対する Fourier 級数の実例を見る) 周期 2π の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

で定める。この f と g は次のように Fourier 級数展開できる (練習問題を見よ)。

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$g(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = 4 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

まず f のグラフと、 f の Fourier 級数の部分 and s_n のグラフを見てみよう。

Mathematica で試す

```
f0[x_]:=x^2
f[x_]:=f0[Mod[x,2Pi,-Pi]]

Plot[f[x],{x,-3Pi,3Pi}]

s[n_,x_]:=Pi^2/3-4Sum[(-1)^(k-1)Cos[k x]/k^2,{k,1,n}]

Plot[s[10,x],{x,-3Pi,3Pi}]

Manipulate[Plot[{f[x],s[n,x]},{x,-3Pi,3Pi}],{n,1,20}]
```

(Mod[a,b,c] は a を b で割った余り r (ただし、 r は $c \leq r < c+b$ の範囲で選ぶ) を求める関数である。)

この f は連続で区分的に滑らかであるから、部分 and s_n の作る関数列は f に一様収束する。確かに

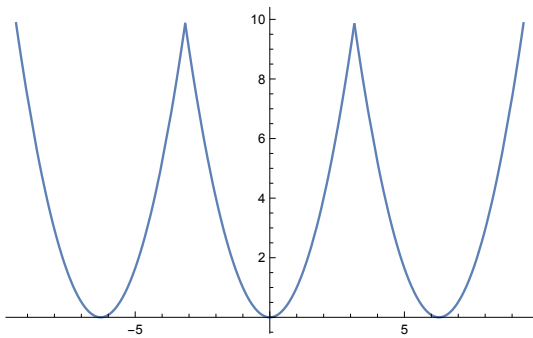


図 1.1: f のグラフ

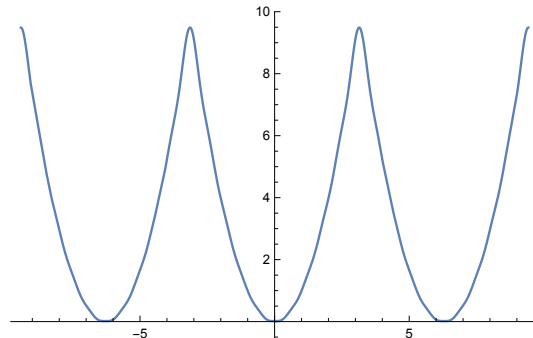


図 1.2: s_{10} のグラフ

n が増加するとともに、 s_n のグラフが f のグラフに近づいて行く様子が良く分かる。

次に g のグラフと、 g の Fourier 級数の部分 and s_n のグラフを見てみよう。

```
g0[x_]:=2x
g[x_]:=g0[Mod[x,2Pi,-Pi]]

Plot[g[x],{x,-3Pi,3Pi}]

sg[n_,x_]:=4Sum[(-1)^(k-1)Sin[k x]/k,{k,1,n}]

Plot[sg[10,x],{x,-3Pi,3Pi}]

Manipulate[
  Plot[{g[x],sg[n,x]},{x,-3Pi,3Pi},PlotPoints->200,PlotRange->{-8,8}],
  {n,1,50,1}]
```

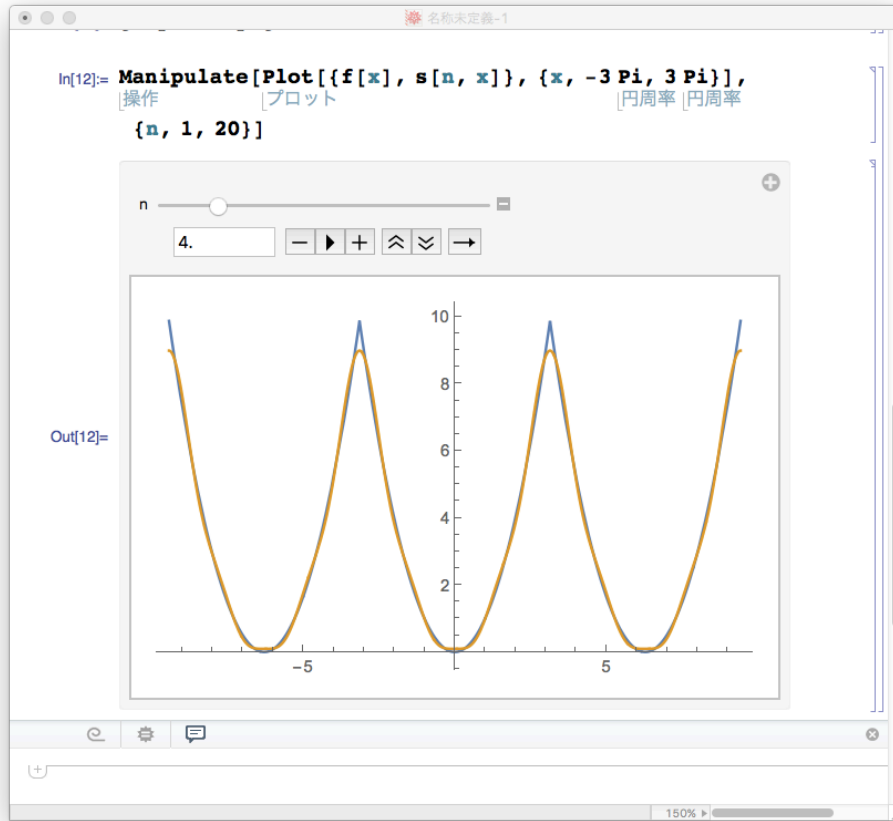



図 1.3: n を変化させながら、 f と s_n のグラフを見比べる

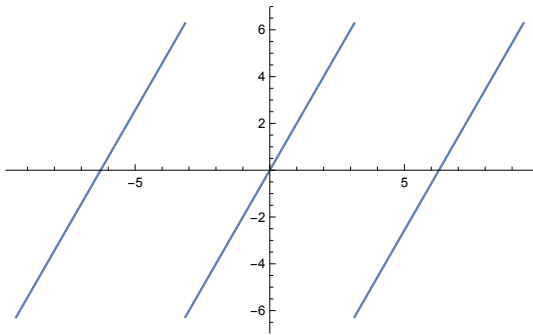


図 1.4: g のグラフ

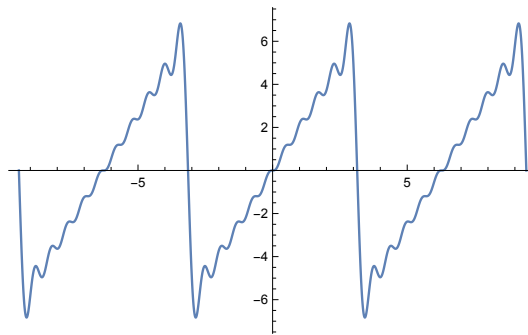


図 1.5: s_{10} のグラフ

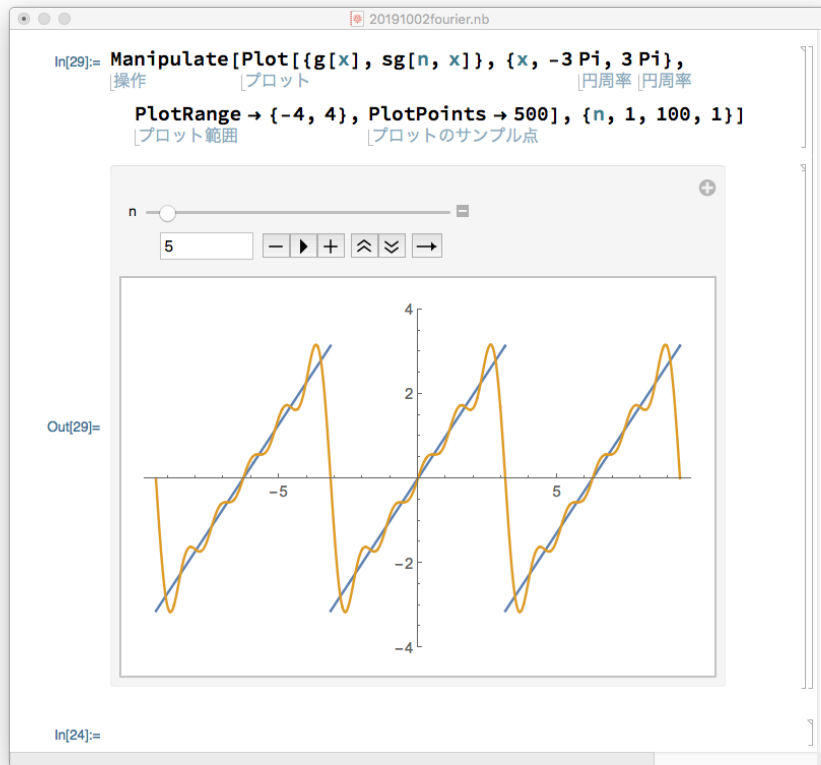


図 1.6: n を変化させながら、 g と s_n のグラフを見比べる

(大体、上と同様であるが、 g が不連続のため、Fourier 級数の部分和にも急激に変化する部分がある。そのため、PlotPoints→500 として、関数値を計算する点の個数を増やしている。)

この g は区分的に C^1 級ではあるが、連続ではない。 $D := \{(2k-1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ が g の不連続点の全体で、 g は $\mathbb{R} \setminus D$ では C^1 級である。従って、 $x \in \mathbb{R} \setminus D$ においては、部分和は $g(x)$ に近づくが、 $x \in D$ においては、部分和は $\frac{g(x+0) + g(x-0)}{2} = \frac{2\pi + (-2\pi)}{2} = 0$ に近づく。

確かに、 n が増加するとともに、各点において部分和が g の値に近づく様子が分かるが、その近付き方が f の場合とは異なっていることが分かる。不連続点 ($x = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}$) の近くでは、部分和のグラフには大きなジグザグがあり、 $g(x+0)$ 、 $g(x-0)$ からのズレ (縦に測って) が n が変わってもほぼ一定である。一方、ジグザグしている範囲の横幅は n が増加するにつれ 0 に近づく。いわゆる Gibbs の現象の表れである。■

1.2 関数列の収束

Fourier 級数は無限級数であり、部分和の極限である。つまり

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

として定義される関数列 $\{s_n\}$ の極限である。その極限が存在するか、存在したとしてもとの関数 f に一致するか、以上 2 点が問題となる。

Fourier 級数は、変数 x を含んでいる、いわゆる関数項級数であって、色々な収束が考えられる¹。大雑把に言って、

¹これとは対照的に、「数学解析」で扱った点列の収束は実質上ただ 1 つの収束しかない。この違いは、 \mathbb{R}^N が有限次元であるのに、関数の集まりの世界 (関数空間) が無限次元であることに起因する。

f が滑らかなほど (より多くの回数微分出来るほど) 強い意味の収束をする。(§1.5)

数列、点列の収束は、実質的に一種類しかないが、

関数列の収束には色々な種類がある。

ここでは3つの収束を紹介する。

その前に一つ注意: f も s_n も周期 2π であるから、幅 2π の区間、例えば $[-\pi, \pi]$ で調べれば、 \mathbb{R} 全体で調べたことになる。

(1) (各点収束) (単純収束ともいう)

$$(\forall x \in [-\pi, \pi]) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$$

が成り立つとき、 $\{s_n\}$ は f に**各点収束**するという。(任意に x を決めると $\{s_n(x)\}$ は数列になる。それが $f(x)$ という数に収束する、ということである。)

(2) (L^p 収束) (p 次平均収束ともいう)。ここで p は $1 \leq p < \infty$ を満たす実数である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x) - f(x)|^p dx = 0$$

が成り立つとき、 $\{s_n\}$ は f に L^p 収束するという。

積分はある意味で s_n と f の隔たりを測っている量(距離)である。それが0に収束する、ということである。

後で導入する L^p ノルム $\|\cdot\|_{L^p}$ ($\|\cdot\|_p$ と書くこともある) を用いると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x) - f(x)|^p dx = \|s_n - f\|_{L^p}^p$$

であるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\|_{L^p} = 0$$

と言ってもよい。

$p = 1$ の場合は、 $\int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x) - f(x)| dx$ は、二つの関数のグラフ $y = f(x)$ と $y = s_n(x)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) ではさまれた部分の面積である。

$p = 2$ の場合が特に良く使われる (次節で紹介する内積との相性が良い)。

(3) (一様収束)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |s_n(x) - f(x)| = 0$$

が成り立つとき、 $\{s_n\}$ は f に**一様収束**するという。

\sup は上限を表す記号である(「数学解析」で頻出した)。上限を知らない場合は「最大値のようなもの」と理解すると良い。

一様収束が一番強い。つまり一様収束ならば、各点収束かつ(任意の $p \in [1, \infty)$ について) L^p 収束する。実際

$$\int_{-\pi}^{\pi} |s_n(x) - f(x)|^p dx \leq \left(\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |s_n(x) - f(x)| \right)^p \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi \left(\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |s_n(x) - f(x)| \right)^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから「一様収束するならば L^p 収束する」。また

$$(\forall x_0 \in [-\pi, \pi]) \quad |s_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |s_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから「一様収束するならば各点収束する」。

定理 1.2.1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 2π で、連続かつ区分的に C^1 級とする。このとき f の Fourier 級数の部分和の作る関数列 $\{s_n\}$ は、 f に一様収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - s_n(x)| = 0.$$

(f も s_n も周期 2π であるから、 $[-\pi, \pi]$ で一様収束するならば、 \mathbb{R} 全体で一様収束する。)

証明 授業では説明できない (定理 1.5.5 を見よ)。■

定理 1.2.2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 2π で、区分的に C^1 級とする。このとき f の Fourier 級数の部分和の作る関数列 $\{s_n\}$ は、 f に L^2 収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = 0.$$

この定理の仮定「区分的に C^1 級」は、「Lebesgue 積分の意味で二乗可積分²」と緩めることが出来る。 L^2 収束は一様収束よりも弱い収束であるが、その代わり (?) 完璧とも言えるような議論が出来る。**Lebesgue 積分論**を学ぶのは大変 (少なくとも週2コマ, 半期の講義が必要) であり、この講義できちんと説明するのは (やはり) 不可能である。しかし §1.3, §1.4 で (不完全ながら) L^2 収束の理論の一端を紹介する。

定理 1.2.3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 2π で、区分的に C^1 級とする。このとき任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} f(x) & (x \text{ が } f \text{ の連続点のとき}) \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & (x \text{ が } f \text{ の不連続点のとき}). \end{cases}$$

ただし

$$f(x+0) = \lim_{y \rightarrow x+0} f(y), \quad f(x-0) = \lim_{y \rightarrow x-0} f(y).$$

区分的 C^1 級であるが不連続点がある場合は、その点の近傍で **Gibbs の現象** (Gibbs [7], [8]) がおこる。ゆえに一様収束はしない³。

f が二乗可積分でなくても、**超関数**と解釈できる場合は、超関数の意味で Fourier 級数展開が出来て色々な議論が可能になる。— これは、この講義では説明できない⁴。

余談 1.2.4 (複素関数論との比較?) 一般に冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束円の内部で正則 (従って何回でも微分可能 — とても滑らか) であるが、(1.3) の形の級数の和は、そのような滑らかさを一般に

² f が Lebesgue 可測で、 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. 「二乗」の代わりに「自乗」とすることもある。

³そもそも、もし一様収束したら、極限の関数は連続になり、また元の関数に一致するはずなので、不連続点があることに矛盾する。

⁴超関数の標準的な説明は、ちょっと敷居が高すぎる。工夫して説明できなくもないと思うが、短い時間に収めるのは、私には荷が重い。

は持たない。上で説明したように、不連続な関数になる場合もある。これは逆に言うと、冪級数展開 (Taylor 展開) は、何回でも微分できるような、とても滑らかな関数にしか適用出来ないが、Fourier 級数は不連続関数のような、「たちの悪い」関数に対しても適用できる、つまり応用範囲がずっと広い、ということの意味している。■

注意 1.2.5 強い収束をすると、良い性質を持つが、そのためには元の関数自体が良い性質を持っていないといけない。扱う関数を良い性質を持つもの限定すると、応用範囲が狭くなることに注意しよう。上で収束に関して 3 つの定理を紹介したが、どの定理が優れているということはない (どれも必要な場合があり、他のもので代替出来ない)。■

1.3 直交性 (内積空間)

三角関数系の直交性については「数学とメディア」でも紹介されたと思うが、少し詳しく見てみよう。

内積空間とその直交系の概念と、Fourier 係数が定まる原理 (命題 1.3.13) をしっかり理解してもらいたい。

次のことは学んだはずである。

$$(1.9) \quad \begin{aligned} m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad m \neq n &\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, \\ m, n \in \mathbb{N}, \quad m \neq n &\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad n \in \mathbb{N} &\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0. \end{aligned}$$

$$(1.10) \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad m \neq n \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} \, dx = 0.$$

($\overline{}$ は共役複素数を表す。例えば、 $\overline{1+2i} = 1-2i$ 。 $\overline{e^{inx}} = \overline{\cos(nx) + i \sin(nx)} = \cos(nx) - i \sin(nx) = e^{-inx}$ である。)

問 2. これらの式を確かめよ。

問 3. 「 $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$ 」は正しくない。なぜか？

このような性質を詳しく簡潔に論じるために、関数同士の**内積**というものを定義しよう。考える関数の範囲は、ここではとりあえず

$$(1.11) \quad X_{2\pi} := \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ 区分的に滑らかで、周期 } 2\pi \text{ の周期関数}\}$$

とする。

$X_{2\pi}$ の加法とスカラー倍を自然に定めると⁵、 $X_{2\pi}$ は \mathbb{C} 上のベクトル空間 (線型空間) になる。 $f, g \in X_{2\pi}$ に対して、

$$(1.12) \quad (f, g) = (f, g)_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

⁵ $f, g \in X_{2\pi}$ とするとき $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) で関数 $f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を定めると、 $f+g \in X_{2\pi}$ 。また $f \in X_{2\pi}, \lambda \in \mathbb{C}$ とするとき、 $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ で関数 $\lambda f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を定めると、 $\lambda f \in X_{2\pi}$ 。

とおき、 f と g の L^2 内積または単に内積と呼ぶ。

また $f \in X_{2\pi}$ に対して、

$$(1.13) \quad \|f\| = \|f\|_{L^2} := \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

とおき、 f の L^2 ノルムまたは単にノルムと呼ぶ。

例 1.3.1 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \neq n$ とするとき

$$(\cos mx, \cos nx) = 0.$$

$m \in \mathbb{N}$ とするとき、

$$\begin{aligned} \|\cos mx\| &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} dx} = \sqrt{\pi}, \\ \|\sin mx\| &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2mx}{2} dx} = \sqrt{\pi}, \\ \|\cos(0x)\| &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(0x) \, dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \sqrt{2\pi}. \blacksquare \end{aligned}$$

補題 1.3.2 (内積の公理を満たすこと) $X = X_{2\pi}$ と (1.12) で定義される $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2}$ について、次の (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i) 任意の $f \in X$ に対して $(f, f) \geq 0$. 等号が成立するためには $f = 0$ が必要十分である。

(ii) 任意の $f, g \in X$ に対して $(g, f) = \overline{(f, g)}$.

(iii) 任意の $f_1, f_2, g \in X$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g).$$

証明

(i) 任意の複素数 z に対して、 $z\bar{z} = |z|^2$ であることに注意すると、

$$(f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \geq 0.$$

また $(f, f) = 0$ ならば、 $|f(x)|^2 = 0$ より $f(x) = 0$. (これは本当は嘘で、言えることは「連続点 x 」あるいは「ほとんどすべての x 」に対して $f(x) = 0$ である。例えば「ほとんどすべての x 」に対して 0 に等しい関数は、定数関数 0 と同一視するなどの約束をすると良い。この辺は、Lebesgue 積分を学ぶとスッキリ解決するが、ここでは説明を省略しておく。)

(ii)

$$\overline{(f, g)} = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \, dx} = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)\overline{g(x)}} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} \overline{\overline{g(x)}} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) \, dx = (g, f).$$

(iii) いわゆる積分の線形性そのものである。

$$\begin{aligned}(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) &= \int_{-\pi}^{\pi} (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) \overline{g(x)} dx \\ &= c_1 \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \overline{g(x)} dx + c_2 \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) \overline{g(x)} dx \\ &= c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g). \blacksquare\end{aligned}$$

定義 1.3.3 (内積, 内積空間) \mathbb{C} 上のベクトル空間 X と、 $X \times X$ で定義された関数 (\cdot, \cdot) が、次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、 X を**内積空間**、 (\cdot, \cdot) を X の**内積**と呼ぶ。

(i) 任意の $f \in X$ に対して $(f, f) \geq 0$. 等号が成立するためには $f = 0$ が必要十分である。

(ii) 任意の $f, g \in X$ に対して $(g, f) = \overline{(f, g)}$.

(iii) 任意の $f_1, f_2, g \in X, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g).$$

条件 (i), (ii), (iii) を**内積の公理**と呼ぶ。

内積空間というのは、ベクトル空間や群、環、体がそうであるように、ある一定の条件 (ベクトル空間の公理と内積の公理) を満たすものの総称である。

丸いカッコ (f, g) だと f と g の順序対と紛らわしいので、テキストによっては、 $\langle f, g \rangle$ のようなカッコにしたり、 $(f|g)$ のように表したりする。

(\cdot, \cdot) が内積のとき、 $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ とおくと、**ノルムの公理**と呼ばれる次の3条件が成り立つ。

(i) 任意の $f \in X$ に対して、 $\|f\| \geq 0$. 等号が成立するためには、 $f = 0$ が必要十分である。

(ii) 任意の $f \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.

(iii) 任意の $f, g \in X$ に対して、 $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

問 4. (ii), (iii) から次のことが導かれることを確認せよ。

(a) 任意の $f, g_1, g_2 \in X$ と任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$(f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1} (f, g_1) + \overline{c_2} (f, g_2).$$

(b) 任意の $f, g \in X$ に対して

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re}(f, g) + \|g\|^2.$$

(Re は複素数の実部を表す。例えば $\operatorname{Re}(1 + 2i) = 1$.)

余談 1.3.4 (ノルム空間, 距離空間) \mathbb{K} 上のベクトル空間 X と、 X で定義された関数 $\|\cdot\|$ が、次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、 $(X, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**、 $\|\cdot\|$ を X の**ノルム**と呼ぶ。しばしば $(\|\cdot\|)$ を省略して X 自身をノルム空間ということもある。

(i) 任意の $f \in X$ に対して $\|f\| \geq 0$. 等号が成立するためには $f = 0$ が必要十分である。

(ii) 任意の $f \in X, c \in \mathbb{K}$ に対して $\|cf\| = |c|\|f\|$.

(iii) 任意の $f, g \in X$ に対して

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

条件 (i), (ii), (iii) を **ノルムの公理** と呼ぶ。

$(X, (\cdot, \cdot))$ が内積空間であるとき、 $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ ($f \in X$) とおくと、 $(X, \|\cdot\|)$ はノルム空間である。

空でない集合 X と、関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき、 (X, d) を **距離空間**、 d を X の **距離** という。しばしば (d を書くのを省略して) X 自身を距離空間ということもある。

(i) 任意の $f, g \in X$ に対して $d(f, g) \geq 0$. 等号が成立するためには $f = g$ が必要十分である。

(ii) 任意の $f, g \in X$ に対して $d(f, g) = d(g, f)$.

(iii) 任意の $f, g, h \in X$ に対して $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$ (三角不等式).

(X, d) が距離空間であるとき、 X の要素からなる点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の収束が定義出来る。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0.$$

さらに X がベクトル空間であれば、級数の収束が定義出来る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k.$$

内積空間 $(X, (\cdot, \cdot))$ があるとき、 $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ とおくと、 $(X, \|\cdot\|)$ はノルム空間である。

また、ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ があるとき、 $d(f, g) := \|f - g\|$ ($f, g \in X$) とおくと、 (X, d) は距離空間である。

結局、内積空間はノルム空間とみなすことも出来るし、距離空間とみなすことも出来る。■

上のように定めた $X_{2\pi}$ は \mathbb{C} 上の内積空間であるが、それ以外に複素数値 N 次元ベクトルの全体 \mathbb{C}^N も \mathbb{C} 上の内積空間である。 \mathbb{C}^N の内積は

$$(\#) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N x_j \overline{y_j}$$

で定めるのであった。

上では $X_{2\pi}$ の要素として複素数値関数を考えたが、実数値関数のみを考えることも出来る (e^{inx} でなく、 $\cos nx, \sin nx$ だけでやるつもりなら、それも良いかもしれない)。その場合は関数の実数値倍のみを考えることになり、内積 (\cdot, \cdot) は

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

で定め、(i), (ii), (iii) は次のもので置き換える ((ii)', (iii)' が変わっている。)

— \mathbb{R} 上のベクトル空間の内積の公理 —

(i)' 任意の $f \in X$ に対して $(f, f) \geq 0$. 等号が成立するためには $f = 0$ が必要十分である。

(ii)' 任意の $f, g \in X$ に対して $(g, f) = (f, g)$.

(iii)' 任意の $f_1, f_2, g \in X, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \lambda_1 (f_1, g) + \lambda_2 (f_2, g).$$

定義 1.3.5 (ℝ 上の内積空間, 内積) ℝ 上のベクトル空間 X で、(i)', (ii)', (iii)' を満たす $(,)$ を持つものがあるとき、 X を ℝ 上の**内積空間**、 $(,)$ を X の**内積**、と呼ぶ。また条件 (i), (ii), (iii) を**内積の公理**と呼ぶ。

\mathbb{R}^N は ℝ 上の内積空間である。

余談 1.3.6 (自分が学生の頃を振り返って) 自分が大学生の頃、 \mathbb{C}^N の内積を $(\#)$ のように定めるのには、非常に抵抗を感じた記憶が残っている。内積と言ったら

$$(b) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N x_j y_j$$

であるべきではないか (と当時の私は考えた)。もしそうすると、内積の公理 (i) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ は成り立たず、それを成り立たせるためには、 $(\#)$ のようにする以外にほとんどやりようがないと判っても、最初に感じた抵抗感はなかなか消えなかった。そういう抵抗感がきれいに消えた今となつては、学校数学では公理の条件よりも、式 (b) が何度も出て来て、それを身につけるように訓練されていたから、自分が (b) に執着していたのだと分かるけれど、あの頃の自分に誰かがそう言ってくれても簡単には納得出来なかったような気がする。それでも言うておく。

大事なのは定義の式が似ていることでなく、どういう性質を持つかの方 (公理) である。 ■

さて、以下ではしばらく X を $X_{2\pi}$ に限定せず、 \mathbb{C} または \mathbb{R} 上の一般の内積空間とする。(例えば $X = \mathbb{C}^n$ や $X = \mathbb{R}^n$ ということもありえる。)

公理だけを使って色々なことが議論できる、ということを理解してもらいたい。

命題 1.3.7 (ピタゴラスの定理) X は内積空間で、 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$ とする。 \mathbf{a} と \mathbf{b} が垂直 (つまり $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$) ならば、

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

(直角三角形では、斜辺² = 底辺² + 垂辺². あるいは、長方形で 対角線² = 縦² + 横².)

証明 単純な計算で

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + 0 + 0 + \|\mathbf{b}\|^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

問 5. 次のことを示せ。内積空間 X の要素 φ_n ($n = 1, \dots, N$) の相異なる 2 つの要素がいずれも直交するならば ($n \neq m \Rightarrow (\varphi_n, \varphi_m) = 0$)、

$$\left\| \sum_{n=1}^N \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|\varphi_n\|^2$$

が成り立つ (ピタゴラスの定理の一般化)。

\mathbb{R}^n や \mathbb{C}^n では、

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

という不等式 (Schwarz の不等式) が有名であるが、実はこれはすべての内積について成立する不等式である。

命題 1.3.8 (Schwarz の不等式) X を \mathbb{C} または \mathbb{R} 上の内積空間とすると、任意の $f, g \in X$ に対して、

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

(等号が成り立つには、 f と g が 1 次従属であることが必要十分である。)

証明 (良く本に載っている証明を書いておく。) f と g が 1 次従属である場合、一方が他方のスカラー倍として表せ、証明すべき不等式の両辺が等しくなることがすぐに分かる。そこで以下では f と g が 1 次独立である場合を考える。任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $\lambda f + g \neq 0$ であるから、

$$0 < \|\lambda f + g\|^2 = |\lambda|^2 \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re} \lambda (f, g) + \|g\|^2.$$

$(f, g) = |(f, g)| e^{i\theta}$ を満たす $\theta \in \mathbb{R}$ が存在する。 t を任意の実数として $\lambda = te^{-i\theta}$ とおくと、 $\lambda(f, g) = t|(f, g)|$, $\operatorname{Re} \lambda(f, g) = t|(f, g)|$. ゆえに

$$0 < t^2 \|f\|^2 + 2t |(f, g)| + \|g\|^2 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

t についての 2 次式がつねに正となるので、判別式は負である。

$$|(f, g)|^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 < 0.$$

整理すると $|(f, g)| < \|f\| \|g\|$ を得る。■

(\mathbb{R} 上の内積空間の場合、証明はかなりシンプルになるのだが(やってみることを勧める — 普通の数ベクトルの場合に、学校数学でも紹介されることがある)、 \mathbb{C} 上の内積空間の場合の証明は、上で見たように少々複雑である。 $\lambda = te^{-i\theta}$ とおくのは知らないとなかなか気づけないであろう。)

問 6. (細かい話だけれど知っているのと割と便利) 内積の公理のうち (i) の代わりに

(i') 任意の $f \in X$ に対して $(f, f) \geq 0$.

しか成り立たないような状況(つまり $(f, f) = 0$ であっても $f = 0$ とは限らない) がしばしば現れる。その場合に Schwarz の不等式が証明できるか。

定義 1.3.9 (直交系, 正規直交系) X を \mathbb{C} または \mathbb{R} 上の内積空間、 $\{\varphi_n\}$ を X の要素の集合とする。

(1) $\{\varphi_n\}$ が X の**直交系**であるとは、次の二条件 (i), (ii) が成り立つことをいう。

$$(i) (\forall n, m) n \neq m \Rightarrow (\varphi_n, \varphi_m) = 0.$$

$$(ii) (\forall n) (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$$

(2) $\{\varphi_n\}$ が X の**正規直交系**であるとは、

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}$$

が成り立つことをいう。

($\{\varphi_n\}$ が直交系とは、普通は (i) だけで、(ii) は要請しないが、この講義では (ii) が成り立つことも要請しておく。)

ここで δ_{mn} という記号は、

$$(1.14) \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n). \end{cases}$$

で定められる **Kronecker のデルタ** である。線形代数に出て来たと思われるが、この講義でも使わせてもらう。

例 1.3.10 $X = \mathbb{C}^N$, $e_n =$ 第 n 成分が 1 で、それ以外の成分はすべて 0 である N 次元ベクトル、とすると、 $\{e_n\}_{n=1}^N$ は X の正規直交系である。■

この辺で、**Gram-Schmidt の直交化法** を復習しておくが良いと思うが、それは各自に任せることにして、話を先に進める。

正規直交系が直交系であることはすぐ分かるが、直交系があったときに正規直交系を作ることが出来る。

命題 1.3.11 (直交系における線型結合の係数) X は内積空間で、 $(,)$ はその内積とする。

(1) $\{\varphi_n\}$ は X の直交系で、 $f \in X$ が

$$f = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$$

と表されるならば

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

実は無限和でも成り立つ。すなわち

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \right\| = 0$$

が成り立つことを $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ の定義とすると、

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

(2) $\{\varphi_n\}$ は X の正規直交系で、 $f \in X$ が

$$f = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$$

と表されるならば

$$c_n = (f, \varphi_n) \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

証明 (1) を認めれば (2) は当たり前 (分母が 1 になるから)。(1) を示す。

添字を表す文字を変えて、 $f = \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m$ と書き直しても良い (納得しよう)。

任意の n ($1 \leq n \leq N$) に対して、

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^N c_m (\varphi_m, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

「実は」以降。任意の n に対して、 $N \geq n$ を満たす N に対して、

$$(f, \varphi_n) - c_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - \left(\sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \left(f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right).$$

$N \rightarrow \infty$ とするとき、 $\left\| f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m \right\| \rightarrow 0$ と仮定しているので、Schwarz の不等式を用いて

$$\left| \left(f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) \right| \leq \left\| f - \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m \right\| \|\varphi_n\| \rightarrow 0.$$

ゆえに $c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$. ■

例 1.3.12 (普通の Fourier 級数に現れる直交系)

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots\}$$

は $X = X_{2\pi}$ の直交系である。

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \|\cos kx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\sin kx\| = \sqrt{\pi}.$$

また

$$\|\cos(0x)\| = \|1\| = \sqrt{2\pi}.$$

ゆえに

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。

同様に

$$\{1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, \dots, e^{ikx}, e^{-ikx}, \dots\}$$

は $X_{2\pi}$ の直交系であり、

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2ix}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx}, \dots \right\}$$

は $X_{2\pi}$ の正規直交系である。■

次の命題は分かっただけならば簡単であるが、非常に重要である。当たり前だと感じられるようになっておくこと。

命題 1.3.13 (直交系による展開における係数の決定) X を内積空間、 $f = \sum_n c_n \varphi_n$ とする。

(1) $\{\varphi_n\}$ が直交系であるならば、

$$(\forall n) \quad c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

(2) $\{\varphi_n\}$ が正規直交系であるならば、

$$(\forall n) \quad c_n = (f, \varphi_n).$$

証明 無限和の場合、収束の議論が必要になるので、ここでは有限和 $f = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$ の場合に証明する。無限和の場合の証明は、付録 C.1 の命題 C.1.2 で与える。

(1) 任意の n に対して (φ_m, φ_n) は、 $m = n$ の場合を除いて 0 であることに注意)

$$(f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^N c_m \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^N c_m (\varphi_m, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n).$$

$(\varphi_n, \varphi_n) (\neq 0)$ で両辺を割って

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

(2) $(f, \varphi_n) = c_n (\varphi_n, \varphi_n)$ までは (1) と同じで、 $(\varphi_n, \varphi_n) = 1$ であるから、 $c_n = (f, \varphi_n)$. ■

例 1.3.14 (Fourier 級数の係数の見直し)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とするとき、 $n \in \mathbb{N}$ に対しては

$$(\cos nx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

であるから、

$$(b) \quad a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\cos nx} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

b_n も同様に求まる。

一方、 $a_0/2$ は $\cos(0x) = 1$ の係数であるから

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, \cos(0x))}{(\cos(0x), \cos(0x))} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0x) \, dx.$$

ゆえに

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0x) \, dx. \blacksquare$$

例 1.3.15 (複素 Fourier 級数の係数の見直し) $X = X_{2\pi}$, $\varphi_n(x) = e^{inx}$ ($n \in \mathbb{Z}$) とするとき、 $(\varphi_n, \varphi_n) = 2\pi$ であるので、 $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n$ であれば、

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{inx}} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx. \blacksquare$$

例 1.3.16 (周期 T の Fourier 級数の係数) 周期 T の関数 f の Fourier 級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)$$

という形をしている。このことを認めた上で、 a_n, b_n を求めてみよう。 $n \in \mathbb{N}$ とするとき、

$$\left(\cos \frac{2n\pi x}{T}, \cos \frac{2n\pi x}{T} \right) = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \frac{2n\pi x}{T} \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 + \cos \frac{4n\pi x}{T}}{2} \, dx = \frac{T}{2},$$

$$\left(\sin \frac{2n\pi x}{T}, \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 \frac{2n\pi x}{T} dx = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 - \cos \frac{4n\pi x}{T}}{2} dx = \frac{T}{2}.$$

ゆえに

$$a_n = \frac{(f, \cos \frac{2n\pi x}{T})}{(\cos \frac{2n\pi x}{T}, \cos \frac{2n\pi x}{T})} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx,$$

$$b_n = \frac{(f, \sin \frac{2n\pi x}{T})}{(\sin \frac{2n\pi x}{T}, \sin \frac{2n\pi x}{T})} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx,$$

一方、 $n = 0$ のとき

$$\left(\cos \frac{2n\pi x}{T}, \cos \frac{2n\pi x}{T} \right) = (1, 1) = \int_{-T/2}^{T/2} dx = T$$

であるから

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx.$$

ゆえに

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx. \blacksquare$$

1.4 “最短距離 \Leftrightarrow 垂直” (最近点=直交射影) の原理

ここでは少し抽象的に (一般的に) 内積空間での議論をする。Fourier 係数の部分和が**直交射影**というものになっていること、それは (内積から定まるノルムで誤差を測る場合に) 最良の近似になっていること、また**完全直交系**の概念を理解してもらいたい。

前節で内積を導入したが、それをを用いると Fourier 級数には明快な図形的イメージがつけられ、それが (思いがけず?) 役に立つことを見てもらいたい。

説明のために式を使わざるを得なくて、式に慣れていないとそこで (式を読み取るために) 苦労するかもしれないが、頑張って突破して図形的イメージをつかんで欲しい。

内積 (\cdot, \cdot) のある空間で、ノルム (長さ) $\|f\|$ も内積を用いて、 $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ と定める。

次式で定義される $\text{Span}\langle \varphi_1, \dots, \varphi_N \rangle$ を、 $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ で**張られる空間**と呼ぶ:

$$(1.15) \quad \text{Span}\langle \varphi_1, \dots, \varphi_N \rangle = \text{“}\varphi_1, \dots, \varphi_N \text{ の線形結合全体”} = \left\{ \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \mid c_1, \dots, c_N \in \mathbb{K} \right\}.$$

ここで $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.4.1 「最短 \Leftrightarrow 垂直」の原理と直交射影

イントロ

二つの絵 (作図するのをさぼっている…).

直線 V 上にない点 f , V 上にある一般の点 g , f から V に下ろした垂線と V との交点 h .

平面 V 上にない点 f , V 上にある一般の点 g , f から V に下ろした垂線と V との交点 h .

「 g をなるべく f に近くしたい。最も近い点 h が見つかるか？」

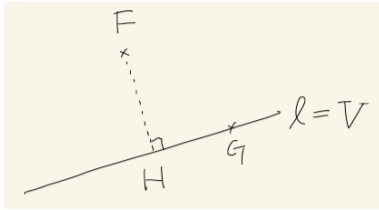


図 1.7: $V = \ell$

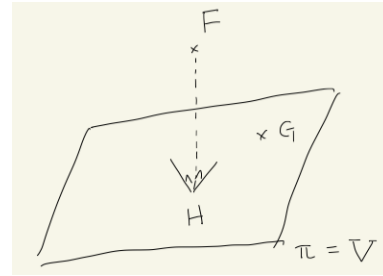


図 1.8: $V = \pi$

大事なことを簡潔に言い切ると、

距離が最短 \Leftrightarrow 垂直

なぜそうなるかと、具体的にそれ(最も近い点 h)をどう実現するか?が問題である。後者の結果を紹介しておく。

もしも $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ が V の直交基底ならば、

$$h = \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \quad (\text{正規直交基底であれば } h = \sum_{n=1}^N (f, \varphi_n) \varphi_n).$$

h のことを、 f の V への**直交射影**(あるいは**正射影**)と呼ぶ。(昔の初等幾何では、 f から V に下ろした**垂線の足**と呼んだ。個人的には大好きな言い方なのだが、学校数学の教科書からは追放された表現なので、ためらいがある。)

「距離最短 \Leftrightarrow 垂直」

言いたいことを短く言い切ると「距離最短 \Leftrightarrow 垂直」であるが、正確に述べると次の定理になる。

定理 1.4.1 体 \mathbb{K} 上の内積空間 X の部分空間 V と $f \in X, h \in V$ 対して

h は f の V への直交射影 $\Leftrightarrow h$ が最も f に近い

つまり次の2つが成り立つ。ただし $\| \cdot \|$ は内積から定まるノルムである。

(1) $f - h \perp V$ となる $h \in V$ があれば、 $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$.

(2) $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$ となる h (最短距離を達成する h) があれば $f - h \perp V$.

「あれば(存在するならば)」というのは、違和感があるかもしれない。後述の注意 1.4.3 を見よ。

証明

(1) (直角三角形 $\triangle FGH$ の図を描くこと。) 任意の $g \in V$ に対して、ピタゴラスの定理から

$$\|f - g\|^2 = \|f - h\|^2 + \|g - h\|^2$$

が成り立つ⁶。ゆえに

$$\|f - g\| \geq \|f - h\|.$$

これは $\|f - h\|$ が最小値であることを示している。

⁶ $g, h \in V$ であるから $g - h \in V$ であり、仮定から $(f - h) \perp (g - h)$ が導かれることに注意する。

(2) **変分法**の伝統的なテクニックを使う。仮定の条件は、

$$I[g] := \|f - g\|^2 \quad (g \in V)$$

で定められる関数 I が $g = h$ で最小値を取る、ということである。

v を V の任意の元とする。このとき任意の $t \in \mathbb{K}$ に対して、 $h + tv \in V$ である。仮定によって $I[h + tv] \geq I[h]$ が成り立つ。これは

$$F(t) := I[h + tv] \quad (t \in \mathbb{K})$$

で定めた関数 F が $t = 0$ で最小になることを意味する。

$$\begin{aligned} F(t) &= I[h + tv] = \|f - (h + tv)\|^2 = \|(f - h) - tv\|^2 \\ &= \|f - h\|^2 - 2\operatorname{Re}[t(f - h, v)] + |t|^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

であり、 F は $t = 0$ で最小値を取ることから

$$(f - h, v) = 0$$

が導かれる。

それを示すために、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ か $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ かで場合を分ける (講義では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合だけ説明するかもしれない)。

- (i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合 (この場合は Re は必要なく、 $|t|^2 = t^2$ であり、簡単になる)。実変数の 2 次関数

$$F(t) = \|f - h\|^2 - 2t(f - h, v) + t^2 \|v\|^2$$

が $t = 0$ で最小値を取るのを、1 次の係数は 0 である。

$$(f - h, v) = 0.$$

- (ii) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は、 $(f - h, v) = |(f - h, v)|e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) として、 $t = se^{-i\theta}$ ($s \in \mathbb{R}$) とおくと、

$$F(t) = \|f - h\|^2 - 2s|(f - h, v)| + s^2 \|v\|^2.$$

これを実変数 s の関数とみると、 $s = 0$ で最小値を取るのを、 $|(f - h, v)| = 0$ 。ゆえに $(f - h, v) = 0$ 。

以上で $(f - h) \perp V$ が示された。■

直交射影を求める

系 1.4.2 体 \mathbb{K} 上の内積空間 X の部分空間 V が直交系 $\{\varphi_n\}$ で張られている、つまり

$$V = \operatorname{Span}\langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \mid c_1, \dots, c_N \in \mathbb{K} \right\}$$

であれば、任意の $f \in X$ に対して、 f に最も近い $h \in V$ は (一意的に存在して)

$$h = \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n.$$

(Fourier 級数を途中で打ち切った部分和 h は、その範囲内でもっとも f に近い。)

証明 $h \in V$ であるから、ある c_1, \dots, c_N が存在して

$$h = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、 $f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j, \varphi_n \right) = c_n (\varphi_n, \varphi_n) \quad (3\text{つめの等号は前回やった式変形と同様}).$$

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \blacksquare$$

注意 1.4.3 (かなり細かい注意) 上の V は有限次元であるから、直交射影はつねに存在するが、 V が無限次元の場合は、直交射影はつねに存在するとは限らない。完備な内積空間 (Hilbert 空間) の閉部分空間の場合は、直交射影はつねに存在するという定理 (射影定理, 付録 D.1 を参照せよ) がある。有限次元の場合は、以下に説明するように簡単に解決する。■

1.4.2 Fourier 級数の部分和は直交射影であり、(ある意味で) 最良近似である

Fourier 級数には、実は非常に多くのヴァリエーションがある (この講義では紹介出来ないのが残念だが...)。それらすべてが、直交系 $\{\varphi_n\}$ により、任意に与えられた関数 f を、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n$$

という級数で表す (その級数を f の Fourier 級数と呼ぶ)、というものである。

この級数の部分和

$$\sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n$$

は、前項の h に一致する。つまり f の Fourier 級数の部分和は、 f の

$$V = \text{span}\langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \rangle$$

への直交射影であり、内積から定まるノルム $\|\varphi\| := \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ について

$$\|f - s_N\| = \inf_{g \in V_N} \|f - g\| \quad (\text{誤差最小の原理})$$

を満たす、ということが分かったわけである。

Fourier 級数は無限級数なので、収束や、有限項で打ち切ったときの誤差が問題になる。つまり部分

$$(\#) \quad s_N := \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$$

が $N \rightarrow \infty$ のとき f に収束するかとか、誤差 $f - s_N$ の大きさははどれくらいか、ということであるが、上の結果は、後者の問への1つの良い答になっている。

例 1.4.4 f の Fourier 級数の部分 and

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は、 f の

$$V = \text{Span}\langle \cos 0x, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos Nx, \sin Nx \rangle$$

への直交射影である。

f の Fourier 級数の部分 and

$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

は、 f の

$$V = \text{Span}\langle e^{i0x}, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, \dots, e^{iNx}, e^{-iNx} \rangle$$

への直交射影である。■

1.4.3 Bessel の不等式, Parseval の等式, 完全正規直交系

Fourier 級数について、**Bessel の不等式**という非常に有名な不等式があり、Fourier 級数の収束のような基本的な問題で活躍する。この講義では、収束の問題にはあまり深入りしない方針であるが、話の流れから、ここで解説するのが自然であると信じる (当然「数学とメディア」で説明されたはずなので、復習ということになる)。

命題 1.4.5 (Bessel の不等式) 内積空間 X の直交系 $\{\varphi_n\}$ と任意の $f \in X$ に対して

$$\sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|f\|^2$$

が成り立つ。無限個の場合は (極限を取って)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|f\|^2 \quad (\text{Bessel の不等式}).$$

特に $\{\psi_n\}$ が正規直交系の場合は

$$\sum_{n=1}^N |(f, \psi_n)|^2 \leq \|f\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2 \leq \|f\|^2$$

証明 $0, h, f$ を頂点とする直角三角形の図を描く。ピタゴラスの定理から

$$\|h\|^2 + \|f - h\|^2 = \|f\|^2.$$

ゆえに

$$\|h\|^2 \leq \|f\|^2.$$

左辺はやはりピタゴラスの定理より

$$\|h\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \left\| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \left| \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \right|^2 \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2}.$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^N \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leq \|f\|^2. \blacksquare$$

三角関数系 $\{\cos mx\}_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \cup \{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ や、複素指数関数系 $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ については、任意の関数 f の Fourier 級数の和は f に等しい。これが成り立つような関数系は完全 (complete) であるといわれる。ここでは、次のように一般的な形で定義しておく。

定義 1.4.6 (完全系) X を内積空間、 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を X の直交系とする。 $\{\varphi_n\}$ が**完全** (complete) であるとは、

$$(1.16) \quad (\forall f \in X) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N(f)\| = 0$$

が成り立つことをいう。ここで

$$(1.17) \quad s_N(f) := \sum_{n=1}^N \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n \quad (N \in \mathbb{N}).$$

上で示したように、一般に

$$\|s_N(f)\|^2 + \|f - s_N(f)\|^2 = \|f\|^2$$

が成り立つので、 $\{\varphi_n\}$ が完全であることと、

$$(1.18) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|s_N(f)\|^2 = \|f\|^2$$

が成り立つことは同値である。後者の条件は

$$(1.19) \quad (\forall f \in X) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} = \|f\|^2 \quad (\text{直交系の場合}),$$

$$(1.20) \quad (\forall f \in X) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2 = \|f\|^2 \quad (\text{正規直交系の場合})$$

とも書ける (つまり Bessel の不等式で等号が成立する)。等式 (1.19), (1.20) は **Parseval の等式** と呼ばれる。

以上が、Fourier 級数の L^2 理論のさわりである。きちんとやるには、Lebesgue 積分論が必要になるが、 L^2 理論の割と大きな部分が説明出来たと思う。

(以下、工事中)

Bessel の不等式が成り立つならば、Fourier 係数 $c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$ は、 $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束することが分かる。Fourier 係数の大きさに関して、簡単に分かることをまとめておく。

命題 1.4.7 (Fourier 係数の有界性, 減衰性, Parseval の等式) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は周期 2π で、 f は $(-\pi, \pi)$ で可積分であるとする。

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots), \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

とおくとき、(1), (2), (3) が成り立つ。

(1)

$$\begin{aligned} |a_n|, |b_n| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx, \\ |c_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx. \end{aligned}$$

特に $|f(x)| \leq M$ が成り立つときは

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq 2M \quad (n = 0, 1, \dots), \quad |b_n| \leq 2M \quad (n = 1, 2, \dots), \\ |c_n| &\leq M \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

(2) (Riemann-Lebesgue の定理)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0.$$

(3) (Parseval の等式) f が $(-\pi, \pi)$ で自乗可積分である ($|f|^2$ が可積分である) 場合

$$\begin{aligned} \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx, \\ 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx. \blacksquare \end{aligned}$$

証明

(1)

$$|a_n| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) \cos nx| \, dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx.$$

$|b_n|$ の評価も同様である。

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) e^{-inx}| \, dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx.$$

また $|f(x)| \leq M$ ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} M \, dx = 2\pi M.$$

(2) 「数学とメディア」でやった(らしい)。ここでは省略する。少し条件を強くして、 $|f|^2$ が積分可能な場合は、Bessel の不等式(あるいは次の(3))から、一般項 $\rightarrow 0$ が導ける。

(3) 三角関数系、指数関数系の完全性を認めると、Parseval の等式

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{|(\varphi_n, \varphi_n)|^2} \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2}$$

と

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|^2 dx = \begin{cases} \pi & (n \in \mathbb{N}) \\ 2\pi & (n = 0) \end{cases}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx|^2 dx = \pi \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{inx}|^2 dx = 2\pi \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

による。■

1.5 微分との関係

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数で、ある程度の滑らかさを持つとすると、Fourier 級数展開が出来る。

$$(1.21) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ここで a_n, b_n は f の Fourier 係数, c_n は f の複素 Fourier 係数である。これらはいずれも f に依存するので、それぞれ $a_n(f), b_n(f), c_n(f)$ とも書くことにする。

$$a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$c_n = c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

このとき、(1.21) の級数の各項を微分して出来る級数 (項別微分した級数とよぶ) と、 $f'(x)$ は等しいだろうか？

$$(1.22) \quad f'(x) \stackrel{??}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

級数 (1.21) は収束しても、(1.22) は収束するとは限らないが、次のように、少し弱い意味では正しい。

微分可能な f の Fourier 級数を項別微分した級数は、 f' の Fourier 級数である

$$(1.23) \quad f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}.$$

実際、次の定理が成り立つ。

命題 1.5.1 (導関数の Fourier 係数) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数で、連続かつ $[-\pi, \pi]$ で区分的に C^1 級とするととき、

$$(1.24) \quad a_n(f') = \begin{cases} nb_n(f) & (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}, \quad b_n(f') = -na_n(f) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$(1.25) \quad c_n(f') = inc_n(f) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

すなわち、 f' の Fourier 級数は (収束するとは限らないが)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}.$$

$c_n(f)$ を後に出て来る Fourier 変換の記号の真似をして $\mathcal{F}[f](n)$ と表すことにすると、(1.25) は次のように書き換えられる。

$$(1.26) \quad \mathcal{F}[f'](n) = in\mathcal{F}[f](n).$$

これは、後で出て来る Fourier 変換の場合の公式 $\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi\mathcal{F}[f](\xi)$ と同じ、と考えられる。
 $k \in \mathbb{N}$ として、 f が k 回微分できる場合は

$$(1.27) \quad \mathcal{F}[f^{(k)}](n) = (in)^k \mathcal{F}[f](n).$$

つまり、“ f を 1 回微分すること” = “ $(\mathcal{F}f)$ に in を 1 回かけること”、である。この「Fourier 係数と微分との関係」により、微分方程式への応用がもたらされる (簡単な場合は、微分方程式が代数方程式に変換される)。それについては、後述する予定である (時間に余裕があれば…)

証明 まず f が C^1 級の場合の証明を書く。

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left([f(x) \cos nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-n \sin nx) dx \right) \\ &= n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \begin{cases} nb_n(f) & (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}, \\ b_n(f') &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left([f(x) \sin nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (n \cos nx) dx \right) \\ &= -n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = -na_n(f), \\ c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left([f(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-ine^{-inx}) dx \right) \\ &= in \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = inc_n(f) \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

f が連続でかつ $[-\pi, \pi]$ で区分的に C^1 級のときは、ある $\{x_k\}_{k=0}^N$ が存在して、

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi,$$

$f|_{[x_{k-1}, x_k]}$ は C^1 級である。以上から、

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \left([f(x) e^{-inx}]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) (-ine^{-inx}) dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(f(x_N) e^{-inx_N} - f(x_0) e^{-inx_0} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) \\ &= in \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = inc_n(f). \blacksquare \end{aligned}$$

例 1.5.2 既に次のことを示してある。 $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x < \pi$) の Fourier 級数展開は

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos 1x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots \right).$$

$g(x) = 2x$ ($-\pi \leq x < \pi$) の Fourier 級数展開は

$$g(x) = 4 \left(\frac{\sin 1x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{2} + \cdots \right).$$

f は上の命題 1.5.1 の仮定を満たし、 $f' = g$ である。Fourier 係数は確かに命題の主張のようになっている。 ■

この命題 1.5.1 と Riemann-Lebesgue の定理を組み合わせると、次を得る。

系 1.5.3 (たくさん微分出来ると Fourier 係数は速く減衰する) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が C^k 級かつ周期 2π ならば

$$\begin{aligned} a_n(f) &= b_n(f) = o(n^{-k}) \quad (n \rightarrow \infty), \\ c_n(f) &= o(|n|^{-k}) \quad (n \rightarrow \pm\infty). \end{aligned}$$

証明 簡単な複素 Fourier 係数の方だけ書く⁷。命題 1.5.1 から $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ が成り立つ。一方、 $f^{(k)}$ は連続であるから、 $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f^{(k)}) = 0$ 。ゆえに $n \rightarrow \pm\infty$ のとき

$$\frac{c_n(f)}{n^{-k}} = n^k c_n(f) = \frac{1}{i^k} c_n(f^{(k)}) \rightarrow 0.$$

すなわち $c_n(f) = o(n^{-k})$ ($n \rightarrow \pm\infty$)。 ■

余談 1.5.4 実は、 f が超関数の場合も上の公式 (1.24), (1.25) は成立する (もちろん証明は変わるが、ある意味では同じとも言える)。上の公式は、実際上つねに成り立つと考えてよい。 ■

f が微分できると、 $n \rightarrow \infty$ のとき、Fourier 係数は速く減衰することが分かったが、その結果として、Fourier 級数が良い収束をすることが導ける。例として次の定理をあげる。

⁷ e^{inx} の k 階導関数は、 $(in)^k e^{inx}$ 。これに対して $\cos nx$ と $\sin nx$ の導関数は、簡単な式で表しにくい。 $(\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \pi/2)$, $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \pi/2)$ に気づくと、 $\left(\frac{d}{dx}\right)^k \cos x = \cos(x + k\pi/2)$, $\left(\frac{d}{dx}\right)^k \sin x = \sin(x + k\pi/2)$ という公式を得る。後でこれを利用した証明を行う。

定理 1.5.5 (連続かつ区分的に C^1 級の関数の Fourier 級数) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数で、連続かつ区分的に C^1 級ならば、 f の Fourier 級数は一様収束して、和は f に等しい。

証明 前半の、 f の Fourier 級数が一様収束する、というところだけ証明する。その和が f に等しいことの証明は付録に回す (定理 C.4.1 「 f の Fourier 級数が一様収束すれば和は f に一致する」、p. 144)。

複素 Fourier 級数の場合に証明する。 inc_n は f' の Fourier 係数であるから、命題 1.4.7 を用いると、

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |inc_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

ゆえに

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

$|c_n e^{inx}| = |c_n|$ であり、

$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = \sum_{n \neq 0} \left(n |c_n| \cdot \frac{1}{n} \right) \leq \sqrt{\sum_{n \neq 0} n^2 |c_n|^2} \sqrt{\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} < \infty.$$

Weierstrass の M test により、 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ は一様収束する。■

この議論を理解すると、より一般に、 $k \in \mathbb{N}$ として、 f が C^k 級であれば

$$(1.28) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2k} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(x)|^2 dx$$

が導かれることが分かる。 $n \rightarrow \pm\infty$ のとき急速に増大する n^{2k} をかけても収束するということは、 c_n が速く減衰することを意味している。

最後に、これまでとは反対に、 f の Fourier 級数が速く減衰するならば、 f は高い微分可能性を持つことを示そう。

命題 1.5.6 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は連続かつ周期 2π で、その Fourier 係数 a_n, b_n が、ある自然数 k に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) < \infty$$

を満たすとす。このとき f は C^k 級であり、 f の Fourier 級数は k 回項別微分可能である。

証明 (工事中) 仮定から $\sum_n (|a_n| + |b_n|) < \infty$ であるから、Weierstrass M test により、 f の Fourier 級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

は一様収束し、和は $f(x)$ に一致する:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$1 \leq \ell \leq k$ として、右辺の級数を形式的に ℓ 回項別微分すると

$$(1.29) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ell} (a_n \cos(nx + \ell\pi/2) + b_n \sin(nx + \ell\pi/2)).$$

ここで

$$|n^{\ell} (a_n \cos(nx + \ell\pi/2) + b_n \sin(nx + \ell\pi/2))| \leq n^{\ell} (|a_n| + |b_n|) \leq n^k (|a_n| + |b_n|),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) < \infty$$

であるから、Weierstrass M test により、(1.29) は一様収束する。ゆえに項別微分が正当化される。

■

1.6 この章のまとめ

Fourier 級数は、 \mathbb{R} で定義された周期関数を対象とする。周期は何でも良いが、以下では 2π の場合に説明する。

\mathbb{R} で定義された、ある程度滑らかで⁸、周期 2π を持つ関数の全体を $X_{2\pi}$ とおく。 $f, g \in X_{2\pi}$ に対して、

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定まる (f, g) を f と g の内積と呼ぶ。これを備えた $X_{2\pi}$ は (内積の公理を満たすので) 内積空間である。 f のノルム $\|f\|$ を $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ で定める。

$\{\cos mx\}_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \cup \{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ や $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $X_{2\pi}$ の完全直交系である。つまり適当に順番を入れ替えて $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と書くとき、

$$(i) \quad (\forall m, n) \quad m \neq n \Rightarrow (\varphi_m, \varphi_n) = 0$$

$$(ii) \quad (\forall n) \quad (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0$$

$$(iii) \quad (\forall f \in X_{2\pi}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\| = 0, \quad c_k := \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

という3つの性質を持つ。

ゆえに任意の $f \in X_{2\pi}$ に対して、部分和を

$$s_N(x) := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{(f, e^{ikx})}{(e^{ikx}, e^{ikx})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定めると、 $N \rightarrow \infty$ のとき s_N は f に収束する:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N\| = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (\text{ノルム } \|\cdot\| \text{ による収束の意味で}).$$

この右辺の級数を f の Fourier 級数、 c_n を f の Fourier 係数と呼ぶのである。

⁸ 「ある程度滑らか」はぼかした言い方だが、この講義で例に出す関数はほとんどが「 $[-\pi, \pi]$ で区分的に C^1 級」であり、この場合は条件を満たす。実は、Lebesgue 積分を学ぶと理解できる、「Lebesgue 可測で二乗可積分 ($|f|^2$ が可積分)」という条件がぴったりで、そうした場合は $X_{2\pi}$ は $L^2(-\pi, \pi)$ と書かれ、完備な内積空間 (Hilbert 空間) になる。

関数 f の n 項目の Fourier 係数を $\mathcal{F}[f](n)$ と表すとき

$$\mathcal{F}[f'](n) = in\mathcal{F}[f](n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

が成り立つ。これから f が多くの回数微分できるほど、Fourier 級数の収束も良く (速く) なることがわかる。

Fourier 級数は (無限次元空間の中の話なので) 色々な意味の収束が考えられる。

例えば、 f が連続で区分的に C^1 級であれば、Fourier 級数は f に \mathbb{R} 上一様収束する。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |s_N(x) - f(x)| = 0.$$

これに対して、 f が単に $[-\pi, \pi]$ で区分的に C^1 級であるだけで、不連続点が存在する場合は、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = \begin{cases} f(x) & (x \text{ が } f \text{ の連続点}) \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & (x \text{ が } f \text{ の不連続点}) \end{cases}$$

が成り立ち、Fourier 級数は決して一様収束しない (Gibbs の現象が生じる)。

1.7 おまけ: この後の Fourier 級数の勉強

いくつかの方向性が考えられる。

もともと Fourier 級数は、偏微分方程式を解くための道具として発達したこともあり、偏微分方程式への応用が非常に豊かである。そこで、偏微分方程式の勉強をして Fourier 級数の使い方に習熟する、というのが桂田の1つのオススメである。あるいはもっと広い応用が見たければ、ケルナー [9] を読むのが楽しいかもしれない (翻訳がイマイチなので英語アレルギーがなければ原著の方がお勧め。翻訳を直してくれると良いのだけど…)。

一方、Lebesgue 積分、Hilbert 空間 (関数解析の定番メニューである) を学び、Fourier 級数の L^2 理論を学ぶ、という方向も考えられる。その場合、Lebesgue 積分の習得には長い時間がかかるので (応用は Fourier 解析にとどまらないので、それを学ぶ価値は十二分にあるが) 順番を逆にして Hilbert 空間の勉強 (関数解析入門) から始める、というのもあると思う。

(論理的な順番に学ぶとすると、Lebesgue 積分 \rightarrow 関数解析 (入門) \rightarrow Fourier 解析, となるであろう。ちなみに桂田自身は、関数解析の初歩 \rightarrow Lebesgue 積分 \rightarrow 関数解析 (割と詳しく) \rightarrow Fourier 解析 (同時期に超関数), という順番で勉強した。おいしいものを食べるのが最後になったような気がしないでもない。)

2019年8月某日 追記 特にこの章の直交性の話を面白く感じた人には、Hilbert 空間の勉強を勧めてみたい、と考えるようになった。ふとしたことから、こういう話を面白く感じた人がいることが分かったので。実のところ、私自身、学生時代に「ハマった」口で、そういう人がいることは不思議に感じない (「君もそうですか」)。私は学部3年生の時にそういう勉強をしたのだけれど、それはその後の勉強や研究の方向性など諸々 (研究室選びとかにも) に、大きな影響を与えた (と最近になって気づいた)。参考書としては、新刊が入手しづらいが、藤田・黒田・伊藤 [10] を勧めしておく。それで読んだ射影定理の証明はそのとき以来忘れたことがない。

第2章 Fourier 変換

2.0 イントロ

繰り返しになるが、この講義の目的は、Fourier 解析の基礎事項を (信号処理を題材に) 解説することである。既に Fourier 級数を解説したが、Fourier 解析のファミリーには

1. Fourier 級数 (Fourier 係数 — 周期関数が対象)
2. (普通の¹⁾ Fourier 変換 (関数が対象)
3. 離散 Fourier 変換 (周期数列が対象)
4. 離散時間 Fourier 変換 (数列が対象)

という4人がある。後で理解できるが、この4人で一揃いということになる²。名前の付け方が不統一なせいで一揃いに感じられないかもしれないが、歴史的経緯で仕方がない。

この章では2番目の Fourier 変換を説明する。その性質は他のメンバーも持っている場合が多いので、たとえ Fourier 変換そのものを使わない

関数 f の Fourier 変換

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx$$

は、Riemann 積分の範囲で考えようとする、広義積分である。つまり (簡単のため f は \mathbb{R} 全体で連続として)

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)e^{-ix\xi} dx$$

のように、有限の範囲で積分しておいてから、極限を取ることになる (もしも f が不連続な場合は、さらなる極限操作が必要になる)。

この広義積分は、無条件では収束しない (Fourier 変換は存在しない)。例えば $f(x) = 1$ (定数関数) であっても、広義積分は収束しないことに注意しよう (超関数解釈で1の Fourier 変換を考えることは出来るが、ここではそのことに立ち入らない)。広義積分を収束するために、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき、 $f(x)$ が “十分速く0に近づく” というタイプの条件を課することが多い³。

また、Fourier 変換に関する種々の公式を証明しようとする、 f について、さらに追加で条件を課す必要が生じたりする。Lebesgue 積分を用いると、議論が多少は簡単になるが、それでもいくつか本質的な問題が残る。

この講義「信号処理とフーリエ変換」では、この辺の説明をすっぱりあきらめることにしている (この文書には、収束の議論等を申し訳程度に書く場合もあるが、講義では、それを話す余裕があまりない)。その種の議論を別にしても学ぶべきことがたくさんあり、そういうことに焦点を当てる、という方針で講義する。

そういうわけで、将来、Fourier 変換を使う人は、Lebesgue 積分などを学んだ後に、学習し直すことを勧める。

¹ファミリーのどのメンバーも、「Fourier 変換」と呼ばれることがあるので「普通の」をつける方が良いかも。

²「関数」または「数列」で2通り、周期的かどうかで2通り、 $2 \times 2 = 4$ 通り

³もっとも、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ でなくても、広義積分が収束することもある。

2.1 Fourier 変換の導入, Fourier の反転公式

長めの説明と、短めの説明を用意した。(講義では後者を使うようになった、前者は整理不十分なところも残っている。)

2.1.1 詳しい説明

(2018年度以前は、講義で以下のようなことを説明していた。2019年度は、はしよりたくなったこと、もともと Fourier 級数、Fourier 変換は「数学とメディア」で習ったはずなので、導入(イントロダクション)は済んでいるはず、と気づいたせいもあって、2.1.2の内容を説明するように切り替えた。)

Fourier 級数展開を既知として、その極限として **Fourier 変換** を導入し、有名な **反転公式** (inversion formula) を導こう。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ はある程度滑らかとする。 f は周期関数ではなく、そのかわりに、 $f(x)$ は $x \rightarrow \pm\infty$ のとき十分速く減衰する(0に収束する)とする。

素朴なアイデア: 任意の $l > 0$ に対して、 f を区間 $[-l, l]$ に制限して考えて、Fourier 級数展開をしてから、 $l \rightarrow \infty$ とする。

Fourier 級数について分かっていることから、任意の正数 l に対して、

$$c_n := \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x} dx \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{とおくと} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \quad (x \in (-l, l)).$$

(細かい注意: $f(-l) = f(l)$ が成り立つとは限らないので、 $x = \pm l$ は不連続点扱いになる。)

ゆえに $(c_n$ をその $\sqrt{2\pi} \frac{l}{\pi}$ 倍で置き換える)

$$c'_n := \frac{\sqrt{2\pi}l}{\pi} c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x} dx \quad \text{とおくと}$$
$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \quad (x \in (-l, l)).$$

$|x| \rightarrow \infty$ のとき $|f(x)| \rightarrow 0$ と仮定してあるので、 l が十分大きいとき、 \int_{-l}^l は $\int_{-\infty}^{\infty}$ に近いであろう⁴。すなわち

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

とおくと

$$c'_n \doteq \widehat{f}\left(n\frac{\pi}{l}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(念のため: $|c'_n - \widehat{f}(n\frac{\pi}{l})| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>l} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>l} |f(x)| dx \rightarrow 0 \dots$ 右辺に n は出て来ないので、 n について一様な近似になっているわけだ。)

この近似によって

$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n\pi/l) e^{i\frac{n\pi}{l}x}$$
$$\doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in (-l, l)).$$

⁴ $\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l = \int_{-\infty}^{\infty}$ が成り立つから。

(2つめの \doteq は、 $\Delta\xi > 0$ が十分小さいときに $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)d\xi \doteq \Delta\xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta\xi)$ が成り立つことを用いた。)

以上まとめると

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}) \quad \text{とおくと} \quad f(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in (-l, l)).$$

この形に書いておくと、仮定に l が現れないので、 $x \in \mathbb{R}$ で成り立つと期待して良い。

2つの近似 ((i) $[-l, l]$ での積分を \mathbb{R} での積分で近似する、(ii) 級数の和を積分で近似する) をして得た式であるが、実は f に関する適当な仮定のもとで等式が成り立つことが分かっている。すなわち

$$(2.1) \quad \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}) \quad \text{とおくと} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

これを **Fourier の反転公式** と呼ぶ。

一般に関数 f に対して、

$$(2.2) \quad \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

で \widehat{f} が定まるとき、それを f の **Fourier 変換** (the Fourier transform of f) と呼ぶ。写像 $f \mapsto \widehat{f}$ のことも **Fourier 変換** (Fourier transform, Fourier transformation) と呼び、 \mathcal{F} で表すことが多い。 $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ である。

同様に関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$(2.3) \quad \widetilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

で \widetilde{g} が定まるとき、それを g の **共役 Fourier 変換** と呼び、 \mathcal{F}^* で表すことが多い。 $\mathcal{F}^*g = \widetilde{g}$ である。

この記号を用いると、(2.1) は次のように書き換えられる。

Fourier の反転公式

多くの場合、次式が成り立つ。

$$(2.4) \quad \mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = f.$$

また同様にして次式も得られる。

$$(2.5) \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^*g) = g.$$

つまり、 f を Fourier 変換してから、共役 Fourier 変換すると元に戻る (同様に、 g を共役 Fourier 変換してから、Fourier 変換すると g に戻る)。このことから、共役 Fourier 変換のことを **逆 Fourier 変換** とも呼ぶ。

上の議論は、いわゆる発見的考察というもので、反転公式も証明できたわけではないことを注意しておこう。またこの公式は無条件で成り立つわけではなく、適当な仮定が必要である。この講義では、それらの議論については深入りしないことにする。

余談 2.1.1 (Fourier 変換の定義の流儀 (1)) Fourier 級数の定義式は、テキストによりまちまちである。

$$(2.6) \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx, \quad \widetilde{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} dx$$

とするもの、

$$(2.7) \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \widetilde{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi i x \xi} dx$$

とするもの、その他色々ある。(個人的には、(2.7) の流儀が、色々な公式が簡潔にかけて好みであるが⁵、 2π をたくさん書く必要があったりして、強制する気にはなれない。)

「数学とメディア」を担当されていた二宮先生は (2.2), (2.3) を用いる流儀採用している (ようである)。

いずれの流儀の場合も、反転公式 $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = f$, $\mathcal{F}\mathcal{F}^*g = g$ は成り立つようにしてある (らしい)。■

余談 2.1.2 (Fourier 変換の定義の流儀 (2)) Fourier 変換の定義の式は同じでも、積分をどういう意味にとるかという流儀の違いがある。

(a) $\widehat{f}(\xi) = \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)e^{-ix\xi} dx$ で、 $\int_{-R_1}^{R_2} f(x)e^{-ix\xi} dx$ は Riemann 積分 (Riemann 和の極限) として定める。

(b) $f \in L^1(\mathbb{R})$ の場合に考える。Lebesgue 積分とみなす。

(c) $f \in L^2(\mathbb{R})$ の場合に場合に考える。例えば $\widehat{f}(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(x)e^{-ix\xi} dx$ (極限は L^2 収束、すなわち、 L^2 ノルム $\|\varphi\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ に関する極限で考える)

(d) 超関数で考える。

この講義では、その点をはっきりさせないで議論する。もし「どうしてもはっきりさせてくれ」と言われたら、Riemann 積分の広義積分という立場 (a) と答えておく (Lebesgue 積分や超関数は大半の学生が知らないはずだから)。— このような細かいことは言わないつもりであったのだが、2016 年度の授業をしていたときに、学生から質問が出て、少し説明する必要が生じたので、ここに書いておく次第である (質問をして来た学生は偉いと思う)。■

余談 2.1.3 (Fourier 級数と Fourier 変換を見比べる) 次節以降、Fourier 変換の説明を続けるが、この段階で Fourier 級数を振り返っておこう。

周期 2π の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f の Fourier 係数 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定めたが⁶、これが f の Fourier 変換 $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$ ($\xi \in \mathbb{R}$) に相当する。

そして (適当な条件下で) Fourier 級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つが、これが Fourier 反転公式 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi$ ($x \in \mathbb{R}$) に相当する。■

⁵実は、今の Wikipedia の標準でもある。この点については趣味がいいなと思う。

⁶ f の Fourier 係数 c_n を $\widehat{f}(n)$ と書くことがある。その書き方をすると、より似ている式となる。

余談 2.1.4 (\mathcal{F}^{-1} でなく \mathcal{F}^* と書く理由) 逆写像ならば \mathcal{F}^{-1} と書けば良さそうだが、 \mathcal{F}^* としている本が多い。 $*$ は通常、共役作用素を表すのに用いる記号である⁷。実際、定義域を決めて、その値域が何になるかきちんと議論すると、逆写像にならないこともあり、逆写像になる場合もその証明に結構骨が折れる。そういうわけで、逆作用素とはあまり言いたくないのだと思われる。一般には、共役 Fourier 変換と呼んでおいて、条件が整っているときは、それが Fourier 変換の逆変換 (逆写像) になる、ということである。

例えば、Lebesgue 積分の意味で自乗可積分な関数の全体 $L^2(\mathbb{R})$ で考えると、 $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ は全単射となる (さらに等長で、いわゆる unitary 変換となる)。言い換えると共役作用素が逆作用素になる。

一方、超関数で考えると、広い範囲 \mathcal{S}' (緩増加超関数の全体) に対して、 $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ が定義出来て、 \mathcal{F}^* は \mathcal{F} の逆写像であることが証明できる。これもとてもすっきりしているが、超関数の議論をするのは敷居が高い…■

2.1.2 軽めの説明

(2019 年度は、§§2.1.1 の代わりに次のような説明をした。)

まず Fourier 級数を復習する。ある程度なめらかな $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 T ならば、

$$(2.8) \quad c_n = \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくとき (「最近では c_n のことを $\hat{f}(n)$ や $\mathcal{F}f(n)$ と書くことも多い。」)

$$(2.9) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つのであった。

周期関数でない $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、周期が非常に大きい場合で考えて、適当な仮定のもとで以下の式が導ける。

$$(2.10) \quad \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

とおくとき

$$(2.11) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(2.10) で定まる $\hat{f} (= \mathcal{F}f)$ を f の Fourier 変換と呼ぶ。写像 $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ のことも Fourier 変換と呼ぶ。 f の Fourier 変換を、 $\mathcal{F}[f(x)](\xi)$ という記号で表すこともある (すぐ後で実例を使って説明する)。

(2.10), (2.11) の右辺の類似性に注目しよう。

一般に、関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 g の共役 Fourier 変換 $\tilde{g} (= \mathcal{F}^*g)$ を

$$\tilde{g}(x) = \mathcal{F}^*g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

⁷例えば、線形代数では、行列 $A = (a_{ij})$ の Hermite 共役 $(\overline{a_{ji}})$ を A^* と書くのであった。今の場合、行列でなく、関数空間の上の線形作用素であり、その共役作用素の定義を述べるには、やや手間がかかるので、ここでは省略する。

で定める。写像 $\mathcal{F}^*: g \mapsto \tilde{g}$ のことも共役 Fourier 変換と呼ぶ。

この記号を用いると、(2.11) は

$$(2.12) \quad \mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = f$$

と書き換えられる。

(2.11) や (2.12) を Fourier 反転公式と呼ぶ。

言葉遣いが全く違うので、分かりにくいかもしれないが

Fourier 係数には Fourier 変換が対応し、Fourier 級数展開には反転公式が対応する。

(2.8) は (2.10) に、(2.9) は (2.11) に対応する。

適当な条件のもとで

$$(2.13) \quad \mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = f, \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^*g) = g$$

が成り立つ。

とりあえず $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ と考えてよい。そのため、共役 Fourier 変換のことを逆 Fourier 変換とも呼ぶ。本当は、逆写像を考えるときは、写像の定義域、終域をはっきりさせて、全単射であることをきちんと確認する必要があるが、ここではそれをサボっていることを注意しておく。

余談 2.1.5 (言葉遣いについて、行列で出て来る言葉を思い出して比較する) 線形代数で、正方行列 U が unitary 行列とは、 U の Hermite 共役 $U^* = (\overline{u_{ji}})$ が U^{-1} となっている、ということ。Fourier 変換は unitary 変換と呼ばれるものになっている。■

2.2 定義式・反転公式から得られる便利な公式

なるべく早く具体例を見せたいのだが、その計算のためにも知っておいた方がよい公式を紹介する。

補題 2.2.1 (定義式・反転公式から得られる公式) (本当は、Fourier 変換や逆変換が存在するための条件を書くべきであるが…)

$$(1) \quad \mathcal{F}^*f(x) = \mathcal{F}f(-x), \quad \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}^*f(-\xi).$$

f の Fourier 変換、 f の共役 Fourier 変換は、互いに他方を“折り返した”ものに等しい。

$$(2) \quad g = \mathcal{F}f \Leftrightarrow f = \mathcal{F}^*g.$$

$$(3) \quad g = \mathcal{F}f \Rightarrow \mathcal{F}g(\xi) = f(-\xi).$$

証明もどき 簡単なことだけれど、混乱しそうなのでゆっくり説明する。

(1) 共役 Fourier 変換の定義から (普段 g と書くのを f と書く)

$$\mathcal{F}^*f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Fourier 変換の定義から (普段、積分の変数を x , 変換の変数を ξ と書くのを入れ替える)

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

この2つの式を見比べると

$$\mathcal{F}^* f(x) = \mathcal{F} f(-x).$$

もう1つの方は「同様に示される」と言っても良いし、 x に $-\xi$ を代入しても良い。

(2) (\Rightarrow) 反転公式 $\mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = f$ に $g = \mathcal{F}f$ を代入すると、 $f = \mathcal{F}^*g$.

(\Leftarrow) もう一つの反転公式 $\mathcal{F}(\mathcal{F}^*g) = g$ に $f = \mathcal{F}^*g$ を代入すると、 $\mathcal{F}f = g$

(3) $g = \mathcal{F}f$ とすると、(2) より $f = \mathcal{F}^*g$. ゆえに $f(-\xi) = \mathcal{F}^*g(-\xi)$. (1) より $\mathcal{F}^*g(-\xi) = \mathcal{F}g(\xi)$.
ゆえに $f(-\xi) = \mathcal{F}g(\xi)$. ■

2.3 具体的な関数の Fourier 変換

2.3.1 Fourier 変換とのつきあい方

Fourier 変換の計算は難しい。

講義や本で実例を見る前に、一度自分で思いついた関数の Fourier 変換を、自力で求めることを試してみよう (コンピューターが使える場合は、コンピューターで求めることも試みよう)。

自分で考えてもらいたいので、計算が難しくなる理由の説明はあえて省略する。

この点については、Fourier 級数 (Fourier 係数) を計算する場合とは、大きな違いがある。

人間は、必要ならば努力するので、実際には色々な関数の Fourier 変換が求められている。応用上重要な例はたくさんあるので、一々覚えるのは大変である。複素関数論の留数計算を用いて計算できるものもあるが、その場合も最後まで正確に計算するのはそんなに簡単ではない。一度出会ったものは、大まかに覚えておいて、再会したときに、これはアレだと気づいて、ノートや本を見返す、と対応するくらいがせいぜいであろう (私はそうしています)。

試験のときは、(仕方がないので) 定理 2.3.1 の公式が導けるように練習しておくものかもしれない。これは脱線。

自分が取り組んでいる問題に現れた関数の Fourier 変換が求められるかどうかは、数式処理系 (例えば Mathematica) に尋ねるのが実際的と思う。

ここでは、比較的簡単に計算できて、意義ある応用もある、数少ない例を紹介する。例自体もそれなりに重要であるが、それらの計算に使われるテクニックの学習に意味があると考えている。

2.3.2 覚えるべきフーリエ変換

簡単なフーリエ変換の例を5つ紹介する。何らかの形で頭に入れておこう (自分で導出できる、正確に暗記する、大体の形を覚えておいて出て来たら本を見れば良いと分かる、等々)。

定理 2.3.1 (マスターすべき Fourier 変換) 以下 $a > 0$ とする。

$$(1) \mathcal{F} [e^{-a|x|}] (\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}.$$

$$(2) \mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] (\xi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\xi|}.$$

$$(3) f := \frac{1}{2a} \chi_{(-a,a)}, \text{ すなわち } f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2a} & (-a < x < a) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \text{ とおくと、 } \mathcal{F} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}.$$

$$\text{sinc } x := \frac{\sin x}{x} \text{ を用いると、 } \mathcal{F} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(a\xi).$$

$$(4) \mathcal{F} \left[\frac{\sin(ax)}{ax} \right] (\xi) = \sqrt{2\pi} \times \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a) \\ \frac{1}{4a} & (\xi = \pm a). \end{cases}.$$

$$(5) \mathcal{F} [e^{-ax^2}] (\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

(この文書の中でも、この定理の応用が複数ある。例えば第 9 章を見よ。)

注意 2.3.2 (記号の説明) (1) は、 $f(x) := e^{-a|x|}$ とするとき $\mathcal{F} f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}$ であることを主張している。つまり $\mathcal{F}[f(x)](\xi)$ で $\mathcal{F} f(\xi)$ を表している。この記法は良く使われているので、慣れておくこと。

似たような習慣は、Laplace 変換などにもある。例えば

$$\mathcal{L} [e^{at}] (s) = \frac{1}{s - a}.$$

a は定数であり、 $[\]$ 内の関数の変数を表す文字は x や t であることを「明記しなくても分かりなさい」というわけで、あまり筋の通った記号とは言えない。Mathematica では

```
FourierTransform[Exp[-a Abs[x]], x, xi, FourierParameters->{0, -1}]
```

```
FourierTransform[If[-1 < x < 1, 1/2, 0], x, xi, FourierParameters -> {0, -1}]
```

のように何が変数であるか指示する (そうでないとコンピューターに命令できない)。 ■

この記法に慣れてもらうために一つ問題を解いてみよう。一般に

$$(2.14) \quad \mathcal{F}[f(-x)](\xi) = \mathcal{F} f(-\xi)$$

(裏返してから Fourier 変換したものは、Fourier 変換してから裏返したものと一致する)

が成り立つことを示せ。

(解答) 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{F}[f(-x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-ix\xi} dx.$$

$y = -x$ とおくと、 $dx = -dy$. $x \rightarrow -\infty$ に $y \rightarrow \infty$ が、 $x \rightarrow \infty$ に $y \rightarrow -\infty$ が対応するので

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-ix\xi} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(y)e^{iy\xi}(-dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{iy\xi} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy(-\xi)} dy = \mathcal{F}f(-\xi). \end{aligned}$$

ゆえに (2.14) が成り立つ。■

複素指数関数を、実指数関数と三角関数で書き直して計算する人がいるけれど、指数関数のまま計算することを勧める。

補題 2.3.3 (指数関数の微積分) (1) $a \in \mathbb{C}$ とするとき $(e^{ax})' = ae^{ax}$.

(2) $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

(3) $a > 0, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき

$$\int_{-a}^a e^{ibx} dx = \frac{2 \sin(ab)}{b} = 2a \operatorname{sinc}(ab).$$

$$\text{ただし } \operatorname{sinc} x := \frac{\sin x}{x}.$$

補題 2.3.3 の証明

(1) 省略する (複素指数関数をどのように定義してあるかによる⁸)。

(2) (1) からすぐ分かる。

(3)

$$\int_{-a}^a e^{ibx} dx = \left[\frac{e^{ibx}}{ib} \right]_{x=-a}^{x=a} = \frac{2}{b} \cdot \frac{e^{iab} - e^{-iab}}{2i} = \frac{2}{b} \sin(ab) = 2a \frac{\sin(ab)}{ab} = 2a \operatorname{sinc}(ab). \blacksquare$$

定理 2.3.1 の証明

(1) $R > 0$ とすると

$$\int_0^R e^{-a|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_0^R e^{-(a+i\xi)x} dx = \left[\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)} \right]_0^R = \frac{1 - e^{-(a+i\xi)R}}{a+i\xi} \rightarrow \frac{1}{a+i\xi} \quad (R \rightarrow +\infty).$$

(ここで、 $|e^{-(a+i\xi)R}| = e^{-aR} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow +\infty$) となることを使った⁹。)

負の範囲は $x = -y$ と変数変換して (変数変換せずにダイレクトに計算しても良いけれど)

$$\int_{-R'}^0 e^{-a|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_0^{R'} e^{-ay} e^{iy\xi} dy \rightarrow \frac{1}{a-i\xi} \quad (R' \rightarrow +\infty).$$

⁸例えば $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ が定義であれば、 $a = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) として $e^{ax} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)]$ であるから、 $(e^{ax})' = \alpha e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + e^{\alpha x} \cdot (-\beta \sin(\beta x) + i\beta \cos(\beta x)) = e^{\alpha x}(\alpha + i\beta)(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) = ae^{(\alpha+i\beta)x}$. — 準備中でまだ間違えてる

⁹ $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とするとき $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = e^x$. すなわち $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

ゆえに

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{\xi^2 + a^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}.$$

すなわち

$$\mathcal{F} [e^{-a|x|}] (\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}.$$

(2) 定義に従うと、

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] (\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{x^2 + a^2} dx.$$

残念ながら、この被積分関数の原始関数は求まらない。複素関数論を知っていれば留数定理を用いて直接計算できる (§§2.3.4)。

実はこの (2) は (1) の裏返しである。そのことに気づくと、補題 2.2.1 の (3) を用いて、結論が得られる。

補題 2.2.1 の (3) は、丸暗記するものでもないので、ここではもう一度やってみよう。

$\mathcal{F}f = g$ であれば、 $\mathcal{F}^*g = f$ であるから、一般に成り立つ $\mathcal{F}g(\xi) = \mathcal{F}^*g(-\xi)$ を用いて

$$\mathcal{F}g(\xi) = \mathcal{F}^*g(-\xi) = f(-\xi).$$

(1) で分かったように、 $f(x) = e^{-a|x|}$ とするとき $\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}$. ゆえに

$$\mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{x^2 + a^2} \right] (\xi) = f(-\xi) = e^{-a|-\xi|} = e^{-a|\xi|}.$$

左辺は $\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] (\xi)$ であるから、割り算して

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] (\xi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\xi|}.$$

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ とするとき

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \frac{1}{2a} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a} \cdot 2a \operatorname{sinc}(a(-\xi)) = \frac{\operatorname{sinc}(a\xi)}{\sqrt{2\pi}}.$$

(4) これも大雑把には「 $\mathcal{F}f = g$ ならば、 $\mathcal{F}g(\xi) = f(-\xi)$ が成り立つ」を用いればよい。実際 (3) で示したように

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{2a} \chi_{(-a,a)} \right] (\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(a\xi)$$

であるから

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(ax) \right] (\xi) = \frac{1}{2a} \chi_{(-a,a)}(-\xi) = \frac{1}{2a} \chi_{(-a,a)}(\xi).$$

ゆえに

$$\mathcal{F} [\operatorname{sinc}(ax)] (\xi) = \sqrt{2\pi} \frac{1}{2a} \chi_{(-a,a)}(\xi).$$

(余談) $\chi_{(-a,a)}$ は区分的に C^1 級で不連続である。区分的に C^1 級で不連続な関数 f の Fourier 級数の和は、

$$= \begin{cases} f(-\xi) & (\xi \text{ が } f \text{ の連続点}) \\ \frac{f(-\xi+0) + f(-\xi-0)}{2} & (\xi \text{ が } f \text{ の不連続点}) \end{cases}$$

という定理があった。実は Fourier 変換についても、これと同様の定理が成立する¹⁰。よって、正確には次のようになる:

$$\mathcal{F}[\text{sinc}(ax)](\xi) = \sqrt{2\pi} \times \begin{cases} \frac{1}{2a} & (-a < \xi < a) \\ \frac{1}{4a} & (\xi = \pm a) \\ 0 & (|\xi| > a) \end{cases}$$

(5) これはやや難しいので次項 (2.3.3) に回す。■

余談 2.3.4 (sinc のオリジン) sinc ([sɪŋk], the sinc function, the cardinal sine function) は、Woodward-Davies [12] (1952 年) において

$$(2.15) \quad \text{sinc } x := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

と導入された。この文書では、数学分野での慣習 (Mathematica もこちらを採用) に従って、 $\text{sinc } x := \frac{\sin x}{x}$ と定義してあるが、(2.15) のように定義するのを “the normalized sinc function” と呼ぶ (信号処理や情報理論においてはこちらの方がメジャーらしい)。

[12] から導入しているくぐりを引用

Sampling analysis rests on a well-known mathematical theorem that if a function of time $f(t)$ contains no frequencies greater than W , then

$$f(t) \equiv \sum_r f(r/2W) \text{sinc}(2Wt - r) \quad \dots \quad (24)$$

where $\text{sinc } x$ is an abbreviation for the function $(\sin \pi x)/\pi x$. This function occurs so often in Fourier analysis and its applications that it does seem to merit some notation of its own.

それに引き続き sinc の性質について述べている。

Its most important properties are that it is zero when x is a whole number but unity when x is zero, and that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } x \, dx = 1$$

and

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x - r) \text{sinc}(x - s) \, dx = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases}$$

r and s both being integers.

“abbreviation” は省略形、短縮形という意味である (念のため)。

“whole number” は、普通の数学の本でお目にかかることは少ないが、整数という意味である。つまり「 $x = 0$ のとき $\text{sinc } x = 1$ となる以外は、 x が整数のときは $\text{sinc } x = 0$ である」。関数論の定積分計算例でもおなじみの $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \pi$ から $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } x \, dx = 1$ が導ける。

sinc には信号処理以外にも色々な応用がある (Stenger [13] が有名な文献)。■

¹⁰確か、吉田・加藤 [11] に証明があったような記憶がある。確認しておくこと。

余談 2.3.5 Mathematica は、(4) の結果を $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\text{sign}(a - \xi) + \text{sign}(\xi + a)}{2}$ と表す。一般に $\alpha < \beta$ なる実数 α, β に対して

$$\frac{\text{sign}(\xi - \alpha) + \text{sign}(\beta - \xi)}{2} = \begin{cases} 0 & (\xi < \alpha \text{ または } \xi > \beta) \\ 1 & (\alpha < \xi < \beta) \\ \frac{1}{2} & (\xi = \alpha, \beta). \end{cases}$$

が成り立つので、 $\alpha = -a, \beta = a$ とすれば正しいことが分かる。■

2.3.3 e^{-ax^2} の Fourier 変換

e^{-ax^2} (a は正の定数) の形の関数を **ガウシアン** と呼ぶ人がいる。この関数は頻出して重要である。

$$(2.16) \quad \mathcal{F} [e^{-ax^2}] (\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

を示すことが目標である。ガウシアンの Fourier 変換はガウシアン、ということになる。

余談 2.3.6 (覚える助けになるかもしれないこと) $a = 1/2$ のときが、特に有名な結果で、元と同じ関数になる:

$$\mathcal{F} [e^{-x^2/2}] (\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

言い換えると、 $f(x) := e^{-x^2/2}$ は、 $\mathcal{F} f = f$ を満たす。 f は Fourier 変換 \mathcal{F} の、固有値 1 に属する固有関数である、ということになる。この f は、平均 0、分散 1 の正規分布¹¹ (標準正規分布) の確率密度関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ の定数倍でもある。確率論に慣れている人は、一般の場合の式で、分散に相当するものの積が 1 と覚えると良いであろう。■

証明 (定番) 2次式の平方完成

$$-ax^2 - i\xi x = -a \left(x^2 + \frac{i\xi}{a} x \right) = -a \left(x + \frac{i\xi}{2a} \right)^2 - \frac{\xi^2}{4a}$$

から、

$$\mathcal{F} [e^{-ax^2}] (\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x + \frac{i\xi}{2a})^2} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx.$$

最後の等号は関数論の Cauchy の積分定理により (簡単に?) 証明できる。ここではとりあえず認めることにする (少し後で証明を書いておくが、この講義の受講者がそれを習得することは要求しない)。

さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を認めれば (これは微積分で習ったはず¹²)、変数変換 $\sqrt{a}x = y$ を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{a}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

¹¹平均 m , 分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数は、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ である。 $m = 0, \sigma = 1$ の場合に該当する。

¹² $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{\substack{r \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi)}} e^{-r^2} \cdot r dr d\theta = \pi$ の両辺のルートを取るのが標準的な証明であろう。

ゆえに

$$(2.17) \quad \mathcal{F} \left[e^{-ax^2} \right] (\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

(後始末) 上で用いた $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$ を証明する。

任意の $X > 0$ に対して、複素平面上で、4点 $-X, X, X + \frac{i\xi}{2a}, -X + \frac{i\xi}{2a}$ を順に線分で結んだ閉曲線 C_X (形は長方形) について、Cauchy の積分定理から

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_X} e^{-az^2} dz \\ &= \int_{[-X, X]} e^{-az^2} dz + \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz + \int_{[X+i\frac{\xi}{2a}, -X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz + \int_{[-X+i\frac{\xi}{2a}, -X]} e^{-az^2} dz \\ &= \int_{-X}^X e^{-ax^2} dx + \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz - \int_{-X}^X e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx + \int_{[-X+i\frac{\xi}{2a}, -X]} e^{-az^2} dz. \end{aligned}$$

$X \rightarrow \infty$ としたとき、右辺第2項、第4項が0に収束することを示せば良い。

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とするとき、

$$\left| e^{-az^2} \right| = e^{\operatorname{Re}(-az^2)} = e^{-a(x^2 - y^2)}.$$

例えば線分 $[X, X + i\frac{\xi}{2a}]$ では、 $x = X, |y| \leq \frac{|\xi|}{2a}$ であるから、

$$\left| e^{-az^2} \right| \leq e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2} \quad (z \in [X, X + i\frac{\xi}{2a}]).$$

ゆえに

$$\left| \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} e^{-az^2} dz \right| \leq \int_{[X, X+i\frac{\xi}{2a}]} \left| e^{-az^2} \right| |dz| \leq e^{\frac{\xi^2}{4a}} e^{-aX^2} \cdot \frac{|\xi|}{2a} \rightarrow 0 \quad (|X| \rightarrow \infty).$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx. \blacksquare$$

別証明 広義積分の微分と積分の順序交換というものが必要になるが、そこに目をつむると、(複素関数論を使わず) 割と簡単な証明である¹³。

$$g(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx$$

とおくと、

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i}{2a} e^{-ax^2} \right)' e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{i}{2a} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2a} e^{-ax^2} (-i\xi) e^{-ix\xi} dx \right) \\ &= -\frac{\xi}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx \\ &= -\frac{\xi}{2a} g(\xi). \end{aligned}$$

¹³竹内 [14] に載っていた証明を書き直したものである。

(途中の部分積分の正当化は難しくない。)

$\xi = 0$ のときは値は簡単に求まる。

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

ゆえに、 $Y = g(\xi)$ は微分方程式の初期値問題

$$\frac{dY}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a}Y, \quad Y(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

の解である。これを解いて求めると

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

(念のため: $\frac{dY}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a}Y$ より $\int \frac{dY}{Y} = -\int \frac{\xi}{2a} d\xi$. C を積分定数として $\log Y = -\frac{\xi^2}{4a} + C$. これから $Y = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.) ■

2.3.4 おまけ: $\frac{1}{x^2 + a^2}$ の Fourier 変換の複素関数論を使った導出

この講義科目は、複素関数論の知識を前提としていないが、複素関数論の典型的な演習問題であるので、一応解説しておく。

命題 2.3.7 (関数論からの公式紹介) $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(x) \neq 0$, $p > 0$ が成り立つとき、 $f(z) := \frac{Q(z)}{P(z)}$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ipx} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z)e^{ipz}; c).$$

(f についての仮定は、言葉で書き直すと、分母と分子が多項式で、分母の次数が分子の次数よりも 1 以上大きく、実軸上で分母が 0 にならない、ということである。条件 $p > 0$ は見落とされやすく、注意を要するところ。)

証明 証明は「複素関数」の講義か、講義ノート、あるいは関数論のテキストを見よ。■

これから

$$(2.18) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-a|\xi|}}{a} \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

が得られる (結果は ξ の関数として $\xi = 0$ で微分可能でないことに注意しよう。広義積分の積分記号下の微分には注意が必要である。)

(2.18) の証明 $\xi > 0$, $\xi = 0$, $\xi < 0$ に場合分けして計算する。 $\xi < 0$ の場合は、 $-\xi > 0$ であるから、命題 2.3.7 が直接適用できて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{i(-\xi)z}}{z^2 + a^2}; ia \right) = 2\pi i \frac{e^{-i\xi z}}{z + ia} \Big|_{z=ia} = \frac{\pi e^{a\xi}}{a}.$$

$\xi = 0$ の場合は原始関数が $\tan^{-1} x$ で表せて、結果が $\frac{\pi}{a}$ であることはすぐ分かる。 $\xi > 0$ の場合は $x = -y$ と変数変換すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{x^2 + a^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iy\xi}}{y^2 + a^2} dy = \frac{\pi e^{a(-\xi)}}{a} = \frac{\pi e^{-a\xi}}{a}.$$

以上をひとまとめに $\frac{\pi e^{-a|\xi|}}{a}$ と表せる。■

ゆえに

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\xi|}.$$

すなわち

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] (\xi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\xi|}.$$

2.3.5 Mathematica の利用

Mathematica には、FourierTransform[] とその逆変換 InverseFourierTransform[] が用意されている。しかし、これをそのまま使っても、上に定義した $\mathcal{F}[f]$ の計算は出来ない。

実は Fourier 変換の定義には、色々な流儀があり (本質的には同じものなのだが、細かいところが異なる)、Mathematica のデフォルトは、上の定義 (数学のテキストでは良くみかけるもので、N 先生の講義でも採用されている) とは一致していない。

でも実は困らない。Mathematica には、そういう流儀の違いを解決するための賢い仕掛けが用意されていて、この講義の流儀に従って Fourier 変換を計算させるには、

```
FourierParameters->{0,-1}
```

というオプションを与えればよい¹⁴。

つまり、式 $f[x]$ で表される関数の Fourier 変換を表す式 (変数を y とする) を求めるには次のようにする。

$\mathcal{F}[f(x)](y)$ を求めるには

```
FourierTransform[f[x],x,y,FourierParameters->{0,-1}]
```

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-5 < x < 5) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad \text{答 } \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 5\xi}{\xi}$$

ちなみに Mathematica では

```
f[x_]:=If[-5<x<5,1,0]
FourierTransform[f[x],x,y,FourierParameters->{0,-1}]
```

たくさんの Fourier 変換を計算する場合、毎回 ,FourierParameters->{0,-1}] を書くのは面倒なので、私は

```
myF[fx_,x_,y_]:=FourierTransform[fx,x,y,FourierParameters->{0,-1}]
```

と関数定義して、

```
myF[f[x],x,y]
```

としている。

¹⁴Mathematica は、オプションを指定しないと $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi} dx$ を計算する。 ixy のところの符号を変えて、 $-ixy$ にしてくれれば良いわけだが、そうさせるため指定が FourierParameters->{0,-1} である。

2.4 Fourier 変換の性質 (畳み込み以外)

畳み込み (定義は後述) との関係や、Parseval の等式、微分方程式への応用などの重要な話題があるが、それらは後回しにして、ここでは、比較的簡単に分かる性質を紹介する。以下では、Fourier 変換が収束するための条件など、細かい仮定は書かずに結果の式だけ述べる¹⁵。

2.4.1 線形性

$$(2.19) \quad \mathcal{F}(f_1 + f_2) = \mathcal{F}f_1 + \mathcal{F}f_2,$$

$$(2.20) \quad \mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}f.$$

これはさすがに簡単なので省略する。

2.4.2 Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係

すでに使っている公式であるが、念のため。

$$(2.21) \quad \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}^*f(-\xi).$$

実際、

$$\mathcal{F}^*g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

であったから、

$$\mathcal{F}^*f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx.$$

ゆえに

$$\mathcal{F}^*f(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \mathcal{F}f(\xi).$$

2.4.3 平行移動

$$(2.22) \quad \mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi),$$

$$(2.23) \quad \mathcal{F}[f(x)e^{iax}](\xi) = \mathcal{F}f(\xi-a).$$

実際、前者は、 $x-a=y$ と置換すると、 $(-\infty, \infty)$ に $(-\infty, \infty)$ が対応し、 $x=y+a$, $dx=dy$ であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x-a)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i(y+a)\xi}dy \\ &= e^{-ia\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy = e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi). \end{aligned}$$

後者も同様である。

¹⁵積分記号下の微分が出来る、微分した関数も Fourier 変換可能、掛け算した関数も Fourier 変換可能、部分積分も出来る、等々、広義積分であるから、それなりの条件が必要になるけど、そういうのを取り敢えず棚上げする。それで内容がなくなるわけではなく、見ると分かってもらえると思うが、身につけるべき式変形がある。

2.4.4 スケーリング

$a \neq 0$ とするとき

$$(2.24) \quad \mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

実際、 $y = ax$ と置換すると、 $(-\infty, \infty)$ に $(-\infty, \infty)$ が対応し、 $dy = |a| dx$, $x = \frac{y}{a}$ であるから、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(ax)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\frac{y}{a}\xi} \frac{1}{|a|} dy \\ &= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy(\xi/a)} dy = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right). \end{aligned}$$

(ちょっと分かりにくいかな? a の符号で場合分けした方が分かりやすいかな?)

2.4.5 導関数の Fourier 変換

$$(2.25) \quad \mathcal{F}[f'(x)](\xi) = (i\xi) \mathcal{F}f(\xi).$$

$$(2.26) \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad \mathcal{F}[f^{(k)}(x)](\xi) = (i\xi)^k \mathcal{F}f(\xi).$$

実際、導関数が可積分なことと、 $f(x) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \pm\infty$) を認めると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(x)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f'(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left([f(x) e^{-ix\xi}]_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^R f(x) (-i\xi) e^{-ix\xi} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-i\xi) e^{-ix\xi} dx \right) \\ &= i\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = i\xi \mathcal{F}f(\xi). \end{aligned}$$

2.4.6 Fourier 変換の導関数

$$(2.27) \quad \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi) = -i \mathcal{F}[xf(x)](\xi).$$

繰り返すと

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \mathcal{F}f(\xi) = (-i)^k \mathcal{F}[x^k f(x)](\xi).$$

実際、積分記号下の微分を認めると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} (f(x) e^{-ix\xi}) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= -i \mathcal{F}[xf(x)](\xi). \end{aligned}$$

2.5 おまけ: 使用した微積分の式変形のまとめ

反転公式の証明は難しいが、公式自体は覚えやすいであろう。

その他の公式は、積分の存在 (収束) を除けば、比較的簡単に証明できる。公式自体を丸暗記するよりは、自分で公式を導けるようにしておくことを勧める。

(Fourier 変換の定義には色々な流儀があり、流儀ごとに公式の細部が異なる。一つの流儀の公式を正確に覚えるよりも、その場で公式を導出できるようにしておくのが良い。)

どのような式変形をするか、まとめておこう。

- 部分積分
- 積分の変数変換 (置換積分)
- 微分と積分の順序交換 (積分記号下の微分)

部分積分

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

この講義ではあまり使わないが、 n 重積分の場合は

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)n_j d\sigma - \int_{\Omega} f(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) dx \quad (1 \leq j \leq n).$$

ここで $\partial\Omega$ は Ω の境界、 $d\sigma$ は面積要素、 n_j は Ω の境界上の点における外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} の第 j 成分を表す。

積分の変数変換 (置換積分)

(i) $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ とすると

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

(ii) $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ は C^1 級かつ単射, $\Omega = \varphi(D)$ とすると

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_D f(\varphi(u)) |\det \varphi'(u)| du.$$

特に、 a, b を定数として $x = au + b$ とすると、(i) より、 $a > 0$ の場合

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(au + b) \cdot a du.$$

$a < 0$ の場合

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\infty}^{-\infty} f(au + b) \cdot a du.$$

次のように書くと a の符号によらない (これが (ii) に対応する)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(au + b) |a| du.$$

微分と積分の順序交換 (積分記号下の微分)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\Omega} f(x, \xi) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) dx.$$

杉浦 [15] や Lebesgue 積分の宣伝とか。

2.6 おまけ: 滑らかさ (≡ 微分可能性) と遠方での減衰性の関係

(ここに書いてあることを講義で話したことはないし、今年度も多分話さないと思うけれど…)

Fourier 級数で説明したのと同じようなことが成り立つ。すなわち

Fourier 変換によって、滑らかさ (≡ 微分可能性) と遠方での減衰性は互いにつり合う。

このこと¹⁶を見ておこう。

積分の収束等は気にしないことにする、と言ってあるが、§2.4 で紹介した定理で、きちんと仮定を書くとどうなるか、見せておく。

(1) $|f|$ が \mathbb{R} で広義積分可能ならば、 $\mathcal{F}f$ は有界かつ連続関数で、 $\|\mathcal{F}f\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

$$\text{ただし、}\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

(2) $|f|$ と $|xf(x)|$ が \mathbb{R} で広義積分可能ならば、 $\mathcal{F}f$ は C^1 級で $\frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}[(-ix)f(x)](\xi)$.

(帰納法で) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、 $|f|$ と $|x^k f(x)|$ が \mathbb{R} で広義積分可能ならば、 $\mathcal{F}f$ は C^k 級で

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^k f(x)](\xi) \quad (\xi \rightarrow \pm\infty).$$

(3) $|f|$ と $|f'|$ が広義積分可能かつ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ならば、 $\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi \mathcal{F}f(\xi)$, $\mathcal{F}f(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$ ($\xi \rightarrow \pm\infty$).

(帰納法で) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、 f が C^k 級で、 $|f^{(j)}|$ ($j = 0, 1, \dots, k$) が \mathbb{R} で広義積分可能ならば、 $\mathcal{F}[f^{(k)}](\xi) = (i\xi)^k \mathcal{F}f(\xi)$, $\mathcal{F}f(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right)$ ($\xi \rightarrow \pm\infty$).

印象に残すために、(2), (3) を簡略化して書くと

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \mathcal{F} = \mathcal{F}[(-ix)^k \times \quad], \quad \mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\right)^k = (i\xi)^k \mathcal{F}.$$

これから、

- $x \rightarrow \pm\infty$ のときの $f(x)$ の減衰が速いほど、 $\mathcal{F}f$ はより多くの回数微分出来る
- f がより多くの回数微分出来るほど、 $\xi \rightarrow \pm\infty$ のときの $\mathcal{F}f(\xi)$ の減衰が速い

¹⁶より詳しく言うと、 f がたくさん微分できるほど、 $\mathcal{F}f$ の遠方での減衰は速い。また、 f の遠方での減衰が速いほど、 $\mathcal{F}f$ はたくさん微分できる。

ということが分かる。これは Fourier 級数でも似たようなことがあった。

証明は、そのうち付録に書くかもしれないが、急ぐ人は、杉浦 [16] (Riemann 式の広義積分の範囲で議論している) や、伊藤 [17] (Lebesgue 積分の範囲で議論している) などを見ると良い。(2冊例として出したが、どちらでもあまり変わらない。)

以上を念頭に、定理 2.3.1 の結果を吟味してみよう。

(i) $f(x) := e^{-a|x|}$ は $x = 0$ で微分可能でないが(連続で区分的に C^1 級)、 $x \rightarrow \pm\infty$ のときの $f(x)$ の減衰は速い¹⁷。 $\mathcal{F}f(\xi) = \text{定数} \times \frac{1}{\xi^2 + a^2}$ の $\xi \rightarrow \pm\infty$ のときの減衰は遅い ($|\mathcal{F}f|$ は広義積分可能であるが、 $|\xi \mathcal{F}f(\xi)|$ は広義積分可能ではない¹⁸) が、 $\mathcal{F}f$ は C^∞ 級である。

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$ は微分可能でないが(それどころか不連続である、区分的に C^1 級ではあるが)、 $x \rightarrow \pm\infty$ のときの減衰は速い(というか、遠くの方では恒等的に 0 に等しい)。
 $\mathcal{F}f(\xi) = \text{定数} \times \frac{\sin(a\xi)}{\xi}$ の $\xi \rightarrow \pm\infty$ のときの減衰は遅い(かろうじて 0 に収束するが $|\mathcal{F}f|$ は広義積分可能ではない¹⁹)、 $\mathcal{F}f$ は C^∞ 級である。

(iii) $f(x) = e^{-ax^2}$ は C^∞ 級であり、 $x \rightarrow \pm\infty$ のときの減衰は速い。 $\mathcal{F}f(\xi) = \text{定数} \times e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ の $\xi \rightarrow \pm\infty$ のときの減衰は速く、 $\mathcal{F}f$ は C^∞ 級である。

なるほど、なるほど。具体例をじっくり調べるのは有益だ(痛感)。

独白: うーん、証明しようとして条件をきちんと述べることで見えて来るものがあって、それをさぼるのは、大事なものを落っこしている感じがする。どこまで説明するか決めるのは悩ましい。

それと、積分の収束の議論に慣れていない段階にある人達にこういう話を聴かせると、ドン引きされるような気がする。

2.7 おまけ: Fourier 変換向きの関数空間

(決して脅かすつもりはないので、以下に書いてあることを無理に読もうとはしないで下さい。)

本文(おまけでないところ)で、Fourier の反転公式があるので、とりあえず $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ のようなものだが(?)、 \mathcal{F} や \mathcal{F}^* の定義域や終域をはっきり決めていないので、それらが全単射であるかどうか議論すらできない、というような、大変歯切れの悪い言い回しをした。

実は、3つの有名な関数空間 $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ があり、Fourier 変換、共役 Fourier 変換は、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}), & \mathcal{F}^*: L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}), \\ \mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), & \mathcal{F}^*: \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ \mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}), & \mathcal{F}^*: \mathcal{S}'(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

と定義でき、いずれも全単射になり、 $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ が成り立つ。

非常にすっきりした結果が成り立つ。以下、簡単に各関数空間を紹介しよう。

¹⁷指数関数の減衰は速い。

¹⁸ $|\xi \mathcal{F}f(\xi)| \sim \frac{1}{|\xi|}$ であるから積分可能でない。

¹⁹ $\frac{\sin(a\xi)}{\xi}$ 自体は広義積分可能であるが、 $\left| \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right|$ は広義積分可能ではない(微妙なところ)。

2.7.1 二乗 (自乗) 可積分関数の空間 $L^2(\mathbb{R})$ と Sobolev 空間 $H^m(\mathbb{R})$

Fourier 級数のときのように、二乗可積分関数の空間が扱いやすい。

\mathbb{R} 上定義された二乗可積分関数の全体を $L^2(\mathbb{R})$ とする。すなわち

$$(2.28) \quad L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ Lebesgue 可測}, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

厳密には、この集合上で、ほとんど至るところ一致する関数は同一視する、と約束する。

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(2.29) \quad (f, g)_{L^2} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

とおくと、これは $L^2(\mathbb{R})$ 上の内積になり、 $L^2(\mathbb{R})$ は Hilbert 空間になる。

Fourier 変換、共役 Fourier 変換は、 $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^*: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ なる写像として定義出来るが、実は全単射であり、 $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ が成り立つ。

詳しいことは、例えば、伊藤 [18] を見よ (これは Lebesgue 積分のテキストであるが、 $L^p(\Omega)$ の性質や $L^p(\mathbb{R})$ ($p = 1, 2$) での Fourier 変換について詳しく説明されている)。

微分方程式を扱う場合は、Sobolev 空間

$$H^m(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid |\xi|^m \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

というものが役に立つ (ここで $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)。

これについては、例えば熊ノ郷 [19] を見よ。

2.7.2 急減小関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ と緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

L. Schwartz (1915/3/5–2002/7/4, フランスの Paris に生まれ、Paris にて没する) は、Sobolev の広義導関数の概念をヒントに、超関数 (distribution) と呼ばれるものを考え出した。

特に緩増加超関数というものを定義するため、以下に紹介する急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を導入した。これは小さな関数空間で、応用上現れる関数でここに属するものは多くない。例えば、覚えるべき Fourier 変換のところであげた関数のうち、

$$e^{-a|x|}, \quad \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad \frac{1}{2a} \chi_{(-a, a)}, \quad \text{sinc}(ax) \quad (a > 0)$$

はいずれも $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ には属さない。ただ一つガウシアン e^{-ax^2} のみが $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する。

小さい関数空間を選ぶ理由は、それが小さいほど、以下の緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ が大きくなるからである。

定義 2.7.1 (急減小関数, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) \mathbb{R} 上の定義された関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が急減小であるとは、 f が C^∞ 級であり、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^k f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことをいう。

\mathbb{R} 上定義された急減小関数の全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ と表す。

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とするとき、 f の Fourier 変換 $\mathcal{F}f$, f の共役 Fourier 変換 \mathcal{F}^*f はともに $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属するので、 $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^*: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とみなせるが、実は全単射であり、 $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ が成り立つ。

例えば、杉浦 [16] の VII§6 (pp. 136–) に $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ における Fourier 変換の性質の初等的な証明が載っている。

(この本は、明治大学学内ネットワークから読める。<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/300004684478> にアクセスして、PDF の 148 ページ目以降。)

(k, n) は (k_m, n_m) ($m = 1, 2, \dots$) と番号をつけられる。

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は

$$d(f, g) := \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{k_m} f^{(n_m)}(x)|}{1 + \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{k_m} f^{(n_m)}(x)|}$$

を距離とする距離空間になり、位相線形空間になる ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の加法、スカラー乗法は連続写像になる)。

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の連続な線形形式を緩増加超関数と呼ぶ。その全体を

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) := \{T \mid T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \text{ 連続かつ線型}\}$$

とおく。

$\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ と $\mathcal{F}^*: \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ は全単射である。

(工事中)

しばしお別れ (あいさつ)

Fourier 変換については、畳み込み (まだ説明していない用語) との関係という非常に重要な話題が残っているが、ここで一度 Fourier 変換の話題を打ち切って、先に離散 Fourier 変換、離散時間 Fourier 変換の紹介をすることにする。

(ふと気づいたのだが、次章「離散 Fourier 変換」では、実関数の場合に便利のように、余弦変換、正弦変換の話を「おまけ」につけている。この章でもそうすることが考えられる。実際、テキストによってはそういうことにページを割いている。今ひとつそうする気になれないのは、私に数学科バイアスがかかっているのだろうか?)

第3章 離散 Fourier 変換

応用上重要な離散 Fourier 変換の定義と簡単な性質を紹介する。用いる数学は複素数と線形代数である (有限個のデータの話で、収束の話 (解析学) は必要ない。その意味では、むしろ Fourier 変換よりも簡単と言える。こうなったのは、サンプリングした後のことだけを論じているからかもしれない。)

離散 Fourier 変換には、高速なアルゴリズムである高速 Fourier 変換 (Fast Fourier Transform, FFT) があるが、詳細は省略する。

離散 Fourier 変換は、Fourier 係数、Fourier 級数展開の離散化と言える。

内容の予告 周期関数 f があるとき、測定して得られる (ような) 離散的な標本データを用いて、近似的に Fourier 級数展開をすることを考える。適当な自然数 N を用いて、周期区間を N 等分し、 N 等分点上の関数値 $\{f_j\}$ から Fourier 係数 $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)e^{-in\frac{\pi}{T}x} dx$ の近似値 C_n を求めることになるが、それには積分を台形則で近似するのが良い。そうして得られた $\{C_n\}$ は周期 N の周期数列である。写像

$$\mathbb{C}^N \ni \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

は、離散 Fourier 変換と呼ばれる。これは線形写像で、その表現行列は

$$W = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-1 \cdot 2} & \cdots & \omega^{-1 \cdot (N-1)} \\ 1 & \omega^{-2 \cdot 1} & \omega^{-2 \cdot 2} & \cdots & \omega^{-2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & \omega^{-(N-1) \cdot 1} & \omega^{-(N-1) \cdot 2} & \cdots & \omega^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

(W は (n, j) 成分が $\frac{1}{N}\omega^{-(n-1)(j-1)}$ である行列)

ただし $\omega = e^{2\pi i/N}$ とおいた。また

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^{1 \cdot 2} & \cdots & \omega^{1 \cdot (N-1)} \\ 1 & \omega^{2 \cdot 1} & \omega^{2 \cdot 2} & \cdots & \omega^{2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & \omega^{(N-1) \cdot 1} & \omega^{(N-1) \cdot 2} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

(W^{-1} は (j, n) 成分が $\omega^{(j-1)(n-1)}$ である行列)

$U := \sqrt{N}W$ は unitary 行列である (すなわち離散 Fourier 変換は、実質的に (定数因子を無視すれば) unitary 変換である)。

定理 3.1.4 を載せているテキストは珍しいかもしれない。

3.1 離散 Fourier 係数 — なぜそのように定義するか

第1章では、Fourier 級数を考える周期関数の周期は 2π としたが、ここでは一般の正の数 T が周期の場合で説明する。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 T で、ほどほどに良い関数とする (この節の中で収束の問題は考えないことにするため)。

$$(3.1) \quad c_n := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくとき (これまで $[-T/2, T/2]$ で積分したが、 $[0, T]$ で積分しても同じ値が得られる)、

$$(3.2) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1 周期区間 $[T]$ を N 等分することにして、

$$(3.3) \quad h := \frac{T}{N}, \quad x_j = jh \quad (j \in \mathbb{Z})$$

とおき、 x_j での値

$$(3.4) \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

のうち、1 周期分 $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ を用いて¹、 $\{c_n\}$ の近似 $\{C_n\}$ を求めよう。

信号処理の分野では、関数 (信号) の値を測定する間隔 h のことを**サンプリング周期** (標本化周期, sampling period), その逆数 $\frac{1}{h}$ のことを**サンプリング周波数** (標本化周波数, sampling rate, sample rate) と呼ぶ。また測定して $\{f_j\}$ を得ることを**サンプリング** (標本化) と呼ぶ。

周期関数の周期区間上の積分の数値計算には、**台形則**を用いるのが良いとされる (やってみると分かるが、しばしば**驚異的な高精度**が得られる。魔法のような話で個人的には大好きなのであるが、なぜそうなるかは、ここでは説明を省略する。)

余談 3.1.1 完全な余談になるが、コンピューターが日本で普及しつつあった頃のプログラミングの解説書 (有名な某先生が執筆者に連なっていたのであるが…) に、Fourier 係数の計算を Simpson 則で計算するプログラムが載っていて、驚いたことがある² (後で解説するが、それは拙い (下手くそな) やり方である)。離散 Fourier 変換すらきちんと認知されていなかったということか? とにかく、他のいかなる公式と比べても、台形則が適切である、と覚えておいて欲しい。■

台形則の説明 (特に周期関数の場合) 一般に定積分

$$I = \int_a^b F(t) dt$$

に対する台形則とは、 $\{t_j\}_{j=0}^N$ を $[a, b]$ の N 等分点として、 I を

$$I_N := \sum_{j=1}^N \frac{F(t_{j-1}) + F(t_j)}{2} h = h \left(\frac{F(t_0)}{2} + F(t_1) + \cdots + F(t_{N-1}) + \frac{F(t_N)}{2} \right), \quad h := \frac{b-a}{N}$$

¹ f が周期 2π であるので、 $\{f_j\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $f_{j+N} = f_j$ ($j \in \mathbb{Z}$) を満たす、すなわち周期 N の周期数列である。従って、 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を扱う際は、連続した N 項、例えば $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ だけを知れば十分である。

²図書室の本をばらばらすると、そういう発見をしたりします。

で近似するものであるが、 F が周期 $b - a$ であれば、 $F(t_0) = F(a) = F(b) = F(t_N)$ であるから、次のような簡潔な式に帰着される:

$$(3.5) \quad I_N = h \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \quad (\text{周期関数に対する台形則}).$$

(3.1) を台形則で近似したものを C_n とおこう:

$$C_n := \frac{1}{T} h \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-in \frac{2\pi}{T} x_j}.$$

$$(3.6) \quad \omega := e^{i \frac{2\pi}{T} h} = e^{2\pi i / N} \quad (\because \frac{2\pi}{T} h = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N})$$

とおくと、

$$e^{-in \frac{2\pi}{T} x_j} = e^{-in \frac{2\pi}{T} j h} = \omega^{-nj}$$

であるから、

$$C_n = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}.$$

すなわち次の反転公式が成り立つ。

$$(3.7) \quad C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}.$$

これを f の **離散 Fourier 係数** と呼ぶ。

補題 3.1.2 (1 の N 乗根の性質) $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\omega = e^{2\pi i / N}$$

とおくとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) ω は 1 の原始 N 乗根、すなわち

$$(i) \quad 1 \leq m \leq N - 1 \Rightarrow \omega^m \neq 1$$

$$(ii) \quad \omega^N = 1$$

を満たす。

(2) $\forall m \in \mathbb{Z}$ に対して、次式が成り立つ。

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \begin{cases} N & (m \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

証明

(1) $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\omega^m = e^{i \frac{2\pi}{N} m}$$

であるから、 $m \equiv 0 \pmod{N}$ のとき、そのときのみ $\omega^m = 1$ が成り立つ。特に $1 \leq m \leq N - 1$ を満たす任意の m に対して、 $\omega^m \neq 1$, $\omega^N = 1$ であることに注意する。

(2) $m \equiv 0 \pmod{N}$ のとき、 $\omega^m = 1$ であるから、任意の j に対して $\omega^{mj} = 1$. ゆえに $\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \sum_{j=0}^{N-1} 1 = N$. そうでないとき、 $\omega^m \neq 1$ であるから、等比数列の和の公式より

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \sum_{j=0}^{N-1} (\omega^m)^j = \frac{1 - (\omega^m)^N}{1 - \omega^m} = \frac{1 - (\omega^N)^m}{1 - \omega^m} = 0. \blacksquare$$

以下、この節では、2数 l, m がともに整数であり、 $l \equiv m \pmod{N}$ であることを単に $l \equiv m$ と書くと約束する。この講義ノートの PDF を読む場合、ある程度大きなフォントを使わないと、 \equiv がただの等号 $=$ に見えてしまうことがあるので注意すること (こちらとしては、そこまで責任をもてない…)

命題 3.1.3 (離散 Fourier 係数の性質) 周期 T の周期関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} h &:= \frac{T}{N}, & \omega &:= e^{i\frac{2\pi}{T}h} = e^{2\pi i/N}, \\ x_j &:= jh, & f_j &:= f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}), \\ C_n &:= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

で離散 Fourier 係数 $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を定めるとき、以下の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は周期 N の周期数列である: $C_{n+N} = C_n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ が成り立つならば、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$(3.8) \quad C_n = \sum_{m \equiv n} c_m.$$

ただし $\sum_{m \equiv n}$ は、 $m \equiv n \pmod{N}$ を満たすすべての $m \in \mathbb{Z}$ に対して和を取ることを意味する。

証明

(1) $\omega^{-(n+N)j} = \omega^{-nj} \omega^{-Nj} = \omega^{-nj}$ であるから、

$$C_{n+N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-(n+N)j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} = c_n.$$

(2) $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$ であるから、

$$f_j = f(x_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inj\frac{2\pi}{T}h} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \omega^{nj}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\omega^{-nj} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \omega^{mj} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(m-n)j} = \frac{1}{N} \sum_{m \equiv n} c_m N = \sum_{m \equiv n} c_m. \blacksquare \end{aligned}$$

この命題の (1) から、 $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を求めよ、と要求されたとき、連続した N 項、例えば $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ を計算出来れば十分である (それ以上やることはない) ことが分かる。

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{m \equiv 0} c_m = c_0 + c_N + c_{-N} + c_{2N} + c_{-2N} + \cdots, \\ C_1 &= \sum_{m \equiv 1} c_m = c_1 + c_{1-N} + c_{1+N} + c_{1-2N} + c_{1+2N} + \cdots, \\ C_{-1} &= \sum_{m \equiv -1} c_m = c_{-1} + c_{-1+N} + c_{-1-N} + c_{-1+2N} + c_{-1-2N} + \cdots, \\ C_2 &= \sum_{m \equiv 2} c_m = c_2 + c_{2-N} + c_{2+N} + c_{2-2N} + c_{2+2N} + \cdots, \\ C_{-2} &= \sum_{m \equiv -2} c_m = c_{-2} + c_{-2+N} + c_{-2-N} + c_{-2+2N} + c_{-2-2N} + \cdots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

あるいは

$$C_n = c_n + \sum_{p=1}^{\infty} (c_{n+pN} + c_{n-pN}).$$

次の問を考えよう。

Q C_n は c_n の良い近似になっているか？

(もともと c_n の近似値を求めようとして、その定義式の積分を、台形則という数値積分公式で近似したものが C_n であるわけだが、本当に C_n が c_n に近いかは、確かめる必要がある。)

A ある意味で Yes である。正確には、

任意の $n \in \mathbb{Z}$ を固定するとき、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_n = c_n.$$

注意: h, x_j, f_j, ω, C_n は、 N に依存していることに注意せよ。本来は、それぞれ $h_N, x_{j,N}, f_{j,N}, \omega_N, C_{n,N}$ とでも書くべきものである。そうすると上の式は $\lim_{N \rightarrow \infty} C_{n,N} = c_n$ である。すなわち、 ε - N で表せば

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall N \in \mathbb{N} : N \geq n') \quad |C_{n,N} - c_n| < \varepsilon.$$

次に考えてもらいたいのは、

Q $C_{-1,N} = C_{N-1,N} = c_{-1} + c_{-1+N} + c_{-1-N} + c_{-1+2N} + c_{-1-2N} + \cdots$ であるわけだが、これは c_{-1}, c_{N-1} , いずれの近似か？

A C_{N-1} は c_{-1} の近似になっているが、 c_{N-1} の近似ではない。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (c_{-1+N} + c_{-1-N} + c_{-1+2N} + c_{-1-2N} + \cdots) = 0$$

であるから、確かに $\lim_{N \rightarrow \infty} C_{-1,N} = c_{-1}$.

結局、 C_n ($|n| \ll N/2$) は c_n の近似である、とまとめられるであろう。 $|n| \doteq N/2$ のときは、精度はかなり悪くなる。

定理 3.1.4 (離散 Fourier 変換に関するサンプリング定理) 周期 T の関数 $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が、有限 Fourier 級数

$$u(t) = \sum_{n=-M}^M c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

で表せるとき、すなわち u の Fourier 係数 $\{c_n\}$ について

$$|n| > M \Rightarrow c_n = 0$$

が成り立つとき、 $N > 2M$ を満たす N に対して、 N 項離散 Fourier 係数 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ は、

$$\begin{aligned} (\star) \quad C_n &= c_n \quad (0 \leq n \leq M), \\ C_{N-n} &= c_{-n} \quad (1 \leq n \leq M), \\ C_n &= 0 \quad (M < n < N - M) \end{aligned}$$

を満たす。(特に、全ての (0 でない) Fourier 係数 $\{c_n\}_{n=-M}^M$ は、離散 Fourier 係数 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ から求まる。)

この定理を 5 章の定理 5.1.1 (通常のサンプリング定理) と比べてみると良い。

例 3.1.5 $M = 1, N = 10$ の場合、

$$\begin{aligned} C_0 &= c_0 + c_{-10} + c_{20} + c_{-20} + c_{30} + \cdots = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0, \\ C_1 &= c_1 + c_{-9} + c_{11} + c_{-19} + c_{21} + \cdots = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1, \\ C_9 &= c_9 + c_{-1} + c_{19} + c_{-11} + c_{29} + c_{-21} + \cdots = 0 + c_{-1} + 0 + 0 + \cdots = c_{-1}, \\ C_2 &= c_2 + c_{-8} + c_{12} + c_{-18} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0, \\ C_8 &= c_8 + c_{-2} + c_{18} + c_{-12} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0, \end{aligned}$$

同様にして $2 \leq n \leq 8$ に対して、 $C_n = 0$.

一方、 $M = 5, N = 10$ の場合は

$$\begin{aligned} C_0 &= c_0 + c_{-10} + c_{20} + c_{-20} + c_{30} + \cdots = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0, \\ C_1 &= c_1 + c_{-9} + c_{11} + c_{-19} + c_{21} + \cdots = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1, \\ C_9 &= c_9 + c_{-1} + c_{19} + c_{-11} + c_{29} + c_{-21} + \cdots = 0 + c_{-1} + 0 + 0 + \cdots = c_{-1}, \\ C_2 &= c_2 + c_{-8} + c_{12} + c_{-18} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = c_2, \\ C_8 &= c_8 + c_{-2} + c_{18} + c_{-12} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = c_{-2}, \\ &\vdots \\ C_4 &= c_4 + c_{-6} + c_{14} + c_{-16} + \cdots = c_4 + 0 + 0 + \cdots = c_4, \\ C_6 &= c_6 + c_{-4} + c_{16} + c_{-14} + \cdots = 0 + c_{-4} + 0 + \cdots = c_{-4}, \end{aligned}$$

ここまでは調子が良い。ところが

$$C_5 = c_5 + c_{-5} + c_{15} + c_{-15} + \cdots = c_5 + c_{-5} + 0 + 0 + \cdots = c_5 + c_{-5}.$$

$C_5 = c_5$ も $C_5 = c_{-5}$ も成り立たない。

少し考えると、 $M = 5$ であっても、 $N > 10$ であれば、うまく行く ((★) が成り立つ) ことが分かる。

落ち着いて考えると、 $N > 2M$ であれば (★) が成り立つ。 ■

証明 すでに示したように

$$C_n = \sum_{m \equiv n} c_m = c_n + \sum_{p=1}^{\infty} (c_{n+pN} + c_{n-pN}).$$

$0 \leq n \leq M$ であれば、

- $n + pN \geq N > 2M > M$ であるから、 $c_{n+pN} = 0$.
- $n - pN \leq M - N < -M$ であるから、 $c_{n-pN} = 0$.

ゆえに $C_n = c_n$.

残りも同様にして証明できる。 ■

3.2 離散 Fourier 変換

(独白: 筆者には、この節に書いてあることが非常に面白い。美しい、とさえ感じている。何とか理解してもらいたいと思っていて、話の仕方を毎年修正している。2018 年度もかなりの書き直しとなった。はてさて、今年はどれくらい分かってもらえるでしょう。)

ここからは N 次元ベクトルの変換の話で、無限和は登場せず、線形代数の話になる。

$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ に対して、離散 Fourier 係数の式 $C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-nj} f_j$ で定義される $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ を、 \mathbf{f} の **離散 Fourier 変換** と呼ぶ。また写像 $\mathbb{C}^N \ni \mathbf{f} \mapsto \mathbf{C} \in \mathbb{C}^N$ も **離散 Fourier**

変換 と呼ぶ。これは線型写像であり、ある N 次正方行列をかけることで表現できる。その行列の性質を詳しく述べよう。

線形代数では、ベクトルや行列の成分は 1 から番号つける (行や列の番号は 1 から始める) のが普通だが、ここでは 0 から始めることにする。

またベクトルの一般の成分を表すのに第 i 成分、行列の一般の成分を表すのに (i, j) 成分を指定することが多いが、 i は虚数単位を表す記号として用いたいので、ここでは、ベクトルの一般の成分を表すのに第 j 成分、行列の一般の成分を表すのに (j, k) 成分を指定する。

$$\mathbf{x} = (x_j) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}, \quad A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{pmatrix}.$$

命題 3.2.1 (離散 Fourier 変換の表現行列とその逆行列) $N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$,

$$W := \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(N-1)} \\ \omega^0 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-(N-1)2} & \cdots & \omega^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} (\omega^{-jk})$$

とおくとき、

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{pmatrix}$$

に対して

$$(3.9) \quad C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \Leftrightarrow \mathbf{C} = W \mathbf{f} \quad (\text{明らか}).$$

W は正則で、

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{N-1} & \omega^{(N-1)2} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} = (\omega^{jk}).$$

すなわち

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \Leftrightarrow f_j = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{jn} \quad (j = 0, \dots, N-1).$$

この定理の証明のために少し準備する。

補題 3.2.2 (複素指数関数の選点直交性) $N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$,

$$\varphi_n := (\omega^{nj}) = \begin{pmatrix} \omega^{n \cdot 0} \\ \omega^{n \cdot 1} \\ \vdots \\ \omega^{n \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

とおくと

$$(\varphi_j, \varphi_k) = N \delta_{jk} \quad (j, k = 0, 1, \dots, N-1)$$

が成り立つ。特に $\{\varphi_j\}_{j=0}^{N-1}$ は \mathbb{C}^N の直交系である。

証明 $0 \leq j \leq N-1, 0 \leq k \leq N-1$ であるから $j = k \pmod{N} \Leftrightarrow j = k$ が成り立つことに注意

すると

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{nj} \overline{\omega^{nk}} = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{nj} \omega^{-nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n(j-k)} = N\delta_{jk}. \blacksquare$$

注意 3.2.3 (複素指数関数の選点直交性と呼ぶ理由) $L > 0$, $h := \frac{L}{N}$, $x_j := jh$, $\varphi_n(x) := e^{in\frac{2\pi}{L}x}$ とおくと

$$\varphi_n(x_j) = e^{in\frac{2\pi}{L}x_j} = e^{2\pi inj/N} = \omega^{nj}.$$

つまり φ_n は、関数 φ_n の標本点 x_0, x_1, \dots, x_{N-1} での値を並べたベクトルである:

$$\varphi_n := \begin{pmatrix} \varphi_n(x_0) \\ \varphi_n(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_{N-1}) \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1).$$

$\{\varphi_n\}$ は $(\varphi_j, \varphi_k) = L\delta_{jk}$ ($j, k \in \mathbb{Z}$) を満たす直交関数系であったが³、その標準化 $\{\varphi_n\}$ がやはり直交性を持っているのは、(筆者には) 面白く感じられる。■

系 3.2.4 (W の列ベクトルの直交性) $N \in \mathbb{N}$ に対して N 次正方行列 W を $\omega := e^{2\pi i/N}$, $W := \left(\frac{1}{N}\omega^{-jk}\right)$ で定める。 W の第 k 列を \mathbf{w}_k とおくと ($k = 0, 1, \dots, N-1$)

$$(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k) = N\delta_{jk}$$

が成り立つ。特に $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N-1}$ は直交系である。

証明

$$\mathbf{w}_k = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \omega^{-0 \cdot k} \\ \omega^{-1 \cdot k} \\ \vdots \\ \omega^{-(N-1) \cdot k} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \overline{\varphi_k} \quad (\text{複素共役ベクトル})$$

であるから

$$(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k) = \left(\frac{1}{N}\overline{\varphi_j}, \frac{1}{N}\overline{\varphi_k}\right) = \frac{1}{N^2} \overline{(\varphi_j, \varphi_k)} = \frac{1}{N^2} \cdot \overline{N\delta_{jk}} = \frac{1}{N}\delta_{jk}. \blacksquare$$

命題 3.2.1 の証明 1 (列ベクトルが直交系である行列の逆行列の求め方 — 割と有名) W の Hermite 共役 W^* と W の積は

$$W^*W = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_0^* \\ \mathbf{w}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{N-1}^* \end{pmatrix} (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \cdots \ \mathbf{w}_{N-1}) = (\mathbf{w}_j^* \mathbf{w}_k) = \left(\frac{1}{N}\delta_{jk}\right) = \frac{1}{N}I.$$

ゆえに $NW^*W = I$ であるから、 NW^* は W の逆行列である。

$$W^{-1} = NW^* = N \left(\frac{1}{N}\overline{\omega^{-kj}}\right) = (\omega^{kj}) = (\omega^{jk}). \blacksquare$$

³ただし、ここでの内積は $(f, g) = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\overline{g(x)} dx$ で定義される関数同士の内積である (記号が紛らわしいが間違えないで下さい)。

命題 3.2.1 の証明 2 $C \in \mathbb{C}^N$ が任意に与えられたとして

$$C = Wf$$

を満たす $f \in \mathbb{C}^N$ を求めよう。

C は $\{w_n\}$ の線型結合である。実際

$$\begin{aligned} C = Wf &= (w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{N-1}) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \cdots + w_{N-1} f_{N-1} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j w_j. \end{aligned}$$

ゆえに (直交系による展開の係数を求める公式を適用して)

$$f_j = \frac{(C, w_j)}{(w_j, w_j)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} C_k \frac{1}{N} \overline{\omega^{-kj}}}{N} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{jk} C_k.$$

これは

$$W^{-1} = (\omega^{jk})$$

であることを示している。■

命題 3.2.1 の証明 3 (古い証明) 前半の (3.9) は行列の積の定義からすぐ分かる。

W の (n, j) 成分は $\frac{1}{N} \omega^{-nj}$ である。

この W に、 (j, k) 成分が ω^{jk} である行列 (ω^{jk}) を右からかけた行列の (n, k) 成分は

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \omega^{-nj} \omega^{jk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{(k-n)j} = \frac{1}{N} \begin{cases} N & (k-n \equiv 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (k=n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} = \delta_{kn}.$$

これは積が単位行列であることを示す。すなわち $W^{-1} = (\omega^{jk})$. ■

ある行列が逆行列であることの証明には、それをかけて単位行列になることを確かめれば良い。ある意味で一番簡単なのだが「すっきりしない」という人が多く、証明3の評判が良くなかったので、証明1, 2を書いてみた。

余談 3.2.5 前節から続けて、関数 f の話をしている場合は、既に $f_j = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \omega^{nj}$ であることは示してあるので、絶対収束を仮定すれば、和の順序を交換して

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m \equiv n} c_m \omega^{mj} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m \equiv n} c_m \omega^{nj} = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{nj} \sum_{m \equiv n} c_m = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{nj} C_n$$

と出来て、これから W^{-1} の成分 ω^{jn} であると分かるが、 W の性質は関数 f とは関係ないので、上の証明の方が良いであろう。■

注意 3.2.6 (W をちょっと修正すると unitary 行列になる) $U := \sqrt{N}W$ とおくと、

$$(3.10) \quad U = \frac{1}{\sqrt{N}} (\omega^{-nj}), \quad U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} (\omega^{nj})$$

となる。 $\bar{\omega} = \omega^{-1}$ に注意すると、 U の Hermite 共役 U^* は

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{N}} (\overline{\omega^{-jn}}) = \frac{1}{\sqrt{N}} (\omega^{nj}) = U^{-1}.$$

すなわち U は unitary 行列である。

(以下は余談) 通常は Fourier 級数展開は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と定義されるが、

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と定義し直して (これは正規直交系 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}$ で展開したことになる)、それに基づいて離散 Fourier 係数を定めると、変換の行列として U が導かれる。

以上のように定義し直したい誘惑があるけれど、混乱する人が出て来ると思うのでやめておく。次のように命題としてまとめておくことにする。 ■

系 3.2.7 命題 3.2.1 の行列を W とするとき、 $U := \sqrt{N}W = \frac{1}{\sqrt{N}} (\omega^{-nj})$ は、対称な unitary 行列である (つまり $U^* = U^{-1}$ を満たす)。

次の余談の内容は上に書き直したので、そのうち削除する。

余談 3.2.8 (離散 Fourier 変換の応用上の強力さを別にしても、個人的に面白いと感じるところ) Fourier 級数展開

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と、Fourier 変換と反転公式 (Fourier 変換を逆 Fourier 変換すると元に戻る)

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

の対応について既に話してあるが、離散 Fourier 変換とその反転公式 (離散 Fourier 変換を逆離散 Fourier 変換すると元に戻る)

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}, \quad f_j = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{nj}$$

も良く対応している。むしろ、Fourier 級数よりもバランスの良い変換になっていて (f は周期関数で $\{c_n\}$ は無限数列であるが、 $\{f_j\}$ と $\{C_n\}$ は周期数列になる)、むしろ Fourier 変換に似ているとも言える。

実は Fourier 変換、逆 Fourier 変換は、 $L^2(\mathbb{R})$ における unitary 変換というものになっている (ますます似ていると感じる)。

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_n := \begin{pmatrix} \omega^{n \cdot 0} \\ \omega^{n \cdot 1} \\ \omega^{n \cdot 2} \\ \vdots \\ \omega^{n \cdot (N-1)} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \boldsymbol{\varphi}_n$$

これは、 \mathbb{C}^N の直交系 $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$ による \mathbf{f} の展開になっている。実際、

$$(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_m) = \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{nj} \overline{\omega^{mj}} = \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{nj} \omega^{-mj} = \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(n-m)j} = \begin{cases} N & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

であるから (これは補題 3.1.2 の系にしておくべきかな)、 $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$ は直交系である。そして、 $\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \boldsymbol{\varphi}_n$ と展開したときの係数は、直交系による展開の係数の公式によれば

$$C_n = \frac{(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_n)}{(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_n)} = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} f_j \overline{\omega^{nj}}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}.$$

なかなかきれいに出来ているものである。■

3.3 FFT について

3.3.1 耳学問

離散フーリエ変換には、非常に効率の高いアルゴリズムが存在する。それを**高速フーリエ変換** (the fast Fourier transform) と呼び、しばしば **FFT** と略記する。

具体的なアルゴリズムの説明は省略する (大浦 [20], [21] などを見よ)。

使用上の注意点等を述べておく。

- FFT は近似などをしてしているわけではなく、計算されるのは離散 Fourier 係数そのものである。純粹に効率だけが高いので、使わないのは損である。
- 項数 N が “たくさん” の素因数の積に分解出来るとき、高速化できる。典型的なのは N が 2 の冪乗 $N = 2^m$ (m は自然数) の場合である (その場合しか解説していない本も多いし、その場合しか速くならないソフトウェアもある)。その場合、計算量は $O(N \log N)$ である。
- 最近のソフトウェアで、離散 Fourier 変換すると、FFT が使われると期待して良いが、項数 N の選択には注意すべきである。
ちなみに、音楽 CD で使われているサンプリング周波数は 44.1 kHz であるが、 $44100 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ (ちょっと驚き)。
 $44100 + 1$ は素数で、効率が低いはず。
1 秒にこだわる理由がなければ、 44100 よりも $2^{16} = 65536$ の方が良い。
- (非常に重要) 離散 Fourier 変換は Fourier 係数を近似的に求めてくれるが、Fourier 係数から等分点上の関数値を求めるのは逆離散 Fourier 変換であり、それも同じアルゴリズムで高速化されることに注意する。

3.3.2 Mathematica で離散 Fourier 変換

Mathematica の関数 `Fourier[f]` は、数値のリスト $f = \{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \omega^{nj} \quad (j = 0, 1, \dots, N-1)$$

(を並べたリスト) を計算する (これが Mathematica の離散 Fourier 変換の定義である)。

逆変換は `InverseFourier[C]` で行なう。

可能な場合は高速 Fourier 変換 (FFT) を使って計算されるので、効率が良くなる (効率があげたいときは N の値に注意すべきである)。

この講義の離散 Fourier 変換の定義に一致する結果を得るには、次のようなオプションを指定する。

```
Fourier[f, FourierParameters->{-1, -1}]
```

3.4 おまけ: 実関数の場合、離散余弦変換、離散正弦変換

(工事中。完成してもここは授業では説明する時間的余裕はないと思うが、応用上有用なので、参考のため紹介しておく。)

理論の大筋を話すには、複素 Fourier 級数の場合だけを説明すれば十分と考えて講義しているが、実際のデータ処理をする場合には、実関数の \cos , \sin を用いた変換が重要な場合がある。

3.4.1 準備: 離散 Fourier 係数 C_n , A_n , B_n の関係

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数とする。 c_n の定義式を (積分区間を N 分割した) 台形公式で近似したものを C_n としたように、 a_n, b_n の定義式を台形公式で近似したものをそれぞれ A_n, B_n とおく:

$$(3.11) \quad A_n := \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos(nx_j), \quad B_n := \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin(nx_j).$$

ただし

$$h := \frac{2\pi}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j = f(x_j).$$

a_n, b_n, c_n の関係と同様に、以下のことが成り立つ。

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad C_k = (A_k - iB_k)/2, \quad C_{-k} = (A_k + iB_k)/2, \quad C_0 = A_0/2,$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad A_k = C_k + C_{-k}, \quad iB_k = C_{-k} - C_k, \quad A_0 = 2C_0,$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{ikx}.$$

$\{A_n\}, \{B_n\}$ とともに周期 N の周期数列である。

f が偶関数であれば、 $B_k = 0$ であり、 $C_{-k} = C_k, A_k = 2C_k$.

f が奇関数であれば、 $A_k = 0$ であり、 $C_{-k} = -C_k, B_k = 2iC_k$.

3.4.2 実関数の離散 Fourier 変換

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は周期 2π の周期関数とする。 f が実数値であるから、明らかに $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ であるが、 N 項離散 Fourier 変換する場合は、 $C_{N-k} = C_{-k} = \overline{C_k}$ という関係から、

$$A_{N-k} = A_k, \quad B_{N-k} = -B_k.$$

ゆえに独立な係数は、

$$N \text{ が偶数のとき } A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{N/2-1}, B_{N/2-1}, A_{N/2},$$

$$N \text{ が奇数のとき } A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{(N-1)/2}, B_{(N-1)/2}$$

である (N が偶数のとき、 f が何であっても $B_{N/2} = 0$ であることに注意)。

そこで、 N 項離散 Fourier 変換を次のように定義する。

N が偶数のとき、

$$\mathbb{R}^N \ni (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \mapsto (A_0, A_1, B_1, \dots, A_{\frac{N}{2}-1}, B_{\frac{N}{2}-1}, A_{\frac{N}{2}}),$$

$$A_n = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f_j \cos \frac{2\pi nj}{N} \quad (n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}),$$

$$B_n = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f_j \sin \frac{2\pi nj}{N} \quad (n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1).$$

この逆変換は

$$f_j = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2-1} \left(A_n \cos \frac{2\pi nj}{N} + B_n \sin \frac{2\pi nj}{N} \right) + A_{N/2} (-1)^j \quad (j = 0, 1, \dots, N-1).$$

N が奇数のとき

$$\mathbb{R}^N \ni (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \mapsto (A_0, A_1, B_1, \dots, A_{\frac{N-1}{2}}, B_{\frac{N-1}{2}}),$$

$$A_n = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos \frac{2\pi nj}{N} \quad \left(n = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2} \right),$$

$$B_n = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin \frac{2\pi nj}{N} \quad \left(n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \right).$$

この逆変換は

$$f_j = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \left(A_n \cos \frac{2\pi nj}{N} + B_n \sin \frac{2\pi nj}{N} \right) \quad (j = 0, 1, \dots, N-1).$$

(Cでプログラムを書く場合、 N の型が `int` であれば、 N が奇数のとき、 $N/2$ の値は $\frac{N-1}{2}$ である。 N が偶数のときは値が つねに 0 になり、メモリの無駄になることを承知で、 $B_{N/2}$ を記憶する変数を用意することにすれば、 N の偶奇によらず、`for (n=0;n<=N/2;n++)` あるいは `for (n=1;n<=N/2;n++)` というループで処理すれば良く、場合分けは不要である。)

3.4.3 離散余弦変換

天下りに定義を述べる。

$(f_0, f_1, \dots, f_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ が与えられたとき

$$(3.12) \quad A_n = \frac{1}{N} \left(f_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f_j \cos \frac{\pi n j}{N} + (-1)^n f_N \right) \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

とおき、この式で定まる写像

$$(f_0, f_1, \dots, f_N) \mapsto (A_0, A_1, \dots, A_N)$$

を**離散余弦変換**と呼ぶ。

これは \mathbb{R}^{N+1} から \mathbb{R}^{N+1} への全単射で、逆変換は

$$(3.13) \quad f_j = \frac{1}{2} \left(A_0 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} A_n \cos \frac{\pi n j}{N} + (-1)^j A_N \right) \quad (j = 0, 1, \dots, N).$$

(3.13) が逆変換であることを、直接確認することも可能であるが、前節までに説明した離散 Fourier 変換との関係を述べて、それから結果を導出することにする。

実は A_n は、 f を $[-\pi, \pi]$ に偶関数拡張した後に、周期 2π の周期関数として \mathbb{R} 全体に拡張した関数を $2N$ 項離散 Fourier 変換した場合の $C_n^{(2N)}$ と

$$A_n = 2C_n^{(2N)} \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

という関係にある。

$f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、上に述べたように \mathbb{R} 全体に拡張すると、 f は周期 2π の周期関数、かつ偶関数である。 $2N$ 項離散 Fourier 変換しよう。

$$h = \frac{2\pi}{2N} = \frac{\pi}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j = f(x_j)$$

とおく。

$2N$ 項の離散 Fourier 係数 C_n, A_n, B_n に対して

$$B_n = 0, \quad A_n = 2C_n, \quad A_{n+2N} = A_n, \quad A_{2N-n} = A_n$$

が成り立ち、独立なものは A_0, A_1, \dots, A_N だけである。

$\omega := \exp \frac{2\pi i}{2N}$ とする。 $f_{2N-j} = f_{-j} = f_j$, $\omega^{-n(2N-j)} = \omega^{nj}$ であるから、

$$\begin{aligned} A_n &= 2C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f_j \omega^{-nj} \\ &= \frac{1}{N} \left(f_0 + \sum_{j=1}^{N-1} f_j \omega^{-nj} + f_N \omega^{-nN} + \sum_{j=1}^{N-1} f_{2N-j} \omega^{-n(2N-j)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(f_0 + \sum_{j=1}^{N-1} f_j (\omega^{-nj} + \omega^{nj}) + (-1)^n f_N \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(f_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f_j \cos \frac{\pi n j}{N} + (-1)^n f_N \right). \end{aligned}$$

この逆変換は、命題 3.2.1 を用いて

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_{j=0}^{2N-1} C_n \omega^{nj} = C_0 + \sum_{n=1}^{N-1} C_n \omega^{nj} + C_N + \sum_{n=1}^{N-1} C_{2N-n} \omega^{(2N-n)j} \\ &= \frac{1}{2} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{N-1} (A_n \omega^{nj} + A_n \omega^{-nj}) + (-1)^j A_N \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(A_0 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} A_n \cos \frac{\pi n j}{N} + (-1)^j A_N \right). \end{aligned}$$

3.4.4 離散正弦変換

これも最初は天下りに定義を述べる。

$(f_1, \dots, f_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ が与えられたとき

$$(3.14) \quad B_n = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f_j \sin \frac{\pi n j}{N} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1)$$

とおき、この式で定まる写像

$$(f_1, f_2, \dots, f_{N-1}) \mapsto (B_1, B_2, \dots, B_{N-1})$$

を離散正弦変換と呼ぶ。

これは \mathbb{R}^{N-1} から \mathbb{R}^{N-1} への全単射で、逆変換は

$$(3.15) \quad f_j = \sum_{n=1}^{N-1} B_n \sin \frac{\pi n j}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1).$$

実は B_n は、 f を $[-\pi, \pi]$ に奇関数拡張した後に、周期 2π の周期関数として \mathbb{R} 全体に拡張した関数を $2N$ 項離散 Fourier 変換した場合の $C_n^{(2N)}$ と

$$B_n = 2iC_n$$

という関係にある。

$f(0) = f(\pi) = 0$ を満たす $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、上に述べたように \mathbb{R} 全体に拡張すると、 f は周期 2π の周期関数、かつ奇関数である。これを $2N$ 項離散 Fourier 変換しよう。

$$h = \frac{2\pi}{2N} = \frac{\pi}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j = f(x_j)$$

とおく。 $2N$ 項離散 Fourier 係数 C_n, A_n, B_n に対して

$$A_n = 0, \quad B_n = 2iC_n, \quad B_{n+2N} = B_n, \quad B_{2N-n} = -B_n$$

が成り立つ。さらに $C_0 = \frac{A_0}{2}$ より $B_0 = 0, B_{2N-N} = -B_N$ より $B_N = 0$ が導ける。結局、独立なものは B_1, B_2, \dots, B_{N-1} だけである。 $f_0 = f_N = 0, f_{2N-j} = f_{-j} = -f_j, \omega^{-n(2N-j)} = \omega^{nj}$ である

から、

$$\begin{aligned} B_n &= 2iC_n = \frac{i}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f_j \omega^{-nj} \\ &= \frac{i}{N} \left(\sum_{j=1}^{N-1} f_j \omega^{-nj} + \sum_{j=1}^{N-1} f_{2N-j} \omega^{-n(2N-j)} \right) \\ &= \frac{i}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f_j (\omega^{-nj} - \omega^{nj}) \\ &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f_j \sin \frac{\pi nj}{N}. \end{aligned}$$

この逆変換は、命題 3.2.1 を用いて

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_{n=0}^{2N-1} C_n \omega^{nj} = C_0 + \sum_{n=1}^{N-1} C_n \omega^{nj} + C_N + \sum_{n=1}^{N-1} C_{2N-n} \omega^{(2N-n)j} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{N-1} (B_n \omega^{nj} - B_n \omega^{-nj}) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} B_n \sin \frac{\pi nj}{N}. \end{aligned}$$

第4章 音声信号の周波数を調べる実験

(ここは、実際に Mathematica を使って試しながら読むことを想定して説明してある。試さずに読んでも、良く分からないと思われる。)

4.1 まずやってみよう

4.1.1 準備

- (1) この授業の WWW サイト¹ から、ギターのドの音の WAVE ファイル guitar-5-3.wav を入手し²、どこか適当なところ (デスクトップとかホームディレクトリとか) に保存する³。

```
ターミナルで入手して (ためしに) デスクトップにコピー  
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/guitar-5-3.wav  
cp guitar-5-3.wav ~/Desktop
```

- (2) Mathematica を起動して、カレント・ディレクトリを (1) のディレクトリにする (ホームディレクトリに保存した場合は必要がない)。

具体的なコマンドは、例えばデスクトップに保存した場合は

```
SetDirectory["~/Desktop"]
```

FileNames[] というコマンドで、カレント・ディレクトリにあるファイル名一覧が表示される。

4.1.2 guitar-5-3.wav の音を離散 Fourier 変換する

以下の実験の内容は、おおむね卒研のレポート (松山 [22]) に基づく。

```
snd=Import["guitar-5-3.wav","Sound"]
```

これでファイル guitar-5-3.wav を変数 snd に読み込む (snd は sound のつもり)。ボタンを押すと音が再生できる。

```
tbl = snd[[1, 1, 1]];
```

左チャンネルの音の数値データを tbl に代入した (tbl という名は table (表, 数表) のつもり)。

右チャンネルの音が欲しければ `tbl=snd[[1,1,2]]` とするか、あるいは `{tbl,rtbl}=snd[[1,1]]` として同時に代入する。ちなみに `snd[[1,2]]` はサンプリング周波数である。

¹<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/>

²実は保存しなくても、`snd = Import["http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/guitar-5-3.wav","Sound"]` のように URL を指定して Import 出来るが、実行時にネット接続が必要なので、最初に保存しておくのが便利である。

³例えば、Safari では、`control` を押しながらクリックして、「リンク先のファイルを別名でダウンロード」を選択して、デスクトップを選択すれば良い。

```
sr=snd[[1,2]]
```

これは 44100 となるはずである (sr は Sample Rate のつもり)。音楽用 CD と同じ、44.1 kHz というサンプリング・レートで録音したことを示している。

```
tb = Take[tbl, {1, 3*sr}];  
g = ListPlot[tb, PlotRange -> All]
```

sr から 3 秒分のデータを取り出してプロットしてみた。

(サンプリング周波数が sr kHz なので、1 から 3*sr で、3 秒分のデータということになる。Take[] はリストから、指定した範囲のデータを取り出す関数である。)

```
tb = Take[tbl, {62800+1, 62800+sr}];  
g = ListPlot[tb, Joined -> True, PlotRange -> {{1, 1600}, {-0.3, 0.3}}]
```

音が鳴り始めるのは 62800 番目辺りからなので、そこから 1 秒分 (sr × 1 s = 44100 個のデータ) 取り出して、1600 個分 (1600/44100 ≒ 0.036 秒分) プロットしてみた。ここは色々試してみると良い。

```
ListPlay[tb, SampleRate->sr]
```

とすると、取り出したデータ tb の音を鳴らすことが出来る。

```
c = Fourier[tb];  
  
ListPlot[Abs[c], Joined->True, PlotRange->All]
```

tb の離散 Fourier 変換 c を求め、絶対値をプロットした。これから周波数の分布が読み取れる (はず)。Abs[] の代わりに Re[], Im[] としてみたり (分かりにくいけれど、 $C_n = \overline{C_{N-n}}$ の関係が見える?)。

```
(* n1~n2 の範囲で |c[[n]]| をプロットする。 *)  
graph[c_, n1_, n2_] := ListPlot[Abs[c], Joined -> True,  
    PlotRange -> {{n1, n2}, {0, Max[Abs[c]]}}]  
  
graph[c, 1, 1600]  
graph[c, 120, 140]
```

範囲を区切って表示することで、ピークを探してみた (左右対称なので左側だけで探す)。素朴に目で見ただけでは、プログラムを書いて自動化することも難しくないであろう。

ピークは 130 番目である。つまり $|C_{129}|$ が最大ということである。(リスト c の 1 番目の要素 c[[1]] は C_0 であり、リストの要素の番号と Fourier 係数のインデックスが 1 ずれていることに注意する。)

これはこのギターの音の基本周波数が 129 Hz (ドの周波数 131 Hz に近い — ぴったりでないのは、録音をした人 (研究室の学生) のチューニングが完璧ではなかったから) であることを意味する。

手近の楽器の音 (ピアノ, リコーダー, ...) を自分で録音出来る人は、試してみよう。

逆 Fourier 変換して元に戻るか？

```
tb2=InverseFourier[c];  
Norm[tb-tb2]
```

実数データにするため、`tb2=Re[InverseFourier[c]]`; とする方が良いかもしれない。

余裕があれば、<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/mathematica-memo/node9.html> も見てみよう (高い周波数の音をカットする実験— そのうち授業でやるけれど)。

Mathematica メモ

(工事中)

- `In[数] :=` というプロンプトに対して、コマンドを入力して、最後に `shift+enter`
- `?関数名` でオンライン・ヘルプが呼び出せる。
- Mathematica で定義済みの関数・定数の名前は「大文字で始まる」というルールを守って決めてある。Pi, Plot[], Fourier[] などなど。複数の単語からなる名前は、各々の単語の先頭の文字を大文字にする。InverseFourier[], ListPlot[] などなど。ユーザーが自分で変数・関数を定義するとき、名前の先頭の文字を小文字にすると、名前の衝突が防げる。
N=1 としたらおかしい。→ 大文字はやめて n=1 のように小文字にする等。(注意: N[式] で式が表す数の近似値を求める関数 N[] と名前が衝突している。)
- `変数名 = Import["Wave ファイル名", "Sound"]` で Wave ファイルを読み込んで変数に代入できる。
- Mathematica では、ベクトルや行列はリストで表す。x={1,2} とか a={{1,2},{3,4}} など。x の第1成分は x[[1]] で、a の第(2,1)成分は a[[2,1]] で表せる。
- リスト list の第 n1~n2 要素を取り出すには、Take[list, {n1,n2}] とする。
- `c := Fourier[x]` で、ベクトル (数値のリスト) x を離散 Fourier 変換したベクトル (数値のリスト) が c に得られる。この講義の流儀に合わせるには、`c = Fourier[x, FourierParameters->{-1,-1}]` とする。
- `x = InverseFourier[c]` で、ベクトル (数値のリスト) c を逆離散 Fourier 変換したベクトル (数値のリスト) が x に得られる。この講義の流儀に合わせるには、`c = InverseFourier[x, FourierParameters->{-1,-1}]` とする。
- ListPlot[数値リスト]
逆離散 Fourier 変換で得た数値リストを扱うとき、丸め誤差により、本来実数であるものが丸め誤差により (虚部の絶対値の小さい) 虚数になってうまく処理できない。そのときは

`x = Re[InverseFourier[c]]`

のように実部を取る (虚部を0にクリアする) と良い。
- ListPlay[数値リスト, SampleRate->サンプリング周波数] で再生できる。

4.2 PCM による音のデジタル信号表現

音とは空気中を伝播する縦波である。音があるとき、気圧が音がないときの圧力を基準に時間変化する。基準圧力からの変位を**音圧**と呼ぶ。音圧の時間変化を記録することで音を記録(録音)出来る。

PCM (pulse code modulation, パルス符号変調) とは、アナログ信号 (連続変数の関数) をデジタル信号 (離散変数の関数 — 数列) で表現するための1つの方法であり、音楽用 CD、コンピュータのデジタル・オーディオ、デジタル電話等で標準的な形式となっている。具体的には、次の二つに基づく。

- (a) 一定の時間間隔で信号の値を評価する (**サンプリング**する、という)
- (b) 信号の値は有限桁の数で表現する (**量子化**する、という)
特に値の属する区間を等間隔に区切って、もっとも近い値に丸めることで実現するとき、**LPCM** (linear PCM) という。

パソコンで音を記録(録音) する場合は、電気的な信号に変換された音声を数値化して(アナログ信号からデジタル信号に変換するので **AD 変換** (analog-to-digital conversion) という)、数値を記録することになる。

サンプリング周波数とは、1秒間に何回サンプリングするかを意味している。サンプリング周波数が高いほど、より高い周波数の音が記録できるようになる。

音楽用 CD (1980年に SONY と Phillips により規格化された⁴) では、サンプリング周波数 44.1 kHz が採用された。

サンプリング周波数が 44.1kHz とは、1秒間に 44100 回のデータを記録するということになる。これが採用された理由は主に次の理由による。

- (a) 人間が普通聞くことが出来る音の周波数は 20 Hz ~ 20 kHz とされている。
- (b) サンプリング周波数は、再生したい最も高い音の周波数の2倍以上にする必要がある(これは後で解説する**サンプリング定理** (定理 5.1.1) を根拠とする、と説明されるが、定理 3.1.4 で説明することも出来るだろう。)

つまり、人間が普通に聞くことが出来る音を記録・再生出来るためには、サンプリング周波数は $2 \times 20 \text{ kHz} = 40 \text{ kHz}$ より高くする必要がある。

コンピューターで処理することを考えると、「有限桁の数」は、「2進法の有限桁の数」ということになるが、その際の桁数(ビット数)を**量子化ビット数**と呼ぶ。

8ビットの場合は $2^8 = 256$ 段階、16ビットの場合は $2^{16} = 65536$ 段階で表現することになる。音楽用 CD では、量子化ビット数として、16ビットが採用された。

サンプリング周波数と量子化ビット数の値が大きいほど、元の信号により忠実なデータが得られるが、もちろんデータの量はそれだけ増大する。

余談 4.2.1 (CD プレーヤー発売当時のパソコン技術の相場) 音楽用 CD では、ステレオ (2 ch) が普通なので、1秒間あたり、

$$44.1 \text{ k} \times 16 \text{ b} \times 2 = 1411.2 \text{ kb} = 176.4 \text{ kB} = 172.266 \text{ KB}$$

のデータが流れることになる。1分間では、その60倍の 10.0937 MB (ここで 1 MB = 1024 KB という意味) が流れることになる。1982年当時に普及していたリムーバブルな外部記憶媒体であるフロッピー・ディスクの容量は 1.2 MB 程度だったので、1分の音声信号を記録するのに、10枚近い

⁴音楽用の CD プレーヤーが初めて販売されたのは 1982 年である。当時ようやく 16 ビット CPU を用いたパソコンが市販された頃であった。外部記憶装置としては、1.2 MB の容量のフロッピー・ディスクが広く使われていた。

フロッピー・ディスクが必要だったことになる。これでは全然実用的ではない。CD という新しいメディア (74 分程度記録出来るようにするため、740 MB の容量となった) が必要になったのは当然のことである。

それにしても、2016 年現在、フロッピーディスクはもちろん、音楽用 CD さえもあまり目にしなくなってしまった。この種の技術の切り替わりの速さは著しい。

その後普及した MP3 では、圧縮によって、データのサイズを $\frac{1}{10}$ 程度まで小さくすることが出来るようになった。■

4.3 結果の分析

4.3.1 一般論の復習

(これまで独立変数は x と書くことが多かったが) 音声信号を考えると、独立変数は時刻なので、ここでは t と書くことにする。

信号の値そのものは x で書いてある、つまり信号を $x(t)$ としている本が多いので、ここでもそれに従う。

周期 T の周期関数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は次のように Fourier 級数展開出来る。

$$(4.1) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$(4.2) \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

基音の周波数は、周期の逆数 $f = \frac{1}{T}$ である。第 n 項の周期は $\frac{T}{|n|}$, 周波数は $|n|f$. n_0 倍音の周波数 n_0f に対応するのは、 $n = \pm n_0$ の項である。

一周区間 $[0, T]$ に N 回測定 (サンプリング) すると、サンプリング周期 $T_s = T/N$, サンプリング周波数 $f_s = \frac{N}{T}$ でサンプリングすることになる。

区間 $[0, T]$ の N 等分点 $t_j := jT_s$ での x の値 $x_j = x(t_j)$ を用いる。このとき離散 Fourier 係数 C_n は次式で与えられる。

$$(4.3) \quad C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \omega = e^{2\pi i/N}.$$

離散フーリエ係数 $\{C_n\}$ は周期数列であるので、連続する N 項 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ だけ求めれば十分である。

離散フーリエ係数 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ は

$$C_n = \sum_{p \equiv n} c_p$$

を満たす。

$\{C_n\}$ から $\{x_j\}$ を求めるには、逆離散 Fourier 変換すれば良い:

$$(4.4) \quad x_j = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{jn} \quad (j = 0, 1, \dots, N-1).$$

4.3.2 今回の実習では

サンプリング周波数 $f_s = 44.1$ kHz でサンプリングしたデータから、 $T = 1$ s 分の信号 ($N = f_s T = 44100$ 個の数値) を取り出して、離散フーリエ変換した。

周期 $T = 1$ s の周期信号とみなして Fourier 級数展開したことになる。

4.3.3 $|C_n|$ ($1 \leq n \leq N-1$) は左右対称

u が実数値関数なので、 $\overline{c_n} = c_{-n}$ が成り立つ。特に $|c_{-n}| = |c_n|$ 。実際

$$\overline{c_n} = \overline{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{x(t)} e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i(-n)\frac{2\pi}{T}t} dt = c_{-n}.$$

(Cf. 実数値関数 f の Fourier 変換 \widehat{f} に対して、 $\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi)$ が成り立つ。)

同様に離散フーリエ係数については、

$$\overline{C_n} = C_{-n} = C_{N-n}, \quad |C_n| = |C_{-n}| = |C_{N-n}|$$

が成り立つ。

横軸 n ($1 \leq n \leq N$)、縦軸 $|C_n|$ でプロットすると、左右対称になるのはこのためである。

(細かいことをいうと、実数値データを Fourier [] で離散フーリエ変換するのは、無駄な作業をしていることは否めない。それを避けるための手段 (離散 Fourier 余弦変換など) はあるが、この講義では大事な原理が分かればそれで良い、という方針なので、そういう話題は省略する。)

4.3.4 第 n 項の周波数は $|n|/T$

(4.1) の第 n 項の周期は $\frac{T}{|n|}$ 、言い換えると周波数は $\frac{|n|}{T} = |n|$ Hz である ($T = 1$ s としてあることを思い出そう)。

c_1, c_{-1} は 1 Hz の成分

c_2, c_{-2} は 2 Hz の成分

⋮ ⋮

$|C_{129}| = |C_{N-129}|$ が最大ということは、周波数が 129 Hz の成分が最大ということの意味している。

その次に大きいのは $|C_{258}| = |C_{N-258}|$ であった。258 Hz の成分がその次に大きいことを意味している。一番低い 129 Hz の整数倍になっているのは、ギターが 1 次元の振動現象であることから、もつともである。

参考 4.3.1 (1 次元の弦の振動) 長さ L の弦の (微小な) 振動は、次の波動方程式の初期値境界値問題をモデルに持つ。

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (0 < x < L, t > 0)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (t > 0)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq L).$$

$u = u(x, t)$ は、釣り合いの位置 x にあった点の時刻 t における変位 (基準の位置からのずれ) を表す。

T を張力、 ρ を線密度 (単位長さあたりの質量) として、 c は $c = \sqrt{T/\rho}$ で与えられるが、これは実は弦を伝わる波の速さに等しい。ヴァイオリンやギターなどでは、張力を変えることで音の高さを調整することが出来る。

この問題の解は次式で与えられる。

$$(\#) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + b_n \sin \frac{cn\pi t}{L} \right),$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

(#) の第 n 項の基本周期は $\frac{2L}{nc}$, その周波数は $\frac{nc}{2L}$. これらは一番低い周波数 $\frac{c}{2L}$ ($n = 1$ に対応する) の整数倍である。■

余談 4.3.1 (音階) 1 オクターブ高い音の周波数は 2 倍である。西洋の音階では、1 オクターブは、半音 12 個分に相当する (C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B)。平均律では各音の周波数が等比数列になる (というよりも、そうするのが平均律である)。よって、半音高いと周波数は $2^{1/12} = 1.05946\dots$ 倍になる。ピアノの鍵盤の中央付近にある $\overset{\bar{r}}{A}$ (ラ) の音は、普通 440 Hz に調律されるので、その下の $\overset{\bar{r}}{C}$ (ド) の音 (半音 9 個分低い) の周波数は

$$\frac{440}{2^{9/12}} = 261.6255653\dots \text{ Hz.}$$

上の実験のギターの音は、これより 1 オクターブ低い、 $\frac{261.6}{2} = 130.81\dots$ を目安に調律したのであろう。実際に $|C_{129}|$ が最大になったのは、まあまあのチューニングだったのであろうか? (私はこのあたり詳しくないので…知っている人は教えて下さい。) ■

4.3.5 より精密に

(話が細かいので、実習日にはカットする。)

実際には、周波数は自然数に限られるわけではない。その場合は $T = 1 \text{ s}$ は、その信号の周期にならない可能性がある。

簡単のため、周波数 f の信号 $u(t) = e^{2\pi i f t}$ を考える。 $0 \leq t \leq T$ で記録して、(周期 T の周期関数としての) Fourier 係数を求めると、

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i(f-n/T)t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{iA_n t} dt = \frac{1}{iA_n T} (e^{iA_n T} - 1).$$

ただし $A_n := 2\pi(f - n/T)$. これから

$$|c_n| = \text{sinc} \frac{A_n T}{2}.$$

$T = 1 \text{ s}$, $f = 130.813 \text{ Hz}$ のとき、 $n = 125, \dots, 135$ の範囲で $\text{sinc}(A_n T/2)$ を調べると、

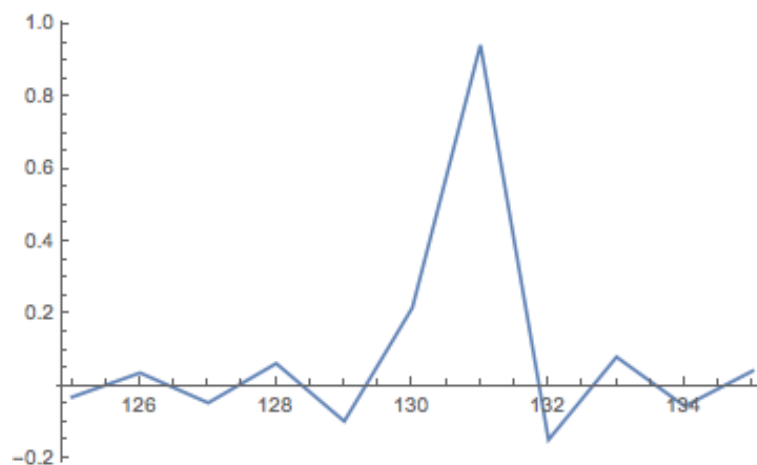


図 4.1: 125 ~ 135 Hz の範囲で $\text{sinc}(A_n T/2)$

(おっと、書きかけだ。)

4.4 Mathematica での音の取り扱い

実は Mathematica の `Fourier[]` がデフォルトで計算するのは (C_n ではなく)

$$C'_n := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega^{nj}$$

である。 C_n を計算させるには、`FourierParameters->{-1,-1}` というオプションを与えれば良い。

```
c=Fourier[tb, FourierParameters->{-1,1}];
```

ところで、信号が実数値であることから、

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \overline{C'_n}$$

という関係が成り立つ⁵。ゆえにパワースペクトルについては、 $|C_n|^2 = \frac{1}{N} |C'_n|^2$ であるから、周波数を求めたりする場合は (パワースペクトルが大きくなる n はどこか調べる)、デフォルトのまま使っても良い。

最近のコンピューターを用いて音データを取り扱うための情報については、(かなり雑ではあるが) 「音の取り扱いに関するメモ」⁶ が参考になると思われる。`Import[]`, `ListPlay[]`, `Fourier[]` などの使い方を説明してある。

⁵ $\overline{x_j \omega^{nj}} = \overline{x_j} \overline{\omega^{nj}} = x_j \omega^{-nj}$ であることに注意せよ。

⁶<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/memo-sound/>

第5章 サンプリング定理

連続信号をサンプリングして離散信号を取り出すことにより、元の信号 (関数) の情報がどれくらい失われるのか、どのくらい保存されているのか、これは大事な問題である。離散 Fourier 変換でも考えたが (定理 3.1.4)、ここでは周期関数でない $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の Fourier 変換に関する、有名なサンプリング定理を紹介する。

結論を大まかに述べると、ある数以上の周波数成分の含まれていない信号は、2倍 (以上) のサンプリング周波数でサンプリングした (サンプリング・) データから再現できる、という内容である。

個人的には、確かに定理である (正しい命題である) が、応用するにあたって、かなり不自然な内容である (現実との距離が大きすぎる) と思っている。

5.1 定理と証明

以下のサンプリング定理の定式化と証明は、木村 [23] を参考にした (私はこの辺りの話題には詳しくないけれど、他の色々な文献を見たところ、割と標準的な説明のようである)。

定理 5.1.1 (サンプリング定理, Nyquist, Shannon, 染谷) 関数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の Fourier 変換

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

が

$$(\exists W > 0)(\forall \omega \in \mathbb{R} : |\omega| \geq W) \quad X(\omega) = 0$$

を満たすならば、このような W を任意に一つ取って

$$T := \frac{\pi}{W}$$

とおくとき、次式が成り立つ。

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \pi(n-t/T)}{\pi(n-t/T)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc} [\pi(n-t/T)].$$

つまり、 $\frac{W}{2\pi}$ 以上の周波数成分を含まない信号は、サンプリング周波数 $f_s := \frac{1}{T} = \frac{W}{\pi}$ ($= 2 \times \frac{W}{2\pi}$) でサンプリングした離散信号から復元できる。言い換えると、 f 以上の周波数成分を含まない信号は、 $2f$ 以上のサンプリング周波数でサンプリングしたデータから復元できる。

証明 Fourier 変換の反転公式を思い出そう。

$$X(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

とおくとき、次式が成り立つ。

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (t \in \mathbb{R}).$$

仮定 $|\omega| \geq W \Rightarrow X(\omega) = 0$ より、積分区間 \mathbb{R} を $[-W, W]$ で置き換えて

$$(5.1) \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^W X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (t \in \mathbb{R})$$

この式は周期 $2W$ の関数の Fourier 係数の式に似ている。それを書こう (そして赤字で修正)。

$$(5.2) \quad c_n := \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(\omega) e^{+in\frac{\pi}{W}\omega} d\omega = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(\omega) e^{inT\omega} d\omega$$

とおくとき

$$(5.3) \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\frac{\pi}{W}\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inT\omega} \quad (|\omega| \leq W).$$

(X は周期関数ではないが、周期 $2W$ の関数となるように、 $[-W, W]$ の外ではコピーで定義し直して、Fourier 級数展開した、と考える。)

(5.1) と (5.2) を見比べて、

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-i\omega(nT)} d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2W} x(nT) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T x(nT).$$

これを (5.1) に代入すると

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-W}^W \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-in\omega T} e^{i\omega t} d\omega \right) \\ &= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{2W}{2W} \int_{-W}^W e^{i\omega(t-nT)} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}[W(t-nT)]. \end{aligned}$$

$Wt - nWt = \frac{\pi t}{T} - n\pi = \pi \left(\frac{t}{T} - n \right)$ であるから結論の式を得る。 ■

余談 5.1.2 (個人的な感想) 信号がある限界以上の高い周波数成分は含まないという仮定は、その信号が解析的 (定義域の各点で冪級数展開可能という意味) であることを導く。話が関数論の守備範囲に属する、と言えなくもない。授業で「Fourier 級数が、冪級数と比べて優れている点は、あまり滑らかでない関数、不連続関数さえも扱えることにある」というように喋っているのも、少々複雑な気持ちになる。信号処理をしている人達は、どのように考えているのだろうか。私自身は、サンプリング定理は、もちろん真な命題であるが、実際に身の回りで起きている現象との距離はかなり大きい、と感じている。 ■

5.2 余談: 歴史覚書と発展

5.2.1 歴史覚書

こういう (以下話す) 話は、ある意味で良くあるものなので¹、時間に余裕があれば説明するのは有意義であろう。

¹必要がある場合は、ほぼ同時にたくさんの人が考える。ロシア人も後から一言もの申す (実際、ロシアの研究者が先んじている場合が少なくないが、彼らの業績は西側に伝わりにくいのでそういうことになるみたい)。応用からは離れて、数学者がずっと以前に片付けていることも結構ある。

サンプリング定理については、ナイキスト (Harry Nyquist, 1889–1976, スウェーデン) が 1928 年に予想したこと²を、シャノン (Claude Elwood Shannon, 1916–2001) がシャノン [5]³(1948 年 [25], [5]) の中で、^{そめやいさお}染谷 勲が染谷 [26] (1949 年) の中で、独立に証明したが、実はロシアの Kotel'nikov は 1933 年にこの結果を得ていた、ということは良く知られている。

でも実は数学分野では、もっと遡ることが出来て、補間法の公式として、E. T. Whittaker (1873–1956, 応用数学の大家, Whittaker-Watson [27] という著書が有名) が 1915 年に、^{おぐら}小倉金之助 (1885–1962, 数学史・数学教育分野で大変有名な人物であるが、こういう研究をしていたとは!) が 1920 年に得ていた (Butzer 他 [28] — これは解説すべき論文かもしれない。Whittaker のは補間法で、小倉のは正しくサンプリング定理である、と言っているように読める。メイン・ストリームに合流しなかった研究成果は意味がない、と言う人は多いのだけれど、Whittaker にしても小倉にしても、決してマイナーな人ではないので (応援団はたくさんいそうだが)、気づかれなかったことをどのように捉えるべきか、考え込んでしまう。)

一方で、定理がどのように応用されるかは、定理を発見した人も見通せず、その定理が必要な人達に知られないことがある、というのも仕方がない面がある。実際に必要を感じた人達が独立に発見し、それを生かす道を整備することは重要な業績である。電子通信情報学会編「電子情報通信学会創立 100 周年記念マイルストーン— 100 年の偉業を振り返り未来に繋ぐ」[29] を見ると、通信の分野で、染谷の業績が非常に高く評価されていることが良く分かる。

5.2.2 小倉の定理

数学的な理解を深めるために好適と思われるので、少しお時間を頂戴します。

(準備中)

sinc は区間の特性関数の Fourier 変換であるので、基本的である、ということは理解できるであろう。sinc の応用については、“Sinc numerical methods” というものがある (Stenger [13] が定番本)。

²“Certain topics in telegraph transmission theory” の中で帯域幅 W の信号を送信するには、サンプリング周期を $\frac{1}{2W}$ 以下にする必要がある、と述べたそうである (Nyquist [24])。

³“Communication in the presence of noise” の中で信号を復元する公式を導出した。

第6章 離散時間 Fourier 変換と Fourier ファミリー

6.1 離散時間 Fourier 変換

正とは限らない整数を添え字に持つ複素数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を**離散信号**と呼ぶ。

離散信号 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は、 $f_n = f(n)$ とすることで、関数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ とみなせる。離散信号全体の集合を $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ で表す。

f の**離散時間 Fourier 変換** (discrete-time Fourier transform, DTFT) とは、

$$(6.1) \quad \mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

で定義される関数 \hat{f} のことをいう。

\hat{f} は、実は周期 2π の関数である。実際、

$$\hat{f}(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in(\omega+2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega - i2n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} = \hat{f}(\omega).$$

ゆえに $\omega \in [0, 2\pi]$ (あるいは $\omega \in [-\pi, \pi]$) で考えれば十分である。

$f(n)$ は関数 \hat{f} の第 $(-n)$ Fourier 係数と見做せるので (これはちゃんと理解するべし)、

$$(6.2) \quad f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega)e^{in\omega} d\omega \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ。これが**離散時間 Fourier 変換の反転公式**である。

念のため後から補足

次のようにも考えられる。 $m \neq n$ とするとき、

$$(e^{-in\omega}, e^{-im\omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\omega} \overline{e^{-im\omega}} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\omega} d\omega = \left[\frac{e^{i(m-n)\omega}}{i(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

であるから $\{e^{-in\omega}\}$ は直交系であり、(6.1) は直交系による \hat{f} の展開である。

$$(e^{-in\omega}, e^{-in\omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\omega} \overline{e^{-in\omega}} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi$$

であるから、 $e^{-in\omega}$ の係数 $f(n)$ は

$$f(n) = \frac{(f, e^{-in\omega})}{(e^{-in\omega}, e^{-in\omega})} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \overline{e^{-in\omega}} d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{in\omega} d\omega. \blacksquare$$

無限和だから収束が問題になるが、ある程度の知識がある人を対象に簡単に触れておくと、

- $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ について、有限エネルギー条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$ (つまり $\{f(n)\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ということ) を課した場合、 $\hat{f} \in L^2(0, 2\pi)$ であり、(6.1) は L^2 における等式と解釈すれば良い。
- $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ について、 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$ という条件 (つまり $\{f(n)\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ という条件) を課すと、(6.1) の右辺は一様に絶対収束し、和は連続な関数となる (Weierstrass の M-test を使う、知っている人にとっては「良くある議論」)。

6.2 Fourier ファミリーの一覧表

これまでに出て来た、Fourier 変換、Fourier 級数 (Fourier 係数)、離散時間 Fourier 変換、離散 Fourier 変換の一覧表を作って整理してみよう。

伝統的な数学科のカリキュラムでは、Fourier 変換、Fourier 係数 (Fourier 級数) について学ぶが、離散 Fourier 変換 (discrete Fourier transform) や、離散時間 Fourier 変換 (discrete-time Fourier transform) は学ばないことが多い。

対象	操作の名前	変換の定義式	反転公式
\mathbb{R} 上の関数	Fourier 変換	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi$
\mathbb{R} 上の周期関数	Fourier 係数	$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$	$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$
\mathbb{Z} 上の関数 (離散信号)	離散時間 Fourier 変換	$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega \in [0, 2\pi])$	$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(\omega)e^{in\omega} d\omega$
\mathbb{Z} 上の周期関数 (周期的離散信号)	離散 Fourier 変換	$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (0 \leq n \leq N-1),$ $\omega := \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$	$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{nj}$

しばらく観賞。

式が良く似ていることに注目しよう。(その気になれば、もっと似せることも出来るけれど、それはやらないでおいた。)

どれもいわゆる「変換」であり、それぞれ (例えば) $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $L^2(0, 2\pi) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi)$, $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ の同型を与える ($\frac{1}{2\pi}$ や $\frac{1}{N}$ を公平に分配すると、内積を保つようになる。)

離散 Fourier 変換は、Fourier 係数を求める計算の離散化とみなすことができる。それは (定数倍の調節をすれば) \mathbb{C}^N 上のユニタリ変換になっていて、逆変換は順方向の変換と良く似たものになる (そのあたりは、定数倍の調節をすれば $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ変換になる、Fourier 変換と似て来るのは不思議である)。

一方、離散時間 Fourier 変換は、離散 Fourier 変換よりももっと知名度が低いけど、数学的には、関数にその Fourier 係数を対応させる写像の逆写像と等価と言えるので (上の表で 2 行目と 3 行目の定義式と反転公式の部分をつなぎかけると分かる)、実は知っていることになる。

今から用語を変えることは不可能だと思うが、例えば「離散時間 Fourier 変換」、「離散 Fourier 変換」をそれぞれ「離散 Fourier 変換」、「離散 Fourier 係数」とすれば分かりやすかったらと思う。

\mathbb{R} 上の周期関数は、 \mathbb{R} 上の関数であるから、Fourier 変換をすることも考えられるが、素朴にやると積分が発散してしまう。超関数論を用いると、デルタ関数で表すことが出来る。

第7章 畳み込み

7.1 はじめに

色々な関数 (連続信号, 離散信号) に対して、**畳み込み** (合成積, convolution) $f * g$ が定義できる。その定義は後述するが、

$$(7.1) \quad f * g = g * f, \quad (\text{交換法則})$$

$$(7.2) \quad (f * g) * h = f * (g * h), \quad (\text{結合法則})$$

$$(7.3) \quad (f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g, \quad (\text{分配法則あるいは線形性の一部})$$

$$(7.4) \quad (cf) * g = c(f * g) \quad (\text{線形性の残り})$$

$$(7.5) \quad [f \neq 0 \quad \wedge \quad f * g = f * h] \Rightarrow g = h \quad (\text{零因子の非存在})$$

など、素性の良さそうな性質を持つ (これらも後述)。

Fourier 解析との関係では、次が重要である。

畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積に移る。

$$(7.6) \quad \mathcal{F}[f * g] = \text{定数} \times \mathcal{F}f \mathcal{F}g.$$

(定数が何になるかは、畳み込みや Fourier 変換の定義の流儀による。)

畳み込みには、単位元 (もどき) “デルタ” δ がある。

$$(7.7) \quad f * \delta = f.$$

実変数の関数に対しては、 δ はディラックのデルタ超関数 (普通に関数の範囲をはみ出す)、また離散信号に対しては、 δ は単位インパルス $\delta = \{\delta_{n0}\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\dots, 0, 0, \underset{n=0}{1}, 0, 0, \dots\}$ である。

デルタ δ の Fourier 変換は定数関数 1 である。また定数関数 1 の Fourier 変換は δ である。

$$(7.8) \quad \mathcal{F}\delta = \text{定数} \times 1, \quad \mathcal{F}1 = \text{定数} \times \delta.$$

やはり定数が何になるかは、畳み込みや Fourier 変換の定義の流儀による。具体的に示すため、 \mathbb{R} で定義された関数の Fourier 変換を考えることにすると、

$$\mathcal{F}\delta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathcal{F}1(\xi) = \sqrt{2\pi}\delta(\xi)$$

が成り立つ。実際、最初の等式は、任意の f に対して、 $\mathcal{F}f = \mathcal{F}[f * \delta] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f\mathcal{F}\delta$ であるから納得できる。それから $\mathcal{F}^*1(x) = \sqrt{2\pi}\delta(x)$ が得られるので、「逆 Fourier 変換が分かれば、Fourier 変換が求まる」という例の議論をして $\mathcal{F}1(\xi) = \sqrt{2\pi}\delta(-\xi) = \sqrt{2\pi}\delta(\xi)$ が得られる。

7.2 畳み込みの形式的定義

以下のそれぞれの場合に、 $f * g$ を f と g の畳み込み (合成積, the convolution of f and g) と呼ぶ。

一つの場合を除き、広義積分あるいは無限和であるから、収束するかしないかが問題になるが、それはとりあえず問題にしないでおく。

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$(7.9) \quad f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

により定める。

周期 2π の周期関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$(7.10) \quad f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

により定める。これは周期 2π であることが分かる。

$f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$(7.11) \quad f * g(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

により定める。

周期 N の $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$(7.12) \quad f * g(n) := \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

により定める。これは周期 N であることが分かる。

7.3 畳み込みの例

信号処理での例 (デジタル・フィルタ) はこの後メインで説明するので、それ以外の例をいくつか。

7.3.1 Fourier 級数の Dirichlet 核

周期 2π の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ のフーリエ級数の n 項までの和

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

は、Dirichlet 核と呼ばれる

$$(7.13) \quad D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

を用いると、次のように表される。

$$(7.14) \quad s_n = D_n * f.$$

実際

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

であるから、

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} f(y) dy = D_n * f(x).$$

補題 7.3.1 (Dirichlet 核を求める) $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とするとき、

$$D_n(\theta) = \frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{\sin(\theta/2)}.$$

証明

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}.$$

仮定から $e^{i\theta} \neq 1$ であるから、等比数列の和の公式によって

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i(n+1/2)\theta} - e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = \frac{e^{i(n+1/2)\theta} - e^{i\theta/2}}{2i \sin(\theta/2)}.$$

一般に $\operatorname{Re} \frac{z}{i} = \operatorname{Im} z$ であるから

$$D_n(\theta) = 1 + 2 \frac{\operatorname{Im} (e^{i(n+1/2)\theta} - e^{i\theta/2})}{2 \sin(\theta/2)} = 1 + \frac{\sin[(n+1/2)\theta] - \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{\sin(\theta/2)}. \blacksquare$$

Mathematica で Dirichlet 核のお絵描き (検算も兼ねて)

```
Di[n_, x_] := Sin[(n+1/2)x] / Sin[x/2];
Di2[n_, x_] := Sum[Exp[I k x], {k, -n, n}];
g = Plot[{Di[4_, x_], Di2[4, x]}, {x, -3Pi, 3Pi}]
```

(Dirichlet 核は周期 2π なので、 $[-\pi, \pi]$ でグラフを描けば十分だが。)

f が適度な滑らかさを持つとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$ (適当な意味で) が成り立つことから “想像できる” ように、超関数の意味で $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \delta$ が成り立つ。

7.3.2 静電場からの例

(個人的にはこの例が一番わかり易い。)

クーロンの法則によると、空間内の原点に電荷量 1 の点電荷 (単位点電荷) があるとき、その電荷が作る電場は、適当な単位系で

$$\mathbf{E}_{\text{単}}(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{x}{|x|^3}.$$

(SI 単位系では、真空の誘電率¹ を ϵ_0 として $\mathbf{E}_{\text{単}}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$ となるそうだ。)

¹ $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}$. ここで c は光速で、 $c = 299792458$ m/s. これから $\epsilon_0 \doteq 8.854 \times 10^{-12}$ F/m.

```

In[27]:= Di[n_, x_] := Sin[(n + 1/2) x] / Sin[x/2]
In[28]:= Di2[n_, x_] := Sum[Exp[I k x], {k, -n, n}]
In[29]:= Plot[{Di[4, x], Di2[4, x]}, {x, -3 Pi, 3 Pi}]

```

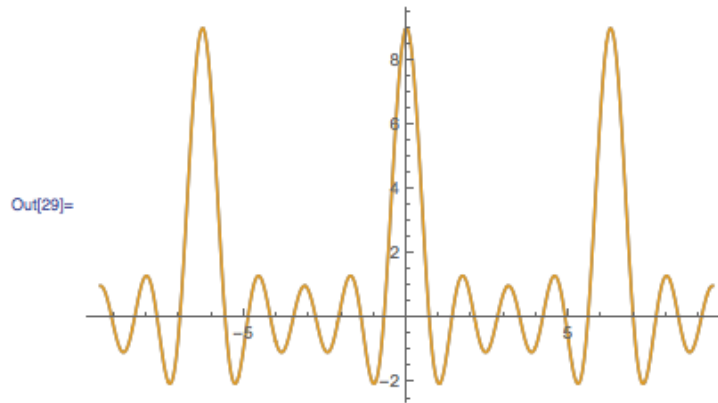


図 7.1: Dirichlet 核 D_n のグラフ ($n = 4$ の場合) 2つ重なって1つに見える

この電場のポテンシャル (ポテンシャル・エネルギー, 電位ともいう) は、

$$U(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}.$$

この U は

$$-\text{grad} U = \mathbf{E}_{\text{単}}$$

を満たす。これだけでなく、以下のすべての場合で、電場 \mathbf{E} と電場のポテンシャル u の間には

$$-\text{grad} u = \mathbf{E}$$

という関係が成り立つ。

この (単位点電荷の電位) U を用いると、より複雑な電荷分布の電位が分かる²。

- 原点に電荷 (量) Q のとき $u(x) = QU(x)$.
- 点 y に電荷 Q のとき $u(x) = QU(x - y)$.
- 点 y_1, y_2, \dots, y_N に電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_N のとき $u(x) = \sum_{j=1}^N Q_j U(x - y_j)$.
- 電荷が連続的に密度 $q(y)$ で分布しているとき

$$(7.15) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} U(x - y)q(y) dy.$$

\mathbb{R}^3 で定義された関数 $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ の畳み込み $f * g$ は

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x - y)g(y) dy$$

で定義されるので、(7.15) は

$$u = U * q$$

と書ける (U は特異性を持つので、きちんとやるのは簡単ではないが、そこには目をつむる)。

²ただし、これは物理学としての議論であって、数学的な議論ではない。

密度 q で分布している電荷の電場のポテンシャルは $U * q$ である
(ただし U は単位点電荷の作る電場のポテンシャル)

この講義は、微分との関係が薄くなっているなので、少し踏み込んでみる。
電磁気学の Gauss の法則³ (の微分形)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = q$$

に $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$ を代入して、公式 $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$ を用いると

$$-\Delta u = q.$$

これが静電場のポテンシャルの微分方程式として有名な **Poisson 方程式** である (ちなみに重力のときも同じ形の方程式になる)。

単位点電荷の場合は？単位点電荷の電荷密度なんて考えられる？Dirac のデルタ関数 δ を用いるのが良い。実は

$$(7.16) \quad -\Delta U = \delta.$$

つまり

デルタ関数は単位点電荷の電荷密度である
(原点に 1 が置いてあるという状況を表す)

((7.16) が成り立つことを、「 U は $-\Delta$ の基本解である」という。)

微分と畳込みとの関係

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

系として

$$\Delta (f * g) = (\Delta f) * g.$$

証明は、形式的にはとても簡単で、微分と積分の順序交換一発である。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f * g)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x-y)g(y) dy.$$

δ が、任意の q に対して $q * \delta = q$ を満たすことと、 $-\Delta U = \delta$ から、 $u := U * q$ で u を定めると

$$-\Delta u = -\Delta (U * q) = -(\Delta U) * q = \delta * q = q.$$

単位点電荷の電場のポテンシャル U から、一般の電荷分布のポテンシャルが得られる仕組みが 1 行で見えて面白い (もっとも、これをきちんと論理の筋道をつけて、証明を添えた話にするのは、結構大変)。

この話は実は一般性が高い。次節のデジタル・フィルターで良く似た話を見ることになる。

「線形定常フィルタ F に対して、単位インパルス応答 $h := F[\delta]$ が分かれば、一般の入力信号 x に対する応答 $F[x]$ は $h * x$ である。」

³有名な Maxwell の方程式の第 1 は $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ であり、 ρ は電荷密度を表す。ここの議論では、 $\epsilon_0 = 1$ となるような単位が採用されていることに注意する。

7.3.3 軟化作用素

(準備中)

7.3.4 高速乗算法

(準備中)

7.4 畳み込みの基本的な性質の証明

普通の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の場合に、「はじめに」で紹介した畳み込みの基本的な性質がどのように証明されるか、ざっと見てみよう。

積分の収束などは「ずばらに」扱う⁴。

Fourier 変換は 4 種類あり、それぞれに証明が必要であるが、全部書くと長くなるので、適当に (周期性があるかないか、変数が連続か離散か) 選択して示す。

7.4.1 線形性

畳み込み $f * g$ が f について線形であること、つまり

$$(7.17) \quad (f_1 + f_2) * g = (f_1 * g) + (f_2 * g),$$

$$(7.18) \quad (cf) * g = c(f * g) \quad (c \in \mathbb{C})$$

が成り立つことは、積分 \int や和 \sum の線形性から明らかである。

7.4.2 交換法則 $f * g = g * f$

普通の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の場合、

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy.$$

で、 $u = x - y$ とおくと、 $du = -dy$, $y = -\infty$ のとき $u = \infty$, $y = \infty$ のとき $u = -\infty$, $y = x - u$ であるから、

$$f * g(x) = \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)(-du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)f(u) du = g * f(x).$$

周期 N の周期数列 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ の場合は、

$$f * g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k).$$

ここで $\ell := n - k$ とおくと (k から ℓ に変数を変換すると)、 $0 \leq k \leq N-1$ に $n \geq \ell \geq n - (N-1)$ が対応する。

$$f * g(n) = \sum_{\ell=n-(N-1)}^n g(n-\ell)g(\ell).$$

⁴普通の関数の場合にどうなるかは、付録の ?? 節、特に命題 F.2.1 などを見ると様子が分かるかも。超関数の話までやることになるちょっと大変である。

$g(n - \ell)f(\ell)$ は ℓ について周期 N であり、 \sum は連続する N 項の和であるから

$$f * g(n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} g(n - \ell)f(\ell) = g * f(n).$$

7.4.3 結合法則 $(f * g) * h = f * (g * h)$

積分の順序交換 (Fubini の定理) により

$$\begin{aligned} (g * f) * h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g * f)(x - y)h(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g((x - y) - u)f(u) du \right) h(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g((x - u) - y)h(y) dy \right) f(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g * h(x - u)f(u) du \\ &= (g * h) * f(x). \end{aligned}$$

すなわち $(g * f) * h = (g * h) * f$. ゆえに交換法則を用いて

$$(f * g) * h = (g * f) * h = (g * h) * f = f * (g * h).$$

7.4.4 零因子の非存在 (the Titchmarsh convolution theorem)

$$(7.19) \quad f * g = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \text{ または } g = 0.$$

常微分方程式の初期値問題を解くための**演算子法**を展開するとき、基礎とされることのある定理である⁵。

証明は意外と難しい (うまい方法があるのだったら、ぜひ教えて下さい)。Yosida [30] (英語), 吉田・加藤 [11] (日本語) には載っている。

7.5 畳み込みの Fourier 変換は Fourier 変換の積

目標は、色々なものに対して、畳み込み $f * g$ と “Fourier 変換” $\mathcal{F}f$ が定義できるが、すべての場合に

$$\mathcal{F}[f * g] = \text{定数} \times (\mathcal{F}f \mathcal{F}g) \quad (\text{畳み込みの Fourier 変換は、Fourier 変換の積})$$

が成り立つことを確かめること。

(f, g と $f * g$ はつねに同種のものであるが、 f と $\mathcal{F}f$ は違う種類のものになる場合もある。)

⁵普通関数の世界に単位元がなくても、れいいんし零因子が存在しないのならば、“分数”を考えると、0 でない f について、 $\frac{f}{f}$ を考えると、 f に依らないものになり、実はそれが単位元になる。それを δ と定義しよう、という調子で議論を展開する。

数列は \mathbb{Z} 上の関数とみなせることを注意しておく。実際、数列 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ があるとき、 f_j を $f(j)$ と書けば、数列は関数 $f: \mathbb{Z} \ni j \mapsto f_j \in \mathbb{C}$ とみなせることが分かるであろう。

定数因子もきちんと示すため、Fourier 変換、畳込みの定義式をそのつど書くことにする。

この項目は重要なので、勉強してもらうために期末試験に「証明せよ」という問題を出題したところ、乱暴なことをして減点される取る学生が多かった(こういうのを減らすのがこちらの目標だったりする)。証明は、どの場合も、積分(あるいは \sum) の順序交換してから変数変換をする、ということなので、覚えるのは簡単だと思うんだけど。

7.5.1 “普通の関数” の Fourier 変換の場合

f を \mathbb{R} を定義域とする関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とするとき、 f の Fourier 変換 $\mathcal{F}f$ (\hat{f} とも書く) は

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

で定義される。 $\mathcal{F}f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ である。

この項では、この記号を基本として、他の“Fourier 変換”の記号をこれに真似て書くことにする。

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f と g の畳み込み $f * g$ を

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める。 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ である。

実は

$$(7.20) \quad \mathcal{F}[f * g](\xi) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi)$$

が成り立つ。

証明 $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-ix\xi} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi} dx \right) g(y)dy. \end{aligned}$$

右辺の () 内の広義積分を \lim で表してから、変数変換する。 $u = x - y$ とおくと、 $dx = du$, $x = u + y$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+y)\xi} = e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x-y)e^{-ix\xi} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R-y}^{R-y} f(u)e^{-iu\xi}e^{-iy\xi} du \\ &= e^{-iy\xi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R-y}^{R-y} f(u)e^{-iu\xi} du \\ &= e^{-iy\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi} du. \end{aligned}$$

(積分の上端、下端に y が現れるけれども、結局は消えてしまうのが大事なところである。) から

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-iy\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\xi} du \right) g(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\xi} du \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iy\xi} dy \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F} f(\xi) \mathcal{F} g(\xi). \blacksquare\end{aligned}$$

注意 7.5.1 (期末試験に現れる間違い) 要点は「積分順序を交換してから、内側の積分を変数変換する」というものだが、「公式を証明せよ」という問題を期末試験に出題すると、積分順序を交換せずに、いきなり $x - y = z$ として、 x を z に変数変換して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) e^{-i\xi x} dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(y) e^{-i\xi(z+y)} dy \right) dz$$

という式変形をする人がいる。これはめっちゃくちゃなのだが、分かるだろうか？内側の積分の変数である y が、外側の積分の変数変換の式 $x - y = z$ に現れるのはおかしい。これは次項 7.5.2 の場合にやると分かりやすいかもしれない。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) g(y) e^{-inx} dy \right) dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(z) g(y) e^{-in(z+y)} dy \right) dz$$

のようになり、内側の積分変数が外側の積分の上端、下端に現れる。 ■

7.5.2 周期関数の“Fourier 変換” — Fourier 係数の場合

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を周期 2π の関数とすると、 $c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ ($n \in \mathbb{Z}$) を f の Fourier 係数と定義したが、これを (周期関数) f の“Fourier 変換”と呼ぶことにして、記号 $\mathcal{F}f$ あるいは \hat{f} で表すことにしよう (この記号は実際に良く使われている)。すなわち

$$\mathcal{F}f(n) = \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$\mathcal{F}f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ である。

周期 2π の関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f と g の畳み込み $f * g$ を

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める。 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 2π である。

実は

$$(7.21) \quad \mathcal{F}[f * g](n) = \mathcal{F}f(n) \mathcal{F}g(n).$$

証明 $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) g(y) dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) g(y) e^{-inx} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) e^{-inx} dx \right) g(y) dy.\end{aligned}$$

右辺の () 内の積分を変数変換する。 $u = x - y$ とおくと、 $dx = du$, $x = -\pi$ のとき $u = -\pi - y$, $x = \pi$ のとき $u = \pi - y$, $x = u + y$, $e^{-inx} = e^{-in(u+y)} = e^{-inu}e^{-iny}$ であるから、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx} dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-in(u+y)} du = e^{-iny} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-inu} du.$$

関数 $u \mapsto f(u)e^{-inu}$ は周期 2π であるから、 $[-\pi-y, \pi-y]$ での積分は $[-\pi, \pi]$ での積分に等しい。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-iny} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu} du \right) g(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu} du \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny} dy \\ &= \mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n). \blacksquare \end{aligned}$$

7.5.3 周期数列の “Fourier 変換” — 離散 Fourier 変換の場合

$N \in \mathbb{N}$ に対して $\omega := e^{2\pi i/N}$ とおく。周期 N の周期数列 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ に対して、 $C_n := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-nj} f_j$ ($n \in \mathbb{Z}$) を $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ の離散 Fourier 係数と定義したが、これを周期数列の “Fourier 変換” と呼ぶことにしよう。

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を周期 N の関数 (周期 N の周期数列) とするとき、

$$\mathcal{F}f(n) = \hat{f}(n) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定まる $\mathcal{F}f$ を、(周期数列) f の “Fourier 変換” と呼ぶ。 $\mathcal{F}f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 N である。

周期 N の関数 (周期 N の周期数列) $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f と g の畳み込み $f * g$ を

$$f * g(n) := \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める。 $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 N の関数である。

実は

$$(7.22) \quad \mathcal{F}[f * g](n) = N\mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n).$$

証明 $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k) \right) \omega^{-nj} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\omega^{-nj} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj} \right) g(k). \end{aligned}$$

右辺の () 内の \sum を変数 (添字) 変換する。 $l = j - k$ とおくと、 $j = 0$ のとき $l = -k$, $j = N - 1$ のとき $l = N - 1 - k$, $j = l + k$, $\omega^{-nj} = \omega^{-in(\ell+k)} = \omega^{-nl}\omega^{-nk}$ であるから、

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj} = \sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\omega^{-nk} = \omega^{-nk} \sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}.$$

数列 $l \mapsto f(\ell)e^{-n\ell}$ は周期 N の周期数列であるから、 $l = -k, -k + 1, \dots, N - 1 - k$ に対する和は $l = 0, 1, \dots, N - 1$ に対する和に等しい。

$$\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell} = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\omega^{-nk} \sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell} \right) g(k) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell} \sum_{k=0}^{N-1} g(k)\omega^{-nk} \\ &= N\mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n). \blacksquare \end{aligned}$$

7.5.4 数列の “Fourier 変換” — 離散時間 Fourier 変換の場合

数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対して、 $X(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-in\omega}$ ($\omega \in \mathbb{R}$) を $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の離散時間 Fourier 変換と定義したが、これを数列の “Fourier 変換” と呼ぶことにしよう。

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\xi} \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

で定まる $\mathcal{F}f = \hat{f}$ を (数列) f の “Fourier 変換” と呼ぶ。 $\mathcal{F}f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 2π である。

$f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f と g の畳み込み $f * g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f * g(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める。

実は

$$(7.23) \quad \mathcal{F}[f * g](\xi) = \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi).$$

証明 $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \right) e^{-in\xi} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\xi} \right) g(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(\ell)e^{-i\ell\xi} e^{-ik\xi} \right) g(k) \\ &= \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(\ell)e^{-i\ell\xi} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\xi} \right) \\ &= \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi). \blacksquare \end{aligned}$$

7.5.5 (おまけ) 共役 Fourier 変換

共役 Fourier 変換についても

$$\mathcal{F}^*[f * g] = \text{定数 } \mathcal{F}^* f \mathcal{F}^* g$$

が成り立つ。

以下は読まずに飛ばしても構わないであろう。

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の Fourier 変換

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

に対応する共役 Fourier 変換は、関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{F}^*g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定義される \mathcal{F}^*g である。これについては

$$(7.24) \quad \mathcal{F}^*[f * g](x) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^*f(x) \mathcal{F}^*g(x)$$

が成り立つ。本質的に (7.20) と同じである。

周期 2π の周期関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の Fourier 変換 (Fourier 係数)

$$\mathcal{F}f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx$$

に対応する共役 Fourier 変換は、数列 $g = \{g(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対して

$$\mathcal{F}^*g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定義される \mathcal{F}^*g である。これについては

$$(7.25) \quad \mathcal{F}^*[f * g](x) = \mathcal{F}^*f(x) \mathcal{F}^*g(x)$$

が成り立つ。本質的に、離散時間 Fourier 変換についての公式 (7.23) $\mathcal{F}[f * g](\xi) = \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}g(\xi)$ と同じである。

周期 N の周期数列 $f = \{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の Fourier 変換 (離散 Fourier 変換)

$$\mathcal{F}f(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\omega^{-nj}$$

に対応する共役 Fourier 変換は、周期数列 $g = \{g(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対して

$$(7.26) \quad \mathcal{F}^*g(j) := \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\omega^{nj} \quad (j \in \mathbb{Z})$$

で定義される \mathcal{F}^*g である。これについては

$$(7.27) \quad \mathcal{F}^*[f * g] = \mathcal{F}^*f \mathcal{F}^*g$$

が成り立つ。本質的に、離散 Fourier 変換についての公式 (7.22) $\mathcal{F}[f * g](n) = N \mathcal{F}f(n) \mathcal{F}g(n)$ と同じである。

数列 $f = \{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の Fourier 変換 (離散時間 Fourier 変換)

$$\mathcal{F}f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}$$

に対応する共役 Fourier 変換は、周期 2π の関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{F}^*g(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{inx} dx$$

で定義される \mathcal{F}^*g である。これについては

$$\mathcal{F}^*[f * g] = \mathcal{F}^*f\mathcal{F}^*g$$

が成り立つ。本質的に、Fourier 係数についての公式 (7.21) $\mathcal{F}^*[f * g](n) = \mathcal{F}^*f(n)\mathcal{F}^*g(n)$ と同じである。

7.6 微分との関係

(準備中 — 講義したのだけれど、そのメモの内容をここに書くのをさぼっています。すみません。)

$$\frac{d}{dx}(f * g) = \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx}.$$

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

に対して積分記号下の微分ができるならば、

$$\frac{d}{dx}(f * g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x-y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-y)g(y) dy = (f') * g(x).$$

第8章 デジタル・フィルター

信号処理で重要な役割を果たすデジタル・フィルターについて説明する。

記号の確認

整数全体の集合を \mathbb{Z} で表す。自然数全体の集合を \mathbb{N} と表す。

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

集合 A から集合 B への写像全体の集合を B^A と表す (割と良く使われる記号)。

8.1 離散信号

複素数列 $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とは、 \mathbb{N} から \mathbb{C} への (1つの) 写像である (つまり、 a_n は $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ による $n \in \mathbb{N}$ の像 $a(n)$ である、ということ) とみなすと、 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ は複素数列の全体の集合である。

同様に、添字が整数全体を動く (負の整数の添字も許した) 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の全体は $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ である。
 $\mathcal{S} := \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ とおく (これはここだけの記号で、signal 全体の集合という気持ちで文字を選んだ)。

(8.1) $\mathcal{S} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ = 整数を添え字とする複素数列の全体の集合。

(\mathcal{S} は \mathcal{S} の calligraphy フォントである。)

$x, y \in \mathcal{S}, c \in \mathbb{C}$ に対して、

$$(x + y)(n) := x(n) + y(n), \quad (cx)(n) := cx(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で $x + y, cx \in \mathcal{S}$ を定めると、 \mathcal{S} は \mathbb{C} 上の無限次元の線型空間 (ベクトル空間) である。

\mathcal{S} の要素のことを**離散信号** (a discrete signal, a discrete-time signal) と呼ぶことにする。

8.2 畳込みと単位インパルス

$x, y \in \mathcal{S}$ に対して、 x と y の**畳み込み** $x * y \in \mathcal{S}$ を

$$x * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定めた (級数が収束すると仮定して)。

問 1. $x * y = y * x$, $(x * y) * z = x * (y * z)$ が成り立つことを示せ。

$\delta = \{\delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$ を

$$(8.2) \quad \delta_n := \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \end{cases} \quad (\delta_{n0} \text{ は Kronecker のデルタ})$$

で定める。この δ を **単位インパルス** (the unit impulse) と呼ぶ。

任意の $x \in \mathcal{S}$ に対して

$$(8.3) \quad x * \delta = \delta * x = x$$

が成り立つ。実際、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\delta * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{n-k,0}x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nk}x(k) = x(n)$$

が成り立つので $\delta * x = x$ 。

8.3 線形定常フィルター (LTIフィルター)

\mathcal{S} から \mathcal{S} への写像を **デジタル・フィルター** と呼ぶ。

デジタル・フィルター $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ による $x \in \mathcal{S}$ の像を $F[x]$ と書くことにする¹。

デジタル・フィルター $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ が **線形** であるとは、

$$(\forall x, y \in \mathcal{S}) \quad F[x + y] = F[x] + F[y], \quad (\forall x \in \mathcal{S})(c \in \mathbb{C}) \quad F[cx] = cF[x]$$

が成り立つことをいう。

$x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$y(n) := x_{n-k} = x(n-k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定まる $y \in \mathcal{S}$ のことを $x(\cdot - k)$ あるいは $\{x_{n-k}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と書くことにする。要するに k だけ、添字 (時刻) をずらしたものである。

線形デジタル・フィルター $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ が、**定常** (^{じふへん}時不変, time-invariant) であるとは、 $\forall x \in \mathcal{S}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$(8.4) \quad F[x(\cdot - k)] = F[x](\cdot - k)$$

が成り立つこと、言い換えると $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} := F[\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}]$ とおくと

$$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad F[\{x_{n-k}\}] = \{y_{n-k}\}$$

が成り立つことをいう。

(分かってもらえるか心配だ。時間をずらす写像 $S_k[x] = x(\cdot - k)$ を導入して、 $F \circ S_k = S_k \circ F$ と書くほうが紛れがなくて良いかな?)

命題 8.3.1 線形定常なデジタル・フィルター $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ に対して、 $h := F[\delta]$ とおくと、

$$\forall x \in \mathcal{S} \quad F[x] = h * x.$$

線形定常なデジタル・フィルター F に対して、 $h := F[\delta]$ を F の **単位インパルス応答** (the unit impulse response) と呼ぶ。

¹ x 自身が写像で、値を $x(n)$ と書くので、括弧を区別してみる、ということであろう。

証明 上で一度見たように、 $\forall x \in \mathcal{S}$ に対して

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

であるから、

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(\cdot - k).$$

F の線形性と定常性から

$$\begin{aligned} F[x] &= F \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(\cdot - k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)F[\delta(\cdot - k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)F[\delta](\cdot - k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(\cdot - k). \end{aligned}$$

これは

$$F[x](n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = h * x(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を意味しているので $F[x] = h * x$. ■

余談 8.3.2 (基本解) 離散時間信号以外の信号 (関数) についても、上と同様のことが成り立つ。詳しいことは省略するが、キーワードを使って、標語的に書いておくと、

微分方程式の問題の解を対応させる写像に対して、上の単位インパルス応答に相当するものを微分方程式の基本解と呼ぶ。任意の f に対する微分方程式の解は、基本解と f の畳みに等しい。■

8.4 FIR フィルター

線形定常なデジタル・フィルター F が **FIR フィルター** (有限インパルス応答, a finite impulse response filter) であるとは、 F の単位インパルス応答 $h := F[\delta]$ が、十分大きな自然数 J に対して

$$(\#) \quad (\forall n \in \mathbb{Z} : n < 0 \vee n > J) \quad h_n = 0$$

を満たすことをいう。このとき h_0, h_1, \dots, h_J (あらく言つて 0 でない部分) を F の**フィルター係数**と呼ぶ。

このとき、 $F[x] = x * h$ であるから、

$$F[x](n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h_k = \sum_{k=0}^J x(n-k)h_k \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ。

8.5 音声信号の高音部をカットする実験

Mathematica のノートブック `piano-cutoff.nb`² を用意した。

²<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2017/piano-cutoff.nb>

ピアノでドミソの和音を鳴らした音を録音した“piano-do-mi-so.wav”を読み込み、それを離散 Fourier 変換して、周波数があるところから上の係数を 0 にしてから、逆離散 Fourier 変換して、音を再生して聴き比べてみる、というプログラムである。

piano-cutoff.nb

```
snd = Import["http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/piano-do-mi-so.wav", "Sound"]
{left, right} = snd[[1, 1]];
sr = snd[[1, 2]]

take[tbl_, t1_, t2_] := Take[tbl, {Floor[t1*sr], Floor[t2*sr]}]
take1[tbl_, t_] := Take[tbl, {Floor[t*sr], Floor[t*sr] + sr - 1}]

g = ListPlot[tbl = take1[left, 1.0], PlotRange -> All]

ListPlay[tbl]
ListPlay[tbl, SampleRate -> sr]
ListPlay[tbl, SampleRate -> sr/2]
ListPlay[tbl, SampleRate -> sr*2]
ListPlay[tbl, SampleRate -> Floor[sr*1.5]]

c = Fourier[tbl, FourierParameters -> {-1, -1}];
g = ListPlot[Abs[c], Joined -> True, PlotRange -> All]

cutoff[f_] :=
  Join[Table[1, {n, f + 1}], Table[0, {n, sr - 2*f - 1}],
  Table[1, {n, f}]];

440.0*2^(-{9, 5, 2}/12)

c2 = c*cutoff[500];

g3 = ListPlot[Abs[c2], Joined -> True, PlotRange -> All]

Export["do-mi-so-cutoff500.eps", g3]

tbl2 = Re[InverseFourier[c2, FourierParameters -> {-1, -1}]];

ListPlay[tbl2, SampleRate -> sr]

do = Re[InverseFourier[c*cutoff[300], FourierParameters -> {-1, -1}]];
domi = Re[InverseFourier[c*cutoff[360], FourierParameters -> {-1, -1}]];
domiso = Re[InverseFourier[c*cutoff[450], FourierParameters -> {-1, -1}]];
domiso2 = Re[InverseFourier[c*cutoff[900], FourierParameters -> {-1, -1}]];
original = Re[InverseFourier[c, FourierParameters -> {-1, -1}]];

ListPlay[do, SampleRate -> sr]
ListPlay[domi, SampleRate -> sr]
ListPlay[domiso, SampleRate -> sr]
ListPlay[domiso2, SampleRate -> sr]
ListPlay[original, SampleRate -> sr]
```

ダウンロードして、実行してみよう。

Safari でアクセスする場合は、この講義の WWW サイト <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2019/> を開き、piano-cutoff.nb³ を Ctrl+クリックして、「リンク先のファイルを別名でダウンロード」を選択し、自分の選ぶ場所に保存し、Mathematica で開く。

³<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2019/piano-cutoff.nb>

8.5.1 最初は以前やったことの復習

上から順に一つ一つ `Shift+Enter` で評価するか、`[評価] → [ノートブックを評価]` で一気に全体を評価する。

```
snd = Import["http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/piano-do-mi-so.wav", "Sound"]
```

ピアノでド・ミ・ソの和音を弾いたのを録音したファイル `piano-do-mi-so.wav` をインポートし、変数 `snd` に代入する。

```
{left, right} = snd[[1, 1]];  
sr = snd[[1, 2]]
```

音声の PCM データの数値リストを変数 `left`, `right` に代入する (それぞれ左チャンネル、右チャンネル)。またサンプリング周波数を変数 `sr` に代入する (値は 44100 Hz である)。

```
take[tbl_, t1_, t2_] := Take[tbl, {Floor[t1*sr], Floor[t2*sr]}]  
take1[tbl_, t_] := Take[tbl, {Floor[t*sr], Floor[t*sr] + sr - 1}]
```

`t1` 秒後から `t2` 秒後までのデータを取り出す関数 `take[]` (今回は使わない) と、`t` 秒後から 1 秒分のデータを取り出す関数 `take1[]` を定義する。

(`Take[]` はリストの指定範囲を抜き出す関数、`Floor[]` は小数データを切り捨てで整数にする関数である。)

```
ListPlot[tbl = take1[left, 1.0], PlotRange -> All]
```

最初から 1.0 秒のところから 1 秒分の左チャンネルの信号データを変数 `tbl` に代入し、かつプロットしてみる。

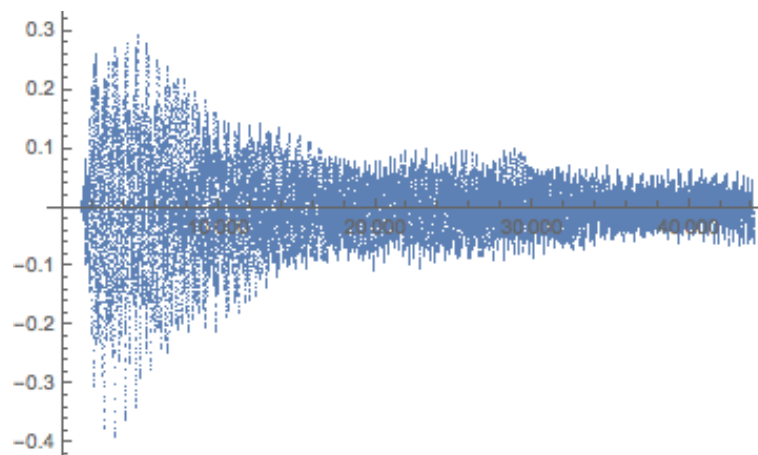


図 8.1: ピアノでド・ミ・ソの和音を弾く

8.5.2 サンプリング周波数を変えて再生

```
ListPlay[tbl, SampleRate -> sr]
```


数値データは `ListPlay[]` 関数で再生 (音を出力) することが可能である。その際に、サンプリング周波数の指定が必要である。(`snd` はサンプリング周波数のデータを含んでいるが、 `tbl` は信号の数値データのみしか含んでいないので、別途指定する必要がある。)

`SampleRate -> sr` とすれば、正しく再生できるが、それを変えると本来の音の高さとは違う高さで再生される。

- 半分にすると、1 オクターブ低い音で再生される。再生時間は2倍になる。
- 2倍にすると、1 オクターブ高い音で再生される。再生時間は1/2になる。

サンプリング周波数を変えて遊ぶ

```
ListPlay[tbl, SampleRate -> sr/2]
```

```
ListPlay[tbl, SampleRate -> Floor[1.5*sr]]
```

(周波数を1.5倍にする。Mathematicaでは、サンプリング周波数は整数で指定する必要があるので、`Floor[]` を用いて整数にしている。)

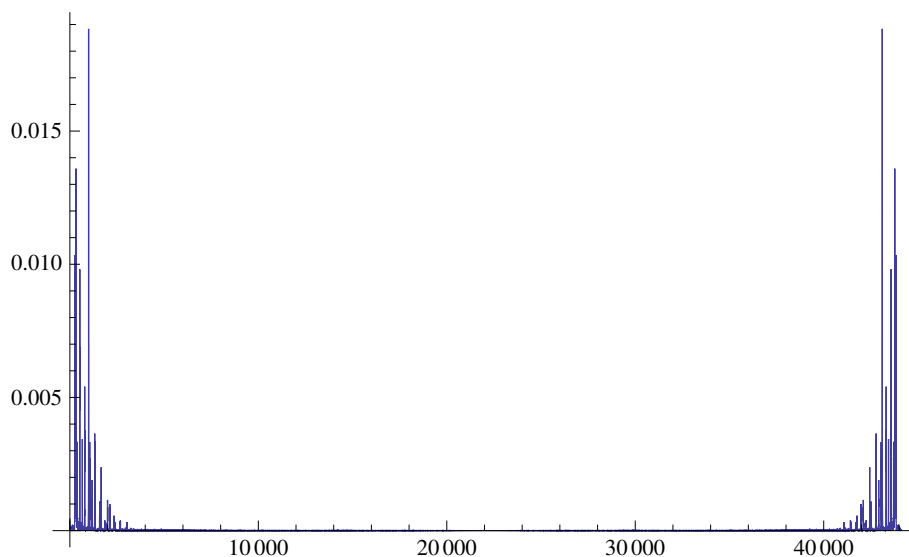
8.5.3 離散 Fourier 変換してスペクトルを表示

(ここは以前やったことの軽い復習)

離散 Fourier 変換してスペクトルを表示

```
c = Fourier[tbl, FourierParameters -> {-1, -1}];
```

```
ListPlot[Abs[c], Joined -> True, PlotRange -> All]
```



離散 Fourier 変換して、離散 Fourier 係数 C_n をプロットする。変数 `c` は数値のリストで `c[[i]]` が C_{i-1} である ($1 \leq i \leq N = \text{sr} = 44100$)。

1 秒分の信号を離散 Fourier 変換 (Fourier 係数を近似計算) したので、 c_n, c_{-n} は周波数 n Hz の成分である。対応する離散 Fourier 係数 C_n, C_{N-n} は、それぞれ `c[[n+1]]`, `c[[N-n+1]]` に記憶されている。

ピアノのド・ミ・ソ, 3つの鍵盤を叩いて出した音であるが、ピークは3つだけでなくたくさん出ていることが分かる。これは (もちろん) 倍音成分を含んでいるためである。

8.5.4 高い音をカットしてみる

基音が 440 Hz のラのすぐ下にあるド・ミ・ソの基音の高さは、 $440 \times 2^{-9/12}$, $440 \times 2^{-5/12}$, $440 \times 2^{-2/12}$ Hz である。

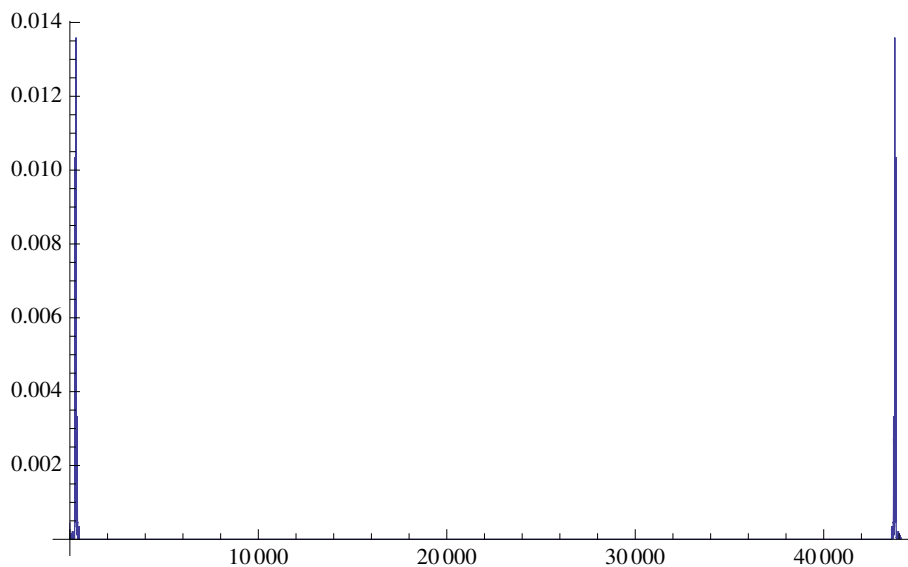
```
440.0*2^(-{9, 5, 2}/12)
```

の結果は {261.626, 329.628, 391.995}, つまりド、ミ、ソの周波数は 261.6, 329.6, 392.0 Hz である。

```
cutoff[f_] := Join[Table[1, {n, f + 1}], Table[0, {n, sr - 2*f - 1}],
                  Table[1, {n, f}]];
c2=c*cutoff[500];
ListPlot[Abs[c2], Joined -> True, PlotRange -> All]
```

cutoff[] は、 f Hz より高い周波数成分はカットするための補助関数である (先頭に $f + 1$ 個の 1, 末尾に f 個の 1, その他はすべて 0 という数値のリストを返す)。

c2 は 501 Hz 以上の成分を含んでいない。ド・ミ・ソの基音の部分だけしか含んでいない (2 倍音以上はカットしてある)。



逆離散 Fourier 変換して (音声信号に戻して) 再生

```
tb12 = Re[InverseFourier[c2, FourierParameters -> {-1, -1}]];
ListPlay[tb12, SampleRate -> sr]
```

501 Hz 以上をカットした音を再生して聴いてみる。(注意 以前の Mathematica では、実部を取るために Re[] を施す必要がなかったが、最近の Mathematica では、tb12 に少しでも 0 でない虚部があると、ListPlay[tb12, ...] が実行されなかった。)

その他、カットする周波数を色々変えてやってみる。

```

do = Re[InverseFourier[c*cutoff[300], FourierParameters -> {-1, -1}]];

domi = Re[InverseFourier[c*cutoff[360], FourierParameters -> {-1, -1}]];

domiso = Re[InverseFourier[c*cutoff[450], FourierParameters -> {-1, -1}]];

domiso2 = Re[InverseFourier[c*cutoff[900], FourierParameters -> {-1, -1}]];

original = Re[InverseFourier[c, FourierParameters -> {-1, -1}]];

ListPlay[do, SampleRate -> sr]
ListPlay[domi, SampleRate -> sr]
ListPlay[domiso, SampleRate -> sr]
ListPlay[domiso2, SampleRate -> sr]
ListPlay[original, SampleRate -> sr]

```

色々聴き比べてみてどうだろうか。

do はドの基音だけなのでドと聞こえる？もっとも倍音が含まれていないので、あまりピアノらしくない。

試しにやってみる？ 指定した範囲の周波数成分を抜き出すことによって、ミの音だけを聴くためにはどうすれば良いか。

やり方と、その説明、そうして出来たミの音のファイルの3点をまとめよ。

8.6 デジタル・フィルターを作る

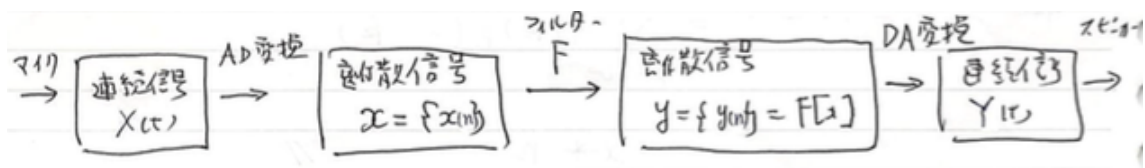
前回、デジタル・フィルターの説明を始めて、STI フィルターの、任意入力に対する出力が、単位インパルス応答との畳み込みで表される、という定理を紹介した。

少し具体的な話をする (今年はプログラムを示そうと思っていたのだけど…)

8.6.1 全体の処理の流れ: サンプリングしてからフィルターに入力

1次元の連続信号 (アナログ信号) をサンプリングして離散信号 (デジタル信号) を求め (ある種の AD 変換をしたことになる)、線形定常なデジタル・フィルター (LTI フィルター) F に入力して出力を得よう。

例えば音の場合、そうして得られた離散信号を今度は DA 変換して得たものを「聴いて」効果を確認められる。



$$\boxed{\text{連続信号 } X(t)} \rightarrow \boxed{\text{離散信号 } x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}} \rightarrow \boxed{\text{離散信号 } y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}} \rightarrow \boxed{\text{連続信号 } Y(t)}$$

サンプリング周期を T_s として

$$(8.5) \quad x_n = X(nT_s) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で $x = \{x_n\}$ を定める。

LTI フィルター F の単位インパルス応答 $h := F[\delta]$ を用いると、

$$(8.6) \quad y = F[x] = x * h.$$

すなわち

$$(8.7) \quad y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

8.6.2 正弦波をサンプリングすると等比数列が得られる

正弦波を入力したときの出力を調べてみよう。

なぜ？ (そのココロは) — 任意の信号は正弦波の重ね合わせで表せ、 F は線形であるから、正弦波を入力したときの出力を重ね合わせれば出力が得られる。(実際、任意の信号 $x(t)$ は $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\xi) e^{it\xi} d\xi$ と表せるので、 $x(t)$ は正弦波 $e^{it\xi}$ ($\xi \in \mathbb{R}$) の線形結合である、と言える。
 $x(t) = e^{i\Omega t}$ ($\Omega \in \mathbb{R}$) とする。

$$x_n = x(nT_s) = e^{i\Omega nT_s} = e^{in\omega} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

ただし

$$\omega := \Omega T_s.$$

$x_n = (e^{i\omega})^n$ であるから、 $x := \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は公比 $e^{i\omega}$ の等比数列である。

指数関数はサンプリングすると、等比数列になる。
(等比数列は離散版指数関数みたいなもの、まあ自然)

サンプリング定理によると、サンプリング周波数 T_s でまともに扱えるためには、

$$(8.8) \quad |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2}$$

が成り立っていなければならない。このとき $|\omega| < \pi$ である。

一般の Ω に対しては、 $\omega = \Omega T_s$ で定めた ω は $(-\pi, \pi)$ の範囲外に出てしまうことがあるが、 $\omega' \equiv \omega \pmod{2\pi}$, $\omega' \in (-\pi, \pi]$ となる ω' を取ることが出来る。この ω' を**正規化角周波数**と呼ぶ。

以下では ω' を取って単に ω で正規化角周波数を表す。つまり

$$(8.9) \quad \omega \equiv \Omega T_s \pmod{2\pi}, \quad \omega \in (-\pi, \pi].$$

このように ω を定義しても、やはり

$$(8.10) \quad x_n = e^{in\omega} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ。

また

$$(8.11) \quad f := \frac{\omega}{2\pi}$$

で定まる f を**正規化周波数**と呼ぶ。

値の範囲を $(-\pi, \pi]$ でなく $[0, 2\pi)$ に選ぶ場合もある。

一言メモ：しばしば「なんとか周波数」, 「なんとか角周波数」が出て来るが、いつも「なんとか周波数 $\times 2\pi =$ なんとか角周波数」である。

8.6.3 元の信号の周波数と正規化周波数の関係

正弦波をサンプリングして正規化(角)周波数を求めたが、元の(角)周波数との関係は？

(元の)(角)周波数 = 正規化(角)周波数 × サンプリング周波数.

元の正弦波の周波数 F , サンプリング周波数 F_s でサンプリングして作った離散信号での正規化周波数を f とすると、

$$2\pi f = \omega, \quad \omega = \Omega T_s, \quad \Omega = 2\pi F, \quad T_s = \frac{1}{F_s}$$

であるから、

$$f = \frac{F}{F_s}.$$

これから

$$(8.12) \quad F = F_s f,$$

$$(8.13) \quad \Omega = F_s \omega.$$

問 2. ある正弦波をサンプリング周波数 $F_s = 44100\text{Hz}$ でサンプリングしたら、得られた離散信号の正規化角周波数 $\omega = \frac{\pi}{10}$ であった。もとの正弦波の周波数 F を求めよ。

解 $\Omega = F_s \omega, \Omega = 2\pi F$ であるから、

$$F = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{F_s \omega}{2\pi} = \frac{44100\text{Hz}}{2\pi} \times \frac{\pi}{10} = 2205 \text{ Hz.} \blacksquare$$

8.6.4 離散化した正弦波をフィルターに入力すると — フィルターの周波数特性

デジタル・フィルター F が線形定常であるから、 $h := F[\delta]$ とおくと、任意の離散信号 x に対して

$$F[x] = x * h.$$

ゆえに $y := F[x]$ とおくと

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(n-k)\omega} h_k = e^{in\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h_k.$$

ゆえに

$$(8.14) \quad \hat{h}(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} h_k \quad (\omega \in [-\pi, \pi])$$

とおくと、これは実は h の離散時間フーリエ変換で、

$$(8.15) \quad y_n = e^{in\omega} \hat{h}(\omega) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

形は厳いかめしいが、出力信号 $y = \{y_n\}$ は (入力信号 x と同じような) 正弦波であり、角周波数は入力信号のそれと同じである。つまり、次のことが分かった。

正弦波を線形定常フィルターに入力すると、同じ周波数の正弦波が出力される。

$\hat{h}(\omega)$ は、“増幅率” とでも呼ぶべきものである。それは角周波数 ω の関数になっている。これをフィルター F の**周波数応答** (frequency response), **周波数特性** (frequency characteristic) と呼ぶ。

講義ではカットする？

信号処理のテキストでは、この周波数応答を、 h の z 変換を用いて表現してあるものが多い。一応紹介しておく。 $h = \{h_n\}$ の z 変換とは、

$$(8.16) \quad H(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h_k}{z^k} \quad (\text{Laurent 級数ですね})$$

で定義される複素関数 $H(z)$ で、これを用いると

$$(8.17) \quad \hat{h}(\omega) = H(e^{i\omega}).$$

$H(z)$ をフィルター F の**伝達関数** (transfer function) と呼ぶ。

関数論のテキストで、 z 変換を扱っているものに新井 [31] がある (ちょっと珍しい)。 ■

周波数応答の絶対値と偏角に名前がついている。

- $G(\omega) := |\hat{h}(\omega)| = |H(e^{i\omega})|$ を**利得** (gain) と呼ぶ。
- $\theta(\omega) := \arg \hat{h}(\omega) = \arg H(e^{i\omega})$ を**位相シフト** (phase shift) と呼ぶ。
(信号処理の本では、 \arg を \angle と書くことがある。)

8.6.5 ローパス・フィルター

低い音は通すが、高い音はカットする、いわゆるローパス・フィルターを作ってみよう。(§8.5 の真似をするフィルターを作る。)

最初は素朴に考える。 $F_e > 0$ として、 F_e 以下の周波数の信号はそのまま通すが、 F_e より高い周波数の信号は一切通さないことを目標にしてみる。

その周波数 F_e に対応する正規化角周波数 ω_e は

$$\omega_e := 2\pi \frac{F_e}{F_s}.$$

そこで周波数特性が

$$(8.18) \quad \hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_e) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e) \end{cases}$$

となるようなフィルターを求めよう。離散時間 Fourier 変換の反転公式

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\omega) e^{in\omega} d\omega \quad (n \in \mathbb{Z})$$

から

$$(8.19) \quad h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e}^{\omega_e} e^{in\omega} d\omega = \frac{\omega_e}{\pi} \text{sinc } n\omega_e.$$

ここで sinc は次式で定義される非正規化 sinc である⁴。

$$\text{sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

⁴Mathematica の `Sinc[]` もこの非正規化 `Sinc` である。

問3. (8.19) を確かめよ。(ヒント: $\int_{-a}^a e^{ibx} dx = 2a \operatorname{sinc}(ab)$ が成り立つ。)

念のため: つまり、このように h_n を定めると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in\omega} = \hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_e) \\ 0 & (|\omega| > \omega_e) \end{cases}$$

が成り立ち、

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k$$

で y_n を計算すると、 F_e より低い周波数の信号はそのまま通し、 F_e より高い周波数の信号は完璧にシャットアウトする。

しかし、フィルターをコンピューター上に実現するとき、無限級数の計算をすることは現実的ではない。何らかの形で有限項で打ち切ることになるだろう。

そこでまず素朴に単純な打ち切りを考えてみる。 $J \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ を $\sum_{k=-J/2}^{J/2}$ で置き換える。

これは F に“近い”が、 F とは異なるデジタル・フィルター F^J を考えていることになる:

$$F^J[x](n) = \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{n-k} h_k \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

以上は $\{h_n\}$ の代わりに

$$h_n^J := \begin{cases} h_n & (|n| \leq J/2) \\ 0 & (|n| > J/2). \end{cases}$$

で定義される $\{h_n^J\}$ を用いた、ということである。

この F^J の周波数特性は

$$\hat{h}^J(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^J e^{-in\omega} = \sum_{n=-J/2}^{J/2} h_n e^{-in\omega}$$

である。この $\hat{h}^J(\omega)$ のグラフを描いてみよう。

Mathematica で $\hat{h}^J(\omega)$ のグラフを描く

```
omega=0.5
h[n_]:=omega/Pi Sinc[n omega]
draw[J_]:=Plot[Sum[h[n]Exp[-I n t],{n,-J/2,J/2}],{t,-Pi,Pi},
  PlotRange->All]
draw[100]
```

目標は

```
Plot[If[Abs[x]<omega,1,0],{x,-Pi,Pi}]
```

(結果は図 8.2)

何か見覚えがあるような…本質的には以前見たものと同じで、不連続関数の Fourier 級数の部分和は、Fourier 級数の和と大きな隔たりがある、という Gibbs の現象である!

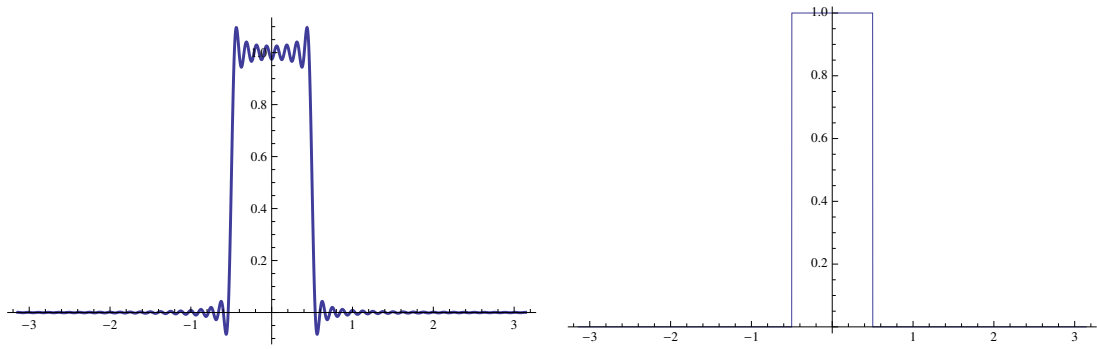


図 8.2: $\hat{h}_J(\omega)$ ($J = 100$), それとこうなつて欲しい形 $\hat{h}(\omega)$

条件 (8.18) はある種の理想であるが、不連続関数であるから、無限級数の計算が出来ない限り、かえって良くないことが起こる、ということである。

それでどうするかというと、信号処理では、**windowing** (窓をかける) というテクニックを用いて対処する。 h_n に**窓 (関数)** と呼ばれる (遠方で段階的に 0 に近づく) 関数をかけて、0 でない項を有限個のみにする。窓関数には色々なものがあるが、ここではシンプルな **hann 窓** を用いてみる。それは

$$w(x) := \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

で定義される関数である。

hann 窓ってどんな関数？

```
w[x_] := (1 - Cos[2Pi x])/2
g = Plot[w[x], {x, 0, 1}]
```

(結果は図 8.3)

この w を用いて、

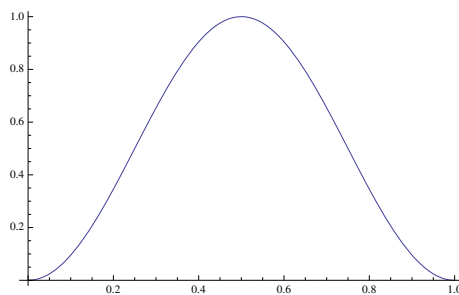


図 8.3: ハン窓 w のグラフ

$$h_n^{J,w} := \begin{cases} w(n/J - 1/2)h_n & (|n| \leq J/2) \\ 0 & (|n| > J/2) \end{cases}$$

で $\{h_n^{J,w}\}$ を定め、 $\{h_n\}$ の代わりに $\{h_n^{J,w}\}$ を用いることにする。

これは F に近いが、 F とは異なるデジタル・フィルター $F^{J,w}$ を用いることになる。その周波数特性は

$$\hat{h}^{J,w}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^{J,w} e^{-in\omega} = \sum_{n=-J/2}^{J/2} h_n^{J,w} e^{-in\omega}.$$

このグラフを図示してみよう。


```
w[x_]:= (1-Cos[2 Pi x])/2
draw2[J_]:=Plot[Sum[w[n/J-1/2]h[n]Exp[-I n t],{n,-J/2,J/2}],{t,-Pi,Pi},
PlotRange->All]
```

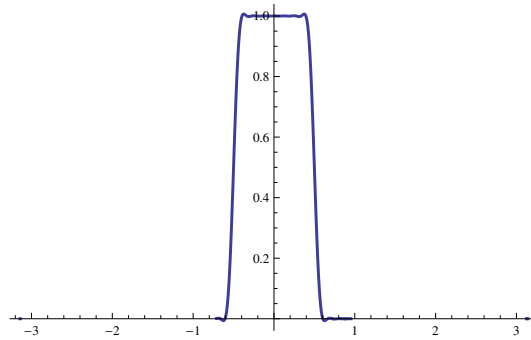


図 8.4: 窓関数あり $\hat{h}^{J,w}(\omega)$

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k^{J,w} = \sum_{k=-J/2}^{J/2} x_{n-k} h_k^{J,w}.$$

y_n の計算に $x_{n-J/2}, x_{n-J/2+1}, \dots, x_{n+J/2}$ が必要になることに注意しよう。

フィルター $F^J, F^{J,w}$ は FIR フィルター (有限インパルス応答フィルター) と考えて良い。

第9章 Fourier変換の微分方程式への応用

微分方程式への広い意味の Fourier 変換の応用は、非常に豊富にあるが、収束の問題をきちんと議論するのがやや難しい。それでこの講義では、信号処理を主な応用とした(その場合、少なくとも入口の部分の説明はそれほど難しくなく¹⁾)。しかし、微分方程式への応用に興味を持つのは自然であろうから、比較的簡単な例、有名な例をいくつか集めて見た。授業でも、そのうちの1つ2つを紹介するつもりである。

数学的に厳密な議論は難しいので、その点は目をつぶって欲しい。とりあえず解を表示する式を発見するための計算くらいに考えると良い。

9.1 まず簡単な例 — 解が畳み込みが表せる仕組みを見る

次の例は、やや人工的なところがあるが、Fourier 変換を用いて微分方程式を解くときのエッセンスが含まれている。

例 9.1.1 (\mathbb{R} における常微分方程式の境界値問題) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k > 0$ が与えられたとき、

$$(9.1) \quad -u''(x) + k^2 u(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(9.2) \quad u(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

を満たす u を求めよ。

微分方程式 (9.1) の両辺を Fourier 変換する。まず線形性から

$$-\mathcal{F}[u''](\xi) + k^2 \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

公式 (2.26)²⁾ より

$$-(i\xi)^2 \hat{u}(\xi) + k^2 \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

ゆえに

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi^2 + k^2}.$$

ところで定理 2.3.1 から、

$$g(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} e^{-k|x|}$$

とおくとき

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + k^2}$$

である。

ゆえに

$$\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi).$$

¹これは信号処理が微分方程式よりやさしいということではなく、標準化して離散信号にしてしまった後のことしか議論しにくい場合が多い、ということかもしれない。

² $\mathcal{F}[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}u(\xi)$.

公式 (7.20)³ から、右辺は $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g * f$ のフーリエ変換であるから

$$\mathcal{F}u = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g * f\right).$$

両辺の逆 Fourier 変換を取ると

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g * f.$$

すなわち

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y) dy = \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|x-y|}f(y) dy. \quad \blacksquare$$

注意 9.1.2 ところで (9.2) という条件は、一体どこで使ったのだろうか？注意深く見直すと、上の議論では、 f, u'', u の Fourier 変換が存在することを仮定していることに気づく。関数が遠方で十分速く減衰すれば Fourier 変換が存在する

まとめ 振り返ると

$$\widehat{u}(\xi) = G(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

という形の式が導かれたときに

$$\widehat{g}(\xi) = G(\xi)$$

となる g を求めたわけであるが、 g は要するに G の逆 Fourier 変換に他ならない。このとき

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g * f$$

が成り立つ、というのがあらすじである。以上をまとめるておこう。

定理 9.1.3 (Fourier 変換が積ならば畳み込みで解ける) $\widehat{u} = G\widehat{f}$ ならば、 $g := \mathcal{F}^*G$ とおくと、

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g * f.$$

TODO 「発見的考察」という言葉を説明したい。

9.2 半平面における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

(ここで紹介する結果は結構有名で、「そういえば(関数論 or 偏微分方程式論で)習った」と思い出す数学者は多いと想像するけれど、学部2年生には、Laplace 方程式からして、なじみが薄いかもしれない。講義では不採用かな?)

$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 $\bar{\Omega}$ で定義された関数 u で

$$(9.3) \quad u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega)$$

$$(9.4) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすものを求めよ。

これは Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題と呼ばれる問題であり、以下の結果も有名である。

³ $\mathcal{F}[f * g](\xi) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi).$

$u(x, y)$ の y を任意に固定して、 x だけの関数 ($x \mapsto u(x, y)$) とみて Fourier 変換したものを、 $\hat{u}(\xi, y)$ と表すことにする:

$$\hat{u}(\xi, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-ix\xi} dx.$$

y を任意に固定して、(9.3), (9.4) を x について Fourier 変換すると

$$(9.5) \quad (i\xi)^2 \hat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(\xi, y) = 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

$$(9.6) \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

ただし、公式 (2.26) と、微分と積分の順序交換

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) e^{-ix\xi} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-ix\xi} dx$$

が成り立つと仮定した。

(9.5) は

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(\xi, y) = \xi^2 \hat{u}(\xi, y)$$

と書き直せる。今度は ξ を固定すると、変数 y についての関数の常微分方程式とみなせる。 $\xi \neq 0$ であれば

$$\hat{u}(\xi, y) = Ae^{\xi y} + Be^{-\xi y} \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

$\xi > 0$ のときは、積分可能であるために $A = 0$. すると初期条件から $B = \hat{f}(\xi)$. ゆえに

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi y}.$$

同様に $\xi < 0$ のときは、

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{\xi y}.$$

まとめると

$$(9.7) \quad \hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

ゆえに、定理 9.1.3 から、 $e^{-|\xi|y}$ の共役 Fourier 変換を $g(x, y)$ とすると

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(\cdot, y) * f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t, y) f(t) dt.$$

定理 2.3.1 で示したように、「 $a > 0$ のとき $\mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2+a^2} \right] (\xi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\xi|}$ 」が成り立つので、

$$g(x, y) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

とおくと、

$$\hat{g}(\xi, y) = e^{-|\xi|y}$$

が成り立つ。

ゆえに

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt. \blacksquare$$

9.3 熱方程式の初期値問題

(やはり、現象数理学科の2年生に説明するのならば、これが良いだろうか?)

熱 (伝導) 方程式の初期値問題: f が与えられたとき、次式を満たす u を求めよ。

$$(9.8) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$(9.9) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

— 熱的に絶縁された、無限に長い一様な棒の熱伝導のモデルである (単位は適当に選ぶとする)。
 $u(x, t)$ は時刻 t , 位置 x での棒の温度、 f は初期温度分布である。

$u(x, t)$ を x について Fourier 変換したものを $\hat{u}(\xi, t)$ とする:

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}[u(x, t)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}, t > 0).$$

$u_t = u_{xx}$ の両辺を Fourier 変換しよう。

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x, t)](\xi) = (i\xi)^2 \mathcal{F}[u(x, t)](\xi) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t),$$

$$\mathcal{F}[u_t(x, t)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-ix\xi} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t)$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t).$$

これは常微分方程式であるから容易に解ける。

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-t\xi^2} \hat{u}(\xi, 0) = e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi).$$

(つまり $\frac{dy}{dx} = ay, y(0) = y_0 \Rightarrow y = y_0 e^{ax}$ ということ。)

すでに紹介した公式 $\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ から $\mathcal{F}^*[e^{-a\xi^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$ が得られるので

$$G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^*[e^{-t\xi^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

とおくと

$$\hat{G}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\xi^2}.$$

ゆえに

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) f(y) dy.$$

まとめると

$$(9.10) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0), \quad G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

これが熱方程式の初期値問題 (9.8), (9.9) の解の公式である。適当な仮定をおいたとき、この u が確かに (9.8), (9.9) の解であること、また解の一意性が成り立つことが証明できる (そのうち付録に収める)。

G は熱方程式の初期値問題の**基本解** (the fundamental solution to the heat equation), **Green 関数** (Green function), あるいは**熱核** (heat kernel) と呼ばれる。非常に有名な関数である。

以下、 G の性質をいくつか述べる。

任意の $t > 0$ に対して

$$G(x, t) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) dx = 1$$

が成り立つ。 G は、平均 0、分散 $2t$ の正規分布の確率密度関数に等しい⁴。 $t (> 0)$ を固定したとき、 $x \mapsto G(x, t)$ のグラフは $x = 0$ で山になっている、釣鐘状の曲線で、 x 軸との間で囲まれた部分の面積が 1 になっている (実は、温度の積分は熱量で、初期値が持っていた熱量が保存されることを意味する)。

分散が時間に比例して増加することに注意しよう。時間の経過とともに、裾が広がっていくわけです。

t を固定して、 $x \mapsto G(x, t)$ のグラフを描いて、時間の経過とともにそれがどう変化するか、イメージを頭の中に焼き付けること。

色々なソフトウェアでグラフが描けるが、ここでは Mathematica と gnuplot を用いた例を示す。

Mathematica で熱方程式の基本解を見る

```
G[x_, t_] := Exp[-x^2/(4 t)]/(2*sqrt[Pi*t])  
  
g=Plot[Table[G[x, t], {t, 0.1, 1.0, 0.1}], {x, -5, 5}, PlotRange -> All]  
  
Manipulate[Plot[G[x, t], {x, -5, 5}, PlotRange -> {0, 3}], {t, 0.01, 2}]
```

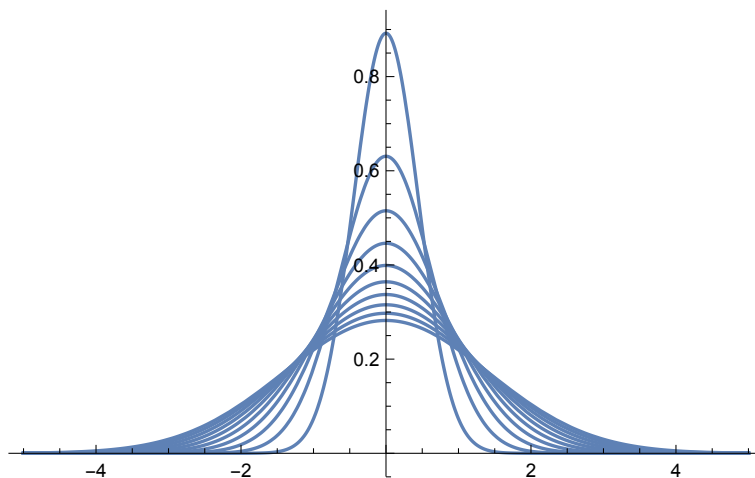


図 9.1: 熱方程式の基本解 $G(\cdot, t)$ ($t = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$)

gnuplot でアニメーションを作ってみよう。まず

anim.gp

```
s=sprintf("Heat kernel: t=%5.2f", t)  
plot [-10:10] [0:1] G(x,t) title s  
t=t+dt  
if (t<Tmax) reread
```

のようなファイル “anim.gp” を用意しておいて (emacs や Atom のようなテキスト・エディターで作れば良い)、gnuplot で

⁴平均 m 、分散 σ^2 の正規分布 $N(m; \sigma^2)$ の確率密度関数は、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ である。

```
gnuplot> G(x,t)=exp(-x*x/(4*t))/sqrt(4*pi*t)
gnuplot> t=0.1
gnuplot> Tmax=5
gnuplot> dt=0.01
gnuplot> load "anim.gp"
```

とすると $t = 0.1$ から 0.01 刻みで $t = 5$ まで、 $H(\cdot, t)$ のグラフが簡易アニメーションで描ける。ここでは静止画で我慢。

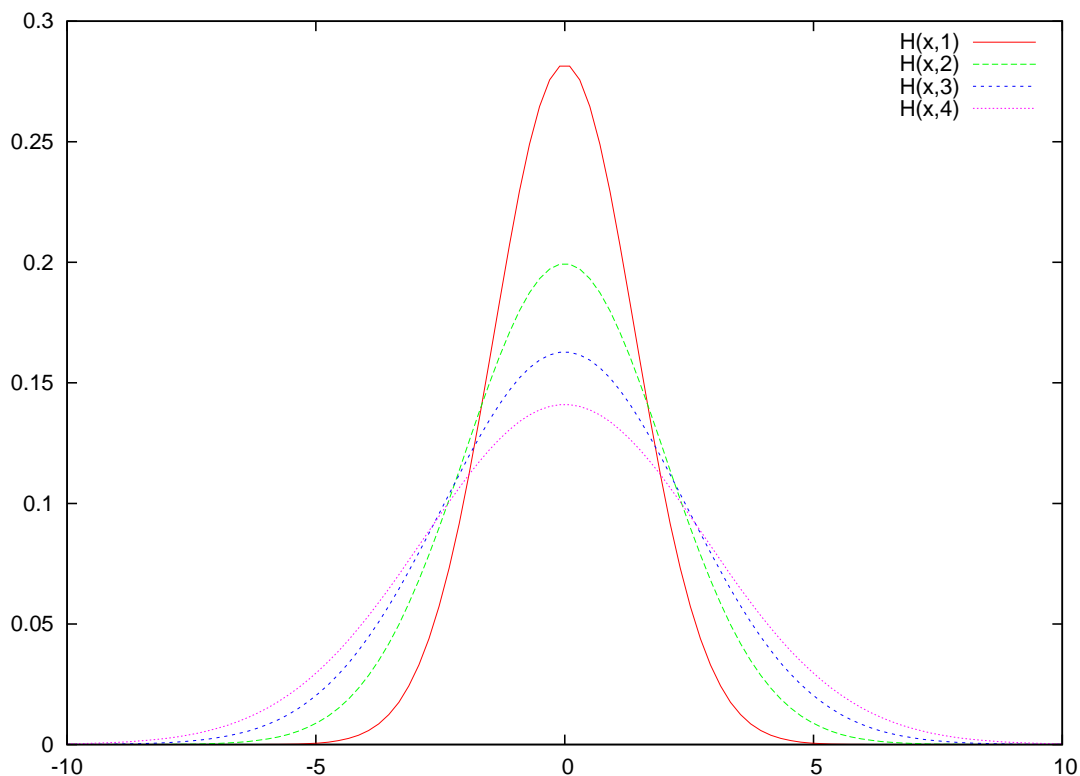


図 9.2: 熱方程式の基本解 $H(\cdot, t)$ の $t = 1, 2, 3, 4$ でのグラフ

アニメーション GIF の作り方

gnuplot で次のようにすれば `heatkernel.gifa` 出来る。

```
G(x,t)=exp(-x*x/(4*t))/sqrt(4*pi*t)
t=0.1
Tmax=5
dt=0.01
set term gif animate delay 10
set output "heatkernel.gif"
load "anim.gp"
quit
```

^a<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/heatkernel.gif>

以下は余談である。

G 自身が熱方程式を満たす:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x, t).$$

$t \rightarrow +\infty$ のとき $G(x, t) \rightarrow 0$ であるが、 $t \rightarrow +0$ としても 0 以外の点では 0 に収束する。実際、

$$\lim_{t \rightarrow +0} G(x, t) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ +\infty & (x = 0) \end{cases}$$

実は $t \rightarrow +0$ のとき、 $G(x, t)$ は **Dirac のデルタ (超) 関数** に収束する:

$$\lim_{t \rightarrow +0} G(x, t) = \delta(x).$$

これは

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x) \quad (\text{曖昧だけれど...})$$

が成り立つ (つまり初期条件 (9.9) を満たしている) という意味である。

(少し乱暴な書き方になるけれど) 手短かにまとめておくと、 G は Dirac のデルタ超関数を初期値とする熱方程式の初期値問題の解である:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x, t), \quad G(x, 0) = \delta(x).$$

物理的には、時刻 0 で原点に単位熱量が置かれて、その熱が伝導 (拡散) していく状態を表す関数である (個人的には「基本解」と呼ばれるのにふさわしいと思っている)。

9.4 1次元波動方程式の初期値問題

問 7. 連続関数 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$(9.11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)),$$

$$(9.12) \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす u を求めたい (波動方程式の初期値問題)。

(1) u の x に関する Fourier 変換 $\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、それを解け。

(2) \hat{u} を逆 Fourier 変換することによって、 u を求めよ。

(解答は p. 133)

(この問題は、Fourier 変換を使わずに初等的な微積分のみで解ける (付録 H.1 に書いておいた)。それによると $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy$ となる。検算のために用いると良い。)

第10章 応用: CTの数理

普通の Fourier 変換の、微分方程式以外への応用を一つ見てみよう。

(図をおしゃれなものに差し替えたい。誰か作ってくれないかなあ。本当は内容的にも、きちんと書かれた資料を発見して照らし合わせてチェックしたいところだが…)

10.1 準備: 多変数関数の Fourier 変換

これまでこの講義では、1 変数関数の Fourier 変換しか扱ってこなかったが、CT の話では、2 変数関数の Fourier 変換が必要になるので、多変数関数の Fourier 変換を紹介する。

$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ とするとき、 f の Fourier 変換 $\mathcal{F}f$, g の逆 Fourier 変換 (共役 Fourier 変換) \mathcal{F}^*g を

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx,$$
$$\mathcal{F}^*g(x) = \tilde{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix \cdot \xi} dx$$

で定める。ただし $x \cdot \xi$ は、 x と ξ の内積である:

$$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \cdots + x_n \xi_n.$$

1 次元のときと同様に反転公式などの公式が成り立つ。

ここで

$$e^{-ix \cdot \xi} = e^{-ix_1 \xi_1} e^{-ix_2 \xi_2} \cdots e^{-ix_n \xi_n}$$

であることを注意しておく。これから $\mathcal{F}f$ は、 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を各変数 x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) について Fourier 変換したものであるとみなせる。

10.2 準備

10.3 CT の数理

現在の医療に欠かすことの出来ない医療用 CT (computed tomography, コンピューター断層撮影¹⁾) は、G. N. Hounsfield と A. M. Cormack によって 1972 年に開発された (1979 年度ノーベル生理・医学賞受賞)。X 線を人体に照射すると、減衰はするものの、一部が透過して後方に置かれた検出器で検出できる。人体に X 線を全方向から照射した場合に、どれだけ減衰したかを測定し、その測定データ (射影データ) をコンピューター処理することによって、人体の断面図が得られる。これが CT である。

¹tomography は、「断層撮影」と訳される言葉である。X 線検査における一手法。従来の X 線撮影では、多くの構造が重積して 1 枚の画像を形成するが、目的とする部分のある深さの断面のみの像を写すもの。

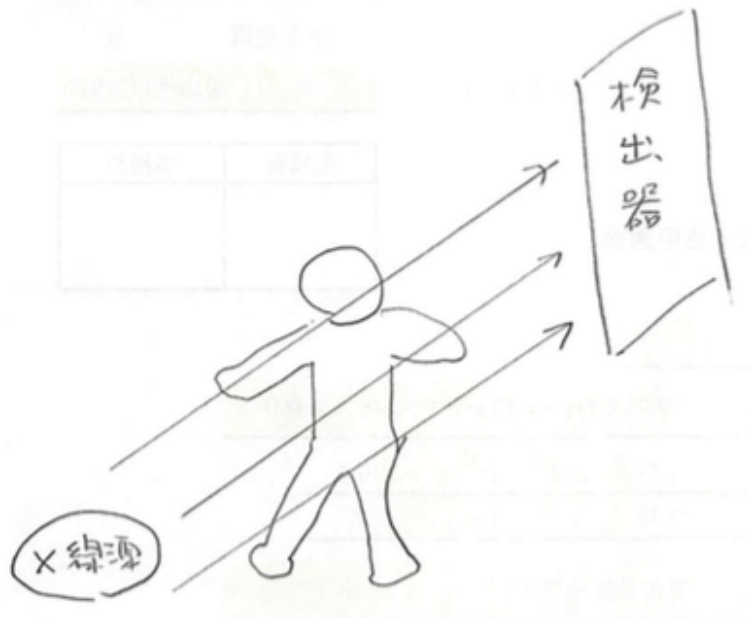


図 10.1: X線源から発せられたX線は人体を透過するとき減衰して検出される

その射影データから人体の“密度”を算出する部分の数学的な原理は、実は Johann Radon により 1917 年に発表された理論 ([32]) に一致することが分かった。**2次元 Radon 変換**の逆変換を求める問題である。

f を人体の密度とすると、トモグラフィック・スキャンの出力として得られる Rf は f の Radon 変換であり、Radon 変換の逆は、その射影データから密度を復元することを可能とする。

Rf は “sinogram” と呼ばれる²。

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で、台はコンパクト (つまりある有界集合が存在して、その補集合では 0 になっている) とする。 \mathbb{R}^2 内の任意の直線 L に対して、

$$Rf(L) := \int_L f(\mathbf{x}) |d\mathbf{x}| \quad (L \text{ に沿う線積分})$$

とおく。

直線 L は原点からの距離 $s (\geq 0)$ と、法線ベクトルが x 軸となす角 $\theta (\in [0, 2\pi])$ で指定できる。 L は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta \\ s \sin \theta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

とパラメーター付けできるから、線積分は次のように通常の積分に書き換えられる:

$$Rf(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(t), y(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt.$$

(この辺で図が欲しい。手書きの図でも良いから早く取り込んでおこう。) $Rf(\theta, s)$ から $f(x, y)$ を求めたい。

連続で台が有界な $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$Rf(\theta, X) := \int_{-\infty}^{\infty} f(X \cos \theta - Y \sin \theta, X \sin \theta + Y \cos \theta) dY \quad (\theta \in [0, 2\pi], X \in \mathbb{R})$$

で定まる Rf を f の **Radon 変換** と呼ぶ。

²(Dirac のデルタ関数の Radon 変換は、正弦波のグラフを台とすることからついた名前である、と説明されているが、筆者も詳しいことは知らない。

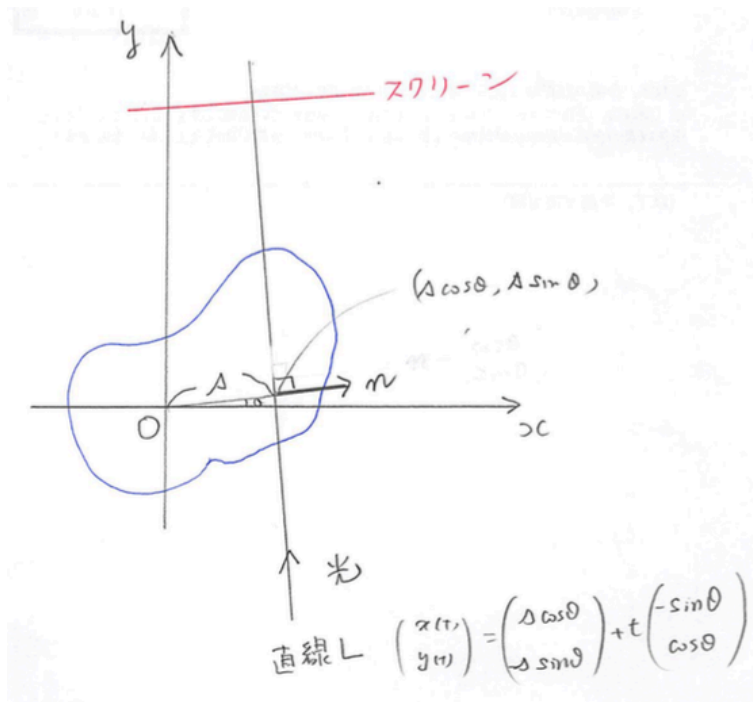


図 10.2:

参考: n 次元 Radon 変換の定義

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で台が有界とする。 Σ は \mathbb{R}^n 内の任意の超平面とする。 Σ は 0 から Σ に下ろした垂線の足 ξ で指定できる。

$$\Sigma = \Sigma_\xi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \xi \cdot (x - \xi) = 0\}.$$

$s = |\xi|$, $\alpha = \frac{\xi}{|\xi|}$ とおくと、 $s > 0$, $\alpha \in S^{n-1}$, $\xi = s\alpha$.

$$\Sigma_\xi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \cdot x = s\} =: \Sigma_{\alpha, s}.$$

$$Rf(\alpha, s) := \int_{\Sigma_{\alpha, s}} f(x) d\sigma(x).$$

f の Fourier 変換 g は、

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy \quad ((\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2).$$

(ξ, η) の極座標を r, θ とすると、 $\xi = r \cos \theta$, $\eta = r \sin \theta$ であるから

$$g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-ir(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy.$$

変数変換

$$\begin{cases} X = x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

を導入する ($g(\xi, \eta)$ を見て X をどうするか思いつき、それと良い相棒になりそうな Y を導入する)。その逆変換は

$$\begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases}$$

であり、ヤコビアンは 1 であるので、 $dx dy = dX dY$.

$$\begin{aligned}
 g(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-ir(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(X \cos \theta - Y \sin \theta, X \sin \theta + Y \cos \theta) e^{-irX} dX dY \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(X \cos \theta - Y \sin \theta, X \sin \theta + Y \cos \theta) dY \right) e^{-irX} dX \\
 &= \int_{\mathbb{R}} Rf(\theta, X) e^{-irX} dX.
 \end{aligned}$$

これは、 f の Radon 変換 $Rf(\theta, X)$ に、 X について (1 変数) Fourier 変換を施したものは、 f の (2 変数) Fourier 変換 g に等しいことを示している。Fourier 反転公式により、 f が求まる。

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} g(\xi, \eta) e^{i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(r \cos \theta, r \sin \theta) r e^{ir(x \cos \theta + y \sin \theta)} dr d\theta.$$

付録

この講義は、Fourier 変換の積分としての収束や、各種の操作 (積分の順序交換 (Fubini の定理)、微分と積分の順序交換、部分積分など) が成り立つかどうかなど、気軽に計算しているが、そういうもののフォローなどを書く。

ここはガラクタ置き場に近い。

(本を書いたこともあるけれど、私の書き方だと色々書いて、推敲を経て、最初に書いた分の半分か、1/3 くらいの分量の本が出来あがる感じである。最初に書いてからの作業量がかかなり多い。)

付録A 問題解答

(全然書いてない。)

解答 1.

(1) $e^{-inx} = \cos(-nx) + i \sin(-nx) = \cos nx - i \sin nx$ であるから、

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos nx - i f(x) \sin nx) dx = \frac{1}{2} (a_n - ib_n).$$

c_{-n} の場合も同様に扱える。

(2) (1) の結果から、 $c_n + c_{-n} = a_n$, $c_n - c_{-n} = -ib_n$. 後者から $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

(3)

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= (c_k + c_{-k}) \cos kx + i(c_k - c_{-k}) \sin kx \\ &= c_k (\cos kx + i \sin kx) + c_{-k} (\cos kx - i \sin kx) \\ &= c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \end{aligned}$$

であるから明らか。

(4) 色々やりようはあるが、 a_n と b_n が実数であることは、 a_n と b_n の定義式から明らかであろう。

(1) で示した関係式から、 $c_{-n} = \overline{c_n}$.

解答 5.

$$\left\| \sum_{n=1}^N \varphi_n \right\|^2 = \left(\sum_{n=1}^N \varphi_n, \sum_{m=1}^N \varphi_m \right) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (\varphi_n, \varphi_m) = \sum_{n=1}^N (\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^N \|\varphi_n\|^2. \blacksquare$$

解答 7.

(1)

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t), \quad \hat{u}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{d}{dt} \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\psi}(\xi).$$

(一見難しそうだが) 任意に $\xi (\neq 0)$ を定めて考えると、これは単振動の方程式であり、一般解は

$$\hat{u}(\xi, t) = A \cos(\xi t) + B \sin(\xi t) \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

初期条件に代入して

$$A = 0, \quad \xi B = \hat{\psi}(\xi).$$

これから $A = 0$, $B = \frac{\hat{\psi}(\xi)}{\xi}$. ゆえに

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{\sin(\xi t)}{\xi} \hat{\psi}(\xi) = t \operatorname{sinc}(t\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

なお、 $\xi = 0$ の場合は

$$\widehat{u}(0, t) = A + Bt \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

から $A = 0, B = \widehat{\psi}(0)$ であるから

$$\widehat{u}(0, t) = t\widehat{\psi}(0) = t \operatorname{sinc}(t\xi)\widehat{\psi}(\xi) \Big|_{\xi=0}.$$

ゆえにすべての ξ に対して

$$(*) \quad \widehat{u}(\xi, t) = t \operatorname{sinc}(t\xi)\widehat{\psi}(\xi).$$

(2) ここで

$$G(x, t) := \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^* [\operatorname{sinc}(t\xi)](x)$$

とおくと (b) より

$$G(x, t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \times \begin{cases} \frac{1}{2t} & (|x| < t) \\ 0 & (|x| > t) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (|x| < t) \\ 0 & (|x| > t). \end{cases}$$

また

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F} [G(\cdot, t)](\xi) = t \operatorname{sinc}(t\xi).$$

これを (*) に代入すると

$$\widehat{u}(\xi, t) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} [G(\cdot, t)](\xi)\widehat{\psi}(\xi) = \mathcal{F} [G(\cdot, t) * \psi](\xi).$$

Fourier 逆変換すると $(|x - y| < t \Leftrightarrow y \in [x - t, x + t])$ に注意して)

$$u(x, t) = G(\cdot, t) * \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t)\psi(y) dy = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy. \blacksquare$$

付録B 参考書案内 & 独り言

実はどういう本を紹介すれば良いのか、ちょっと困っている。

数学科では、Fourier 解析はある程度の準備 (Lebesgue 積分や関数解析) が出来てから講義されるのが普通である。また応用例も偏微分方程式が多い。そのために用意されている本は、数学的にやや高度で、その反対に信号処理については触れられていない場合が多く、この講義の参考書としては不適當であると思われる。

私自身は学生るとき、2年生の春学期にあった物理学の講義が、最初の Fourier 級数との遭遇であった。つまり数学としてではなく、物理学として、Fourier 解析を学んだ。ガチガチの数学としてやる前に、そういうやり方を経験しておくのは有益かもしれない。そういう考えから勧められそうな入門書として、大石 [33], 船越 [34] をあげておく。物理的な応用については小出 [35] が評判の良い本である (ただし内容はかなり高度で歯が立たないかも…)

信号処理の参考書を紹介すべきと思うが、どれが適当か良く分からない (10冊ちょっと買ったんだけど…)。そこに書いてあることをそのまま講義で使えることは少なかった。

岩波講座応用数学の木村 [23] は、応用数学の本であるが、しっかりとした記述で、コンパクトで (100 頁程度)、扱っている話題も普通の数学書よりはこの講義向けで、なかなか良いと思われる。読んだ学生から「わかりやすい」という感想を聞いたこともある。残念ながら入手が難しいので勧めることは出来ない (出版社はもう少し考えて欲しい…)

数学の和書で信号処理について述べたものはあまりない中で、新井 [36] は珍しい。とても面白い本であると思うが、この講義の参考書というよりは、もうちょっと高度な感じがする。興味を感じた人はめくってみることを勧める。

2014年度講義を終えて

初年度の講義を終えて、どの辺を目標にすべきかが見えて来た。

上で紹介した木村 [23] が、応用の方から数学の方を向いた本とすると、中村 [37] は、数学の方から応用の方を向いた本で、私の講義と共通成分の多い本であると感じた。書き方が違うのでこの講義の教科書とはならないが、参考になると思われる。この講義ではかなりズボラに扱った収束の話が含まれているのは (数学書として) 当然として、超関数入門が含まれている点も魅力的である。また巻末の参考文献表で紹介されている本に、私が推薦したい本が多く含まれている。

フーリエ解析は、非常に多彩な面を持っているので、色々な本を手にとって、その時の自分の好みに合う本を選ぶと良いと思われる。

そこでいくつか目についた本を紹介しておく。

ケルナー [9] は、古典的なフーリエ解析 (信号処理の話はあまりない) の生き生きとした魅力を伝えてくれる本である。

フーリエ解析の権威の書いたスタイン&シャカルチ [38] もフーリエ解析の数学の他分野との関係が興味深く解説されていて、面白いテキストになっている。

岡本 [39] は上に紹介したどの本とも毛色の異なる、非常にユニークな面白い本である。

2015 年度講義を終えて (ここは独り言)

反省点と今後やりたいこと

- 演習問題を充実させてみる。現時点のこの科目は「基本的なことが計算できれば、一応単位を出す」という方針なので、ある程度は「それを解けば大事なことが分かり、必要なことが出来るようになる」ように作れる可能性がある。
- 信号処理の定番本らしい Oppenheim & Schaffer, Discrete Time Signal Processing, Prentice Hall ([40]) を入手して読んでみる。
- 積分論を学んだ人向けに、収束の議論を含めた完全バージョンの証明を書く。級数や積分論を学んだ人にとって、Fourier 解析の定理は良い演習問題である。その解答を用意してあげる、ということ。
- Fourier 級数の総和法の話を入れて、窓をきちんと扱う。
- FFT のアルゴリズムの解説をする。
- z 変換とか、Wavelet とか、短時間 Fourier 変換とか、不確定性原理とか。
- Schwartz 流の超関数の紹介は無理だとしても (それでも何か参考書を紹介するという手はあるな)、Lighthill 流とか何とかで、もう少しまともにデルタ関数の紹介が出来ないか。

フーリエ解析は広大だわ。

2016 年度講義を終えて

説明した内容は、2015 年度と大きな差はなかった (まあまあ固まったと言えるのかも)。説明の仕方は細かいところで結構あれこれ改善したつもりである。

まあ、でも、内容的にはホントは複素関数論より多いかもしれないものを、半分の時間でやるので、学生の方は大変だろう、という気がする。期末試験の出来を向上させることを第一の目標にすべきかもしれない。(その点、宿題を出している「複素関数」のレベルに到達していない…)

たとえ講義しなくても証明を書くべき、という気持ちはますます強くなったが、ほとんど出来ていない。この点については気長にやることにする。ひょっとすると、修士の学生の相手をするので、具体的にどのようにすべきかが見えてくるのかもしれない。

現時点でほぼ講義時間は埋まっているが、デジタル・フィルターのプログラムを実際に示すべきなのかもしれない。WAVE ファイルを C のプログラムで読み書き、という話題は面白い人もいるかもしれない。時間的に無理かな? でも 30 分くらいで説明、というのは出来るかも…と思ったけれど出来なかった。

Mathematica は便利であるが、C 言語のプログラムから、FFT ライブラリィを利用するような例も示すべきなのかもしれない。それとも Python とか? それならば短時間で済ませられるかもしれない。この辺は検討課題だ。

Oppenheim & Schaffer [40] は良い本だと感じた。でも、学生に見せた瞬間に引かれそうな気がする (英語だし、分厚いから)。

2019年度の中間休憩(大学祭のための休講期間)にて

2017年度、2018年度の講義を終えて、を書いていない。猛烈に忙しかったので(と言い訳をしてみる)。忙しいと、ついつい数学の方に寄っている気がしないでもない。その点は少し反省している。

予備知識として Lebesgue 積分は要求のしようもないので、 L^2 の完備性は「お話」するしかないが、そこを曖昧にしたままでも、有意義な話は出来るような気がしてきた(1章の 1.3, 1.4 節のあたり)。直交系、完全系という言葉が少しでも学生たちの記憶に残したい。

意欲的に勉強する学生もいるみたいなので、たとえ授業で話さなくても、こういうことがある、みたいな話をさぼらずに書いておくのは有意義かもしれない、と最近感じている。それで微分方程式への応用を少し真面目に整理しておいた。今後も拡充したい。書き始めてみると、2.3.2 で紹介した、具体的な関数の Fourier 変換が顔を出す。ここは過去の年度の説明が良くなかったかもしれない、と反省した。やはり「例えば、こんなことに使えたりします」は言えるなら言っておこう。

収束の話について、抽象的な定理とその証明を天下りに見せるよりは、具体例を見せて、問題を理解させることが良さそう、と感じている。Fourier 級数については最低限の説明は出来るようになったけれど、Fourier 変換についてそれをするのが次の目標である。(その辺は、学生からの質問に対応しようとしているうちに、そう考えるようになった。) 実例は最良の教師だと思ふ次第である。

コンピューター数理の科目ということで、授業中にコンピューターを使ってみせて、実習する時間も(とても)ささやかながら取っているのだけれど、学生の時間の使い方が上手でない、というか、うまく指導できていない。何というか、こちらが与えたサンプル、というか叩き台を、有効に活用して、授業時間内に「やってみよう」と言ったことに取り組んでもらいたいのだけれど(例題をほんの少し変えた問題を与えてあるので、変えたところがどうなるかだけ計算して、変わったところだけプログラムを変えて実行してみる、それで詰まったら質問する、そうして下さいと指示してある、それなのに)、講義ノートを読んだり、サンプル・プログラムの解説をしたり、自己流プログラムを作り出したりする。時間がとてももったいない。この辺は今後の課題である。

現時点(2019/11/3)で、講義ノートに不要なものが結構あると感じている。

付録C Fourier級数 (第1章) の補足

C.1 内積空間の距離と極限

X が内積空間で、 (\cdot, \cdot) が X の内積であるとする。このとき $f, g \in X$ に対して

$$d(f, g) := \|f - g\| = \sqrt{(f - g, f - g)}$$

で定めた $d(f, g)$ を、 f と g の内積から定めた距離と呼ぶ。

d は次の (i), (ii), (iii) (距離と呼ぶにふさわしい性質) を満たす。

(i) $(\forall f, g \in X) d(f, g) \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow f = g$.

(ii) $(\forall f, g \in X) d(f, g) = d(g, f)$.

(iii) $(\forall f, g, h \in X) d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

X 内の列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と $f \in X$ に対して、 $\{s_n\}$ が f に収束するとは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(s_n, f) = 0 \quad (\text{すなわち } \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\| = 0)$$

が成り立つことと定める。

(「トポロジー」を履修していれば、 (X, d) は距離空間であり、その距離に関して $\{s_n\}$ が f に収束することであると分かる。)

注意 C.1.1 (\mathbb{R}^N の距離、点列の極限との比較) 実は \mathbb{R}^N における通常の内積から定まる距離と、点列の収束は、 \mathbb{R}^N の通常の内積から定まる距離と、その距離に基づく収束に一致する。

実際、 \mathbb{R}^N 内の2点 \vec{x}, \vec{y} の距離は

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{j=1}^N (x_j - y_j)^2}$$

と定義されるが、これは \mathbb{R}^N の内積から定めた距離に一致する。

また、 \mathbb{R}^N 内の点列 $\{\vec{x}_n\}$ が \vec{a} に収束するとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |\vec{x}_n - \vec{a}| < \varepsilon$$

が成り立つことであるが、これは数列 $\{|\vec{x}_n - \vec{a}|\}$ が 0 に収束すること、すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{x}_n - \vec{a}| = 0$$

ということである。 ■

命題 C.1.2 (1) $\{s_n\}$ が f に収束するならば、任意の $\varphi \in X$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

(2) $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が X の直交系、 $\{c_n\}$ が数列とするとき、

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \Rightarrow \left[(\forall n \in \mathbb{N}) \quad c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \right].$$

証明

(1) Schwarz の不等式によって

$$|(s_n, \varphi) - (f, \varphi)| = |(s_n - f, \varphi)| \leq \|s_n - f\| \|\varphi\|.$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $\|s_n - f\| \rightarrow 0$ であるから、 $|(s_n, \varphi) - (f, \varphi)| \rightarrow 0$. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

(2) $n \in \mathbb{N}$ とする。任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$s_N := \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$$

とおく。 $N \geq n$ ならば、

$$c_n = \frac{(s_N, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

仮定より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|s_N - f\| = 0$$

であるから、(1) より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (s_N, \varphi_n) = (f, \varphi_n).$$

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \blacksquare$$

C.2 Fourier 余弦級数, Fourier 正弦級数

時間の制約から授業では取り上げない可能性が高いが、応用上は頻出して重要である。

$f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ が連続で区分的に C^1 級であれば

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

と一様収束する級数に展開出来る (**Fourier 余弦級数**)。実際、 f を

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in [0, \pi]) \\ f(-x) & (x \in [-\pi, 0]) \end{cases}$$

と偶関数拡張すると、定理 1.1.1 が適用出来る

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin nx \, dx.$$

\tilde{f} が偶関数であり、 $[0, \pi]$ で f に等しいので

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = 0.$$

同様に、 $f(0) = f(\pi) = 0$ を満たす連続かつ区分的 C^1 級の関数 $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

と展開出来る (**Fourier 正弦級数**)。これは f を奇関数拡張して証明する。

Fourier 余弦級数、Fourier 正弦級数の応用を一つ。

例 C.2.1 (熱方程式の初期値境界値問題) 熱方程式の初期値境界値問題 (境界条件は Dirichlet 境界条件)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty)), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)), \\ u(x, 0) &= f(x) \quad (x \in [0, \pi]) \end{aligned}$$

は **Fourier の方法**¹で解くことが出来て、解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

f の Fourier 正弦級数展開は、この u が初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ ($x \in [0, \pi]$) を満たすことを示している。

同様に、熱方程式の初期値境界値問題 (境界条件は Neumann 境界条件)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty)), \\ u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)), \\ u(x, 0) &= f(x) \quad (x \in [0, \pi]) \end{aligned}$$

の解は、

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

こちらには f の Fourier 余弦級数展開が現れている。■

¹線形同次方程式の一般解を、変数分離解の線形結合として求める方法のこと。この問題の場合は、微分方程式 $u_t = u_{xx}$ と境界条件 $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ を満たす変数分離解 $u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$ について、 $\zeta'' = \lambda\zeta$, $\zeta(0) = \zeta(\pi) = 0$, $\eta' = \lambda\eta$ という方程式が導かれる。前の2つの方程式はいわゆる固有値問題で、 $\lambda = -n^2$ ($n \in \mathbb{N}$), $\zeta(x) = C \sin nx$ (C は任意定数) と解ける。 η も $\eta(t) = C' e^{-n^2 t}$ (C' は任意定数) と求まるので、 $u(x, t) = C'' e^{-n^2 t} \sin nx$ 。詳しいことは偏微分方程式のテキストを見よ。

C.3 参考: 内積空間の不等式 (Bessel の不等式, Schwarz の不等式, 最良近似性)

この項は、2014 年度の講義の際に準備した内容で、大筋内容に間違いはないと考えているけれど、分かりやすいかは別の話で、2015 年度には書き直した (それが 1.4 節である)。ここも参考のために残しておく。

内積空間に現れる重要な不等式はほとんどすべて、以下の定理かその系である。次の定理は容易に図形的イメージが持てる。図を描くことを勧める (授業では板書したが、作図が面倒なのでここに取り込むのはさぼっている。すみません。)

定理 C.3.1 (Fourier 部分和は直交射影; 直交射影の性質) X を内積 (\cdot, \cdot) を持つ \mathbb{C} 上の内積空間、 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ を正規直交系、

$$(C.1) \quad X_N := \text{Span}\langle \varphi_1, \dots, \varphi_N \rangle = \left\{ \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \mid c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C} \right\}$$

とし、 $f \in X$ に対して

$$s_N := \sum_{n=1}^N (f, \varphi_n) \varphi_n$$

とおくとき、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) s_N は f から X_N に下ろした垂線の足 (直交射影, 正射影) である。すなわち

(a) $s_N \in X_N$.

(b) 任意の $g \in X_N$ に対して $(f - s_N, g) = 0$.

(2) s_N は X_N の要素のうち、 f に最も近い。すなわち

$$(\forall g \in X_N) \quad \|f - g\| \geq \|f - s_N\|.$$

別の書き方をすると

$$\min_{g \in X_N} \|f - g\| = \|f - s_N\|.$$

(3) $\|s_N\| \leq \|f\|$.

証明

(1) (a) について: $c_n = (f, \varphi_n)$ とおけばよいので、 $s_N \in X_N$.

(b) について: 任意の $n \in \{1, \dots, N\}$ に対して、

$$(s_N, \varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^N (f, \varphi_m) \varphi_m, \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^N (f, \varphi_m) (\varphi_m, \varphi_n) = \sum_{m=1}^N (f, \varphi_m) \delta_{mn} = (f, \varphi_n).$$

これから $(f - s_N, \varphi_n) = 0$. 任意の $g \in X_N$ は $g = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$ と表せるので、

$$(s_N, g) = \left(s_N, \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \right) = \sum_{n=1}^N \overline{c_n} (s_N, \varphi_n) = \sum_{n=1}^N (\overline{c_n} \cdot 0) = 0.$$

(2) $g \in X_N$ とする。 $g, s_N \in X_N$ であるから $s_N - g \in X_N$ である。ゆえに (1)(b) より $(f - s_N, s_N - g) = 0$ 。

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \|(f - s_N) + (s_N - g)\|^2 \\ &= ((f - s_N) + (s_N - g), (f - s_N) + (s_N - g)) \\ &= (f - s_N, f - s_N) + (f - s_N, s_N - g) + (s_N - g, f - s_N) + (s_N - g, s_N - g) \\ &= \|f - s_N\|^2 + 0 + \bar{0} + \|s_N - g\|^2 \\ &= \|f - s_N\|^2 + \|s_N - g\|^2. \end{aligned}$$

これは f, g, s_N の3点が直角三角形 (s_N が直角の頂点) で、ピタゴラスの定理の関係が成り立っていることを示している。これから $\|f - g\| \geq \|f - s_N\|$ が得られる (直角三角形では斜辺が一番長い)。

(3) (2) の証明中の g として 0 を取ったと考えると、 $f, 0, s_N$ が直角三角形で、

$$\|f\|^2 = \|f - s_N\|^2 + \|s_N\|^2.$$

これから $\|f\| \geq \|s_N\|$. ■

系 C.3.2 (Bessel の不等式) X を内積空間、 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を X の正規直交系、 $f \in X$ とするとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leq \|f\|^2.$$

証明 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、定理 C.3.1 の (3) から

$$\|s_N\|^2 \leq \|f\|^2.$$

$s_N = \sum_{n=1}^N (f, \varphi_n) \varphi_n$ について、

$$\|s_N\|^2 = \sum_{n=1}^N \|(f, \varphi_n) \varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^N |(f, \varphi_n)|^2 \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^N |(f, \varphi_n)|^2$$

(最初の等号は、 $m \neq n \Rightarrow \varphi_m \perp \varphi_n$ とピタゴラスの定理による。3つめの等号は $\|\varphi_n\|^2 = \delta_{nn} = 1$ による。) 従って

$$\sum_{n=1}^N |(f, \varphi_n)|^2 \leq \|f\|^2.$$

左辺は N について単調増加する数列で、これが上界 $\|f\|^2$ を持つので収束し、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leq \|f\|^2. \blacksquare$$

f が周期 2π で、 $[-\pi, \pi]$ で二乗可積分ならば、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

とおくとき、)

$$(C.2) \quad \frac{1}{2} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

また

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

とおくとき、

$$(C.3) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

実は $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ や $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は完全系なので、(C.2) や (C.3) では等号が成り立つ。

(ひとり言: 直交射影が最良近似を与える、というのは、Ritz-Galerkin 法なんかにも出て来るわけで、Fourier 級数よりもっと一般的な話に属することだ。定理を分解したい気持ちが出て来る。)

「数学とメディア」で区分的に滑らかな関数の Fourier 級数の収束を証明するために Riemann-Lebesgue の定理を用いた。一般の場合²は、Lebesgue 積分の知識が必要だが、区分的に滑らかな関数のように、内積が定義できるような範囲で考える場合は、次の形の定理で十分である。

系 C.3.3 (内積空間版 Riemann-Lebesgue の定理) X を内積空間、 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を X の正規直交系、 $f \in X$ とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = 0.$$

証明 Bessel の不等式から、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$ は収束するので、一般項は 0 に収束する。■

系 C.3.4 (Schwarz の不等式) X を内積空間、 $f, g \in X$ とするとき

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

(等号成立には f, g が 1 次従属であることが必要十分である。)

証明 $g = 0$ ならば証明すべき不等式の両辺とも 0 になるので不等式は成立する。 $g \neq 0$ ならば $\varphi_1 := \frac{1}{\|g\|} g$ において、定理 C.3.1 (3) を適用すると、

$$\|f_1\| \leq \|f\|, \quad f_1 = (f, \varphi_1) \varphi_1.$$

これから得られる $|(f, \varphi_1)| \leq \|f\|$ に φ_1 の定義を代入すると不等式が得られる。■

振り返ってみると、定理 C.3.1 (3) で、 $N = 1$ の場合が Schwarz の不等式で、 $N \rightarrow \infty$ とした場合が Bessel の不等式である。これらと定理 C.3.1 (2) の不等式は、いずれも直角三角形の辺の長さについての不等式 (斜辺が一番長い) である。

余談 C.3.5 (射影定理) 定理 C.3.1 によれば、内積空間 X の有限次元部分空間 X_N に対して、任意の要素 f の X_N への直交射影が存在することが分かる (X_N の基底を取り、Gram-Schmidt の直交化法を用いれば、 X_N の正規直交基底 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ が作れるので、定理が適用できる)。無限次

² 「Lebesgue 可積分な関数の Fourier 係数は 0 に収束する。」

元の部分空間 Y に対してはどうか？内積空間が完備 (つまり Hilbert 空間) で、部分空間 Y が閉集合であれば、直交射影が存在することが知られている。それが Hilbert 空間に対する**射影定理**である (D.1 参照)。それをを用いて様々な結果を得ることが出来る。例えば $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ が任意の線型写像とするとき、 $F(x) = (x, a)$ となる $a \in X$ が必ず存在する (**Riesz の表現定理**)。その証明には、 $Y := \{x \in X \mid F(x) = 0\}$ を考えて、 Y に属さない元の Y への直交射影を用いるのが鍵となる。($X = \mathbb{R}^3$ 場合、 $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ が線形ということは、 $F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ と書けることと同値であることはすぐ分かるが、 $a = (a_1, a_2, a_3)$ は平面 $F(x) = 0$ の法線ベクトルであることに注意すると良い。) ■

C.4 Fourier 級数と一様収束

周期 2π の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が連続かつ区分的に C^1 級であれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

が成り立つので、Weierstrass の M-test により、 f の Fourier 級数は一様に絶対収束する (これは本文中に説明した)。

その和が f であることを証明しよう。次の命題を証明する。この証明は、藤田 [41] 第 6 章による。三角関数でデルタ関数列を作るアイデアは面白い。

定理 C.4.1 周期 2π の連続関数 f の Fourier 級数が一様収束するならば、その和は f に一致する。

証明

$$S(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とおく。連続関数列の一様収束極限であるから、 S は連続関数である。

$$w(x) := f(x) - S(x)$$

とおく。 $w(x) \equiv 0$ を示すことが目標である。

Fourier 係数の定義から、

$$(f, \cos kx) = \pi a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (f, \sin kx) = \pi b_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

$S(x)$ を定義する級数は一様収束するので、有界な関数 $\cos kx, \sin kx$ をかけて出来る級数も一様収束する。ゆえに項別積分が可能であるから、

$$(S, \cos kx) = \pi a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (f, \sin kx) = \pi b_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

ゆえに

$$(w, \cos kx) = \pi a_k - \pi a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (w, \sin kx) = \pi b_k - \pi b_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

次の補題を用いれば $w = 0$ 。ゆえに $S = f$ 。■

補題 C.4.2 周期 2π の周期関数 $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が連続で、かつ

$$(w, \cos kx) = \pi a_k - \pi a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (w, \sin kx) = \pi b_k - \pi b_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

を満たすならば、 $w = 0$ 。

証明 正の偶数 n に対して、

$$\eta_n(x) := \cos^n \frac{x}{2}, \quad \gamma_n := \int_{-\pi}^{\pi} \eta_n(t) dt, \quad \zeta_n(x) := \frac{\eta_n(x)}{\gamma_n}$$

とおく。(実は $\gamma_n \rightarrow 0$ であり、 $\{\zeta_n\}_n$ は“デルタ関数に収束する”ような関数列であるが、それは表に出す必要はない。)

Step 1: $[-\pi, \pi]$ で連続な w に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \zeta_n(x) dx = w(0)$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \zeta_n(x) dx = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \eta_n(x) dx}{\gamma_n} = \frac{\gamma_n}{\gamma_n} = 1$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \zeta_n(x) dx - w(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \zeta_n(x) dx - w(0) \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_n(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (w(x) - w(0)) \zeta_n(x) dx. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \zeta_n(x) dx - w(0) \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |w(x) - w(0)| \zeta_n(x) dx.$$

この右辺の積分を、原点の近くと、それ以外の部分の2つに分けて評価する。

w は 0 で連続であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$(\forall x \in [-\pi, \pi] : |x| \leq \delta) \quad |w(x) - w(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに

$$\int_{|x| \leq \delta} |w(x) - w(0)| \zeta_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x| \leq \delta} \zeta_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_n(x) dx = \frac{\varepsilon}{2}.$$

一方、 $\delta < |x| \leq \pi$ においては

$$|w(x) - w(0)| \leq |w(x)| + |w(0)| \leq 2M, \quad M := \max_{x \in [-\pi, \pi]} |w(x)|,$$

$$\zeta_n(x) \leq \zeta_n(\delta) \quad (\delta < |x| \leq \pi)$$

であるから

$$\int_{\delta < |x| \leq \pi} |w(x) - w(0)| \zeta_n(x) dx \leq 2M \zeta_n(\delta) \int_{\delta < |x| \leq \pi} dx \leq 4\pi M \zeta_n(\delta)$$

であり、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\zeta_n(\delta) = \cos^n(\delta/2) \rightarrow 0$ であるから、 $(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)$

$$\int_{\delta < |x| \leq \pi} |w(x) - w(0)| \zeta_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

以上まとめると、 $n \geq N$ を満たす任意の n に対して

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \zeta_n(x) dx - w(0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Step 2: $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) のとき、 $\eta_n \in C_m := \text{Span}\langle \cos mx, \cos(m-1)x, \dots, \cos x, 1 \rangle$. 実際 $m = 1$ のとき

$$\eta_2(x) = \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2} \in C_1.$$

m のとき成り立つとすると、 $\exists a_0, a_1, \dots, a_m$ s.t.

$$\zeta_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m a_k \cos kx.$$

ゆえに

$$\eta_{2(m+1)}(x) = \zeta_{2m}(x) \cos^2 \frac{x}{2} = \sum_{k=0}^m a_k \cos kx \cos^2 \frac{x}{2}$$

であるが、

$$\begin{aligned} \cos kx \cos^2 \frac{x}{2} &= \cos kx \cdot \frac{\cos x + 1}{2} = \frac{\cos kx \cos x}{2} + \frac{\cos kx}{2} \\ &= \frac{\cos(k+1)x + \cos(k-1)x}{4} + \frac{\cos kx}{2} \in C_{m+1}. \end{aligned}$$

ゆえに $\eta_{2(m+1)} \in C_m$.

Step 3: $[-\pi, \pi]$ で連続で、 $\cos kx$ ($k = 0, 1, \dots$) と直交する w に対して、 $w(0) = 0$. Step 2 より $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) のとき、 $\eta_n \in C_m$. ゆえに $\zeta_{2m} \in C_m$. w は $\cos kx$ と直交するという仮定から

$$\int_{-\pi}^{\pi} w(x) \zeta_{2m}(x) dx = 0 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Step 1 の結果を用いると、 $w(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \zeta_{2m}(x) dx = 0$.

Step 4: この命題の結論 “任意の $\alpha \in [-\pi, \pi]$ に対して $w(\alpha) = 0$ ” $v(x) := w(x + \alpha)$ とおくと、 v は $[-\pi, \pi]$ で連続で、任意の $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に対して

$$\begin{aligned} (v, \cos kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} w(x + \alpha) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cos k(t - \alpha) dt \\ &= \cos k\alpha \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cos kt dt + \sin k\alpha \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin kt dt = \cos k\alpha \cdot 0 + \sin k\alpha \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Step 3 より $v(0) = 0$. すなわち $w(\alpha) = 0$. ■

次の命題は、2016年度は本文に移すので、ここからは削除する予定である。

系 C.4.3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が連続で周期 2π の周期関数で、区分的に C^1 級であるならば、 f の Fourier 級数は f に一様に絶対収束する。

証明 一般に、関数 h の Fourier 係数を $\widehat{h}(n)$ と書くことにする:

$$\widehat{h}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$ が収束することを示せば良い。実際、 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$ が収束するならば、Weierstrass の M-test により、 f の Fourier 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ は一様に絶対収束する。ゆえに定理からその極限は f に等しい。

f は連続かつ区分的に C^1 級であるから、 $\exists \{a_j\}_{j=0}^N$ s.t. $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_N = \pi$, 各 $j \in \{1, \dots, N\}$ に対して $f_j := f|_{[a_{j-1}, a_j]}$ は C^1 級である。

f'_j は $[a_{j-1}, a_j]$ で連続であるから、 $f'_j \in L^1(a_{j-1}, a_j) \cap L^2(a_{j-1}, a_j)$ である。ゆえに g を

$$g(x) := \begin{cases} f'_j(x) & (x \in (a_{j-1}, a_j)) \\ 0 & (x \in \{a_0, a_1, \dots, a_N\}) \end{cases}$$

定めるとき、 $g \in L^1(-\pi, \pi) \cap L^2(-\pi, \pi)$ である。

$n \in \mathbb{Z}$ とするとき

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_{a_{j-1}}^{a_j} f_j(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\left[f_j(x) \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{a_{j-1}}^{a_j} - \int_{a_{j-1}}^{a_j} f'_j(x) \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{f(a_N) e^{-ina_N} - f(a_0) e^{-ina_0}}{-in} + \frac{1}{in} \sum_{j=1}^N \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(x) e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{f(\pi) e^{-in\pi} - f(-\pi) e^{-in(-\pi)}}{-in} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right). \end{aligned}$$

f は周期 2π であるから $f(-\pi) = f(\pi)$ であるので、

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{in} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{in} \widehat{g}(n).$$

$g \in L^2(-\pi, \pi)$ であるから、Parseval の等式が成り立つ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = \frac{\|g\|_{L^2}^2}{2\pi}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} \left| \frac{1}{in} \widehat{g}(n) \right| \leq |\widehat{f}(0)| + \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} |\widehat{g}(n)|^2 \right)^{1/2} \\ &= |\widehat{f}(0)| + \left(2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \right)^{1/2} \left(\frac{\|g\|_{L^2}^2}{2\pi} \right)^{1/2} < \infty. \blacksquare \end{aligned}$$

C.5 備忘録

Hölder 連続関数、Lipschitz 連続関数、区分的に滑らかな関数

Lipschitz 連続関数については、中村 [37] に興味深い証明が載っている。

付録D Hilbert 空間

Hilbert 空間の説明、抽象的にやる分には、Lebesgue 積分を学ぶ必要はない。最後に、もし Lebesgue 積分を勉強すると、こういうことも出来ます、という説明の仕方はあるかもしれない。

D.1 射影定理

直交射影の存在を保証する射影定理を述べる。(関数空間のような無限次元空間を相手にするには、この種の議論が必要になることを見せるのは、教育的でもあるし、またその内容自体が面白く感じられる可能性がある。個人的に、学生時代面白いと感じた定理ベスト・スリーに入りそうな定理である。)

定義 D.1.1 X を体 \mathbb{K} 上のベクトル空間とする。

(1) $V \subset X$ が X の**線型部分空間**であるとは、次の2条件が成り立つことをいう。

(a) $(\forall x, y \in V) x + y \in V.$

(b) $(\forall x \in V) (\forall \lambda \in \mathbb{K}) \lambda x \in V.$

(2) $C \subset X$ が X の**凸部分集合**であるとは、

$$(\forall x, y \in C) (\forall \theta \in [0, 1]) (1 - \theta)x + \theta y \in V$$

が成り立つことをいう。

(3) X がノルム線形空間 (ノルム空間), $V \subset X$ とする。 V が X の**閉線型部分空間** (閉部分空間) であるとは、 V が X の線型部分空間であり、かつ V が X の閉部分集合であることをいう。

定理 D.1.2 (射影定理) X を Hilbert 空間、 V を X の空でない凸閉部分集合、 $f \in X$ とするとき、

(b)
$$h \in V, \quad \|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$$

を満たす h が存在する。

特に V が X の閉部分空間であるとき、 h を f の V への**正射影**, **直交射影**と呼ぶ。 V が凸閉部分集合の場合も**射影**と呼ぶことがある。

証明 $L := \inf_{g \in V} \|f - g\|$ とおく。

$g_n \in V$ ($n \in \mathbb{N}$), $\|f - g_n\| \rightarrow L$ となる $\{g_n\}$ が取れる。

中線定理

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

で、 $x = f - g_n, y = f - g_m$ とおくと、

$$\|g_m - g_n\|^2 + \|2f - (g_n + g_m)\|^2 = 2(\|f - g_n\|^2 + \|f - g_m\|^2).$$

左辺第2項は $4\|f - (g_n + g_m)/2\|^2$ に等しい。 V が凸であるから、 $(g_n + g_m)/2 \in V$. ゆえに $\|f - (g_n + g_m)/2\| \geq L$. 従って

$$2(\|f - g_n\|^2 + \|f - g_m\|^2) = \|g_m - g_n\|^2 + 4\|f - (g_n + g_m)/2\|^2 \geq \|g_m - g_n\|^2 + 4L^2.$$

ゆえに

$$\|g_n - g_m\|^2 \leq 2(\|f - g_n\|^2 + \|f - g_m\|^2) - 4L^2$$

$n, m \rightarrow \infty$ とすると、右辺 $\rightarrow 2(L^2 + L^2) - 4L^2 = 0$. ゆえに $\{g_n\}$ は Cauchy 列である。 X は完備であるから $\{g_n\}$ は収束する。その極限を h とすると、 V が閉集合であることから、 $h \in V$ であり、

$$\|f - h\| = \left\| f - \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\| = L = \inf_{g \in V} \|f - g\|. \blacksquare$$

命題 D.1.3 X は Hilbert 空間、 V は X の空でない凸閉部分集合、 $f \in X$ とする。 f の V への直交射影 ((b) を満たす) h は

$$(\#) \quad h \in V, \quad (\forall g \in V) \quad \operatorname{Re}(f - h, g - h) \geq 0$$

を満たし、また (#) を満たす h は一意である。すなわち h は (#) で特徴づけられる。

証明 V は凸であるから、任意の $g \in V, \theta \in [0, 1]$ に対して、 $(1 - \theta)h + \theta g \in V$ である。 $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(\theta) := \|f - [(1 - \theta)h + \theta g]\|^2$$

で定めると

$$F(\theta) = \|f - h - \theta(g - h)\|^2 = \|f - h\|^2 - 2\theta \operatorname{Re}(f - h, g - h) + \theta^2 \|g - h\|^2.$$

F は $\theta = 0$ のとき最小になるので

$$0 \leq F'(0) = -\operatorname{Re}(f - h, g - h).$$

ゆえに

$$\operatorname{Re}(f - h, g - h) \leq 0.$$

(一意性の証明) $h, h' \in V$ が

$$\operatorname{Re}(f - h, g - h) \leq 0, \quad \operatorname{Re}(f - h', g - h') \leq 0 \quad (g \in V)$$

を満たすとする。 g として、 h', h を取ることができるので、

$$\operatorname{Re}(f - h, h' - h) \leq 0, \quad \operatorname{Re}(f - h', h - h') \leq 0.$$

後者から $\operatorname{Re}(h' - f, h' - h) \leq 0$. ゆえに

$$\|h' - h\|^2 = \operatorname{Re}(h' - h, h' - h) = \operatorname{Re}(h' - f, h' - h) + \operatorname{Re}(f - h, h' - h) \leq 0 + 0 = 0.$$

ゆえに $h = h'$. \blacksquare

命題 D.1.4 X は Hilbert 空間、 V は X の閉部分空間、 $f \in X$ とする。 f の V への直交射影 h は

$$(b) \quad h \in V, \quad (\forall v \in V) \quad \operatorname{Re}(f - h, v) = 0$$

を満たし、また (b) を満たす h は一意的である。すなわち h は (b) で特徴づけられる。

証明 V は部分空間であるから、任意の $v \in V$, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、 $h + \lambda v \in V$ である。

$$\begin{aligned} \|f - (h + \lambda v)\|^2 &= \|f - h - \lambda v\|^2 \\ &= \|f - h\|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda (f - h, v) + |\lambda|^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

であるが、 $(f - h, v) = |(f - h, v)| e^{i\phi}$ とする $\phi \in \mathbb{R}$ を取り、 t を任意の実数として、 $\lambda := t e^{-i\phi}$ とおくと

$$\|f - (h + \lambda v)\|^2 = \|f - h\|^2 - 2t |(f - h, v)| + t^2 \|v\|^2.$$

ϕ を固定して、 $t \in \mathbb{R}$ の関数とみなすとき、 $t = 0$ で最小になる。ゆえに 1 次の係数 $|(f - h, v)|$ は 0. ゆえに

$$(f - h, v) = 0.$$

(一意性の証明) $h, h' \in V$ が

$$(f - h, v) = 0, \quad (f - h', v) = 0 \quad (v \in V)$$

を満たすとする。これから $(h - h', v) = 0$ ($v \in V$). 特に $v = h - h'$ と取れば、 $\|h - h'\|^2 = 0$. ゆえに $h = h'$. ■

D.2 Riesz の表現定理

(準備中 — 書いた覚えはあるので、発掘して持ってくれば良い。)

D.3 書き足そうか

(構想中)

Fourier 解析もそうだし、有限要素法のための弱解の方法の説明をしたいし

- Lax-Milgram の定理, Stampacchia の定理
- Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱解
- 可分な Hilbert 空間の完全正規直交系の存在
- スペクトル分解定理
- compact 自己共役作用素の展開定理

付録E Fourier変換に関する事項のもう少し数学的な取り扱い

(大規模工事中。まだまだあちこち大穴が空いているし、とんでもないミスプリもある。)

E.1 Lebesgue積分の紹介

E.1.1 耳学問

Fourier変換やFourier級数の収束などの問題をきちんと理解するためには、Lebesgue積分をマスターする必要がある。

Lebesgue積分の勉強にはそれなりの時間がかかるので(いわゆる「一朝一夕」では済まない)、ここでまっとうな解説は出来ないが、雰囲気だけでも説明しよう。

参考書として、伊藤 [18] (オーソドックスで非常にきちんとした説明がされている定番本)、柴田良弘 [42](比較的最近書かれた本でとても詳しい)、吉田 [43](説明に工夫があるテキストで、現在良く利用されている)、岩田 [44](これも説明に工夫があるテキスト)、原 [45](とりあえずすぐ使えないといけなるときに役立つ可能性のある本) をあげておく。

- Lebesgue積分は、微積分で学ぶRiemann積分とは、定義が違っている。厳密には別物である。
- Lebesgue積分は、基本的にはRiemann積分の拡張になっている。具体的な積分の多くは、Riemann積分、Lebesgue積分、どちらで考えても同じ値である。
- 注意事項は、Lebesgue積分では、 f が積分可能と $|f|$ が積分可能が同値になっていることである。例えば $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ は、Lebesgue積分としては積分可能でない。
- Lebesgue積分については、便利な収束定理(項別積分や微分と積分の順序交換など)が色々ある。

E.1.2 零集合

準備中— 微積分の講義(桂田 [46])で説明したことがある。それを持ってくれば良いのかも。

E.1.3 測度空間、可測関数、完備性

E.1.4 Lebesgue測度, Lebesgue可測関数

E.1.5 ほとんどいたるところ等しい関数の同一視

$\Omega \subset \mathbb{R}$ は正の測度を持つLebesgue可測集合とする。

Ω 上の複素数値 Lebesgue 可測関数全体の集合を $M(\Omega)$ と表す。 $f, g \in M(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned} f \sim g &\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f = g \quad (\mu\text{-a.e. in } \Omega) \\ &\Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0 \end{aligned}$$

で2項関係 \sim を定義すると、これは $M(\Omega)$ 上の同値関係であることが証明できる。

しばらくの間、 $f \in M(\Omega)$ の定める同値類を $[f]$ と表す。

商空間 $M(\Omega)/\sim$ において、和 $[f] + [g]$, スカラー乗法 $\lambda[f]$ を、

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \Omega), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad (x \in \Omega)$$

で定まる $f + g, \lambda f \in M(\Omega)$ の定める同値類と定める:

$$[f] + [g] := [f + g], \quad \lambda[f] := [\lambda f].$$

これが well-defined であることを示すのは簡単である。

$M(\Omega)/\sim$ は、 \mathbb{C} 上のベクトル空間となる。零元は、定数関数 0 の同値類 $[0]$ である。

$f, g \in M(\Omega)$ に対して、

$$f \text{ が } \Omega \text{ で可積分} \Leftrightarrow g \text{ が } \Omega \text{ で可積分.}$$

また、そのとき

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} g(x) dx$$

が成り立つ。

このことから、 $M(\Omega)/\sim$ の元 $[f]$ に対して、積分 $\int_{\Omega} [f](x) dx$ が

$$\int_{\Omega} [f](x) dx := \int_{\Omega} f(x) dx$$

によって定義出来る。

これ以降は、 $[f]$ のことを単に f と書くことにする。

E.1.6 Lebesgue 空間

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ を Lebesgue 可測関数, $1 \leq p < \infty$ とする。

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

が成り立つとき、 f は Ω で p 乗可積分 ($p=1$ のとき、単に可積分) であるという。

Ω で p 乗可積分な関数の全体を $L^p(\Omega)$ と表す。

$$L^p(\Omega) := \left\{ f \in M(\Omega)/\sim \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

これは $L^p(\Omega)$ のノルムになり、 $L^p(\Omega)$ はこのノルムに関して **Banach 空間** となる。

E.2 Lebesgue 積分の収束定理

E.2.1 項別積分

関数列 $\{f_n\}$ について、

$$(E.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx \text{ (ただし } f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{)}$$

が成り立つことを「項別積分が可能である」という。

例えば Ω が有界で、 $\{f_n\}$ が一様収束するとき、項別積分が可能である。この定理は簡単で便利であるが(例えば「複素関数」では、基本的な結果を導くのに、大抵はこれを使えば良い)、Fourier 変換は有界でない \mathbb{R} での積分であるから、これは役には立たない。

Lebesgue 積分については、次の有名な定理がある。これは非常に使いやすい。

定理 E.2.1 (Lebesgue の収束定理 (優収束定理, dominated convergence theorem)) Ω が \mathbb{R}^d の Lebesgue 可測集合で、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $L^1(\Omega)$ 内の列で、次の2つの条件を満たしているとする。

(i) ある関数 f に、 Ω 上ほとんどいたるところで収束している。すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (\text{a.e. in } \Omega).$$

(ii) ある Lebesgue 可測関数 φ で

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \Omega) \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x), \quad \int_{\Omega} \varphi(x) dx < \infty$$

を満たすものが存在する。

このとき次式が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

E.2.2 微分と積分の順序交換

$$\frac{d}{d\xi} \int_{\Omega} f(x, \xi) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) dx.$$

Ω が \mathbb{R}^n のコンパクト集合で、 f と $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ が連続の場合は、微積分レベルで次の定理がある。

定理 E.2.2

$$\frac{d}{d\xi} \int_a^b f(x, \xi) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) dx.$$

証明 証明は重積分に基づく。■

この定理は、Fourier 変換のような広義積分には使えない。広義積分において、微分と積分の順序交換を保証してくれる定理には、一様収束がらみの条件を仮定するものがあるが、Fourier 変換の場合は、次の定理が使いやすい。

定理 E.2.3 (Lebesgue 積分に基づく微分と積分の順序交換) Ω は \mathbb{R} の Lebesgue 可測集合, I は \mathbb{R} の区間, $f: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$ は Lebesgue 可測で、ある Lebesgue 可積分関数 φ が存在して

$$(i) (\forall x \in \Omega)(\forall \xi \in I) \left| \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, \xi) \right| \leq \varphi(x).$$

$$(ii) \int_{\Omega} \varphi(x) dx < \infty.$$

が成り立つならば

$$\frac{d}{d\xi} \int_{\Omega} f(x, \xi) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) dx.$$

例 E.2.4 $|f|$ と $|xf(x)|$ が \mathbb{R} で積分可能ならば、

$$g(\xi) := \mathcal{F}f(\xi), \quad h(\xi) := \mathcal{F}[-ixf(x)]$$

と置くととき、 g は連続微分可能で

$$g'(\xi) = h(\xi).$$

E.3 Lebesgue 可積分な関数の Fourier 変換

Fourier 変換の定義式の被積分関数 $f(x)e^{-ix\xi}$ について、

$$|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)|$$

であるから、被積分関数が Lebesgue 可積分であるためには、 f 自身が Lebesgue 可積分であることが必要十分である。

その観点から、Lebesgue 可積分な関数の Fourier 変換を考えるのは、まあまあ自然であると考えられる。

定理 E.3.1 (Lebesgue 可積分関数の Fourier 変換) f は \mathbb{R} で Lebesgue 可積分とする。(これは f が Lebesgue 可測な関数で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

が成り立つことを意味する。) このとき、 f の Fourier 変換

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

は、 \mathbb{R} で有界かつ連続である。

(また f の共役 Fourier 変換も \mathbb{R} で有界かつ連続である。)

証明 まず任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\mathcal{F}f(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

が成り立つ (ξ によらない有限の数で抑えられる) ので、 $\mathcal{F}f$ は \mathbb{R} で有界である。

また任意の $\xi \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|\mathcal{F}f(\xi+h) - \mathcal{F}f(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{-ix(\xi+h)} - e^{-ix\xi}) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-ixh} - 1| dx$$

であるが、

$$|f(x)| |e^{-ixh} - 1| \leq 2|f(x)|, \quad \int_{-\infty}^{\infty} 2|f(x)| dx < \infty$$

であるから、Lebesgue の収束定理 (定理 E.2.1) によって ($\varphi(x) := 2|f(x)|$ として適用する)

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathcal{F}f(\xi + h) - \mathcal{F}f(\xi)| = 0.$$

これは f が ξ で連続なことを意味している。■

注意 E.3.2 本文中で、 $a > 0$ とするとき

$$f(x) = \frac{\sin(ax)}{ax}$$

の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{2\pi} \times \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a) \\ \frac{1}{4a} & (\xi = \pm a) \end{cases}$$

である、ということを紹介した。この例では、 f が実は Lebesgue 可積分でなく、 $\mathcal{F}f$ は不連続になっている。「Lebesgue 可積分な関数の Fourier 変換」の範囲外であることを理解しよう。

Lebesgue 積分可能な関数 f の Fourier 変換 $\mathcal{F}f$ は、有界かつ連続な関数であることが分かったが、Lebesgue 積分可能であるとは限らない。

(もしもそうならば、 f は $\mathcal{F}f$ の共役 Fourier 変換に等しいことが期待されるが、そうすると f は有界連続である必要があり、一般には「Lebesgue 積分可能な関数は有界かつ連続」は成り立たないので、矛盾が生じるからである。)

以上のことから、反転公式などが使える理論を展開するには、Lebesgue 積分可能な関数という枠はあまり便利でないことが分かる。

E.4 Lebesgue の意味で自乗可積分な関数の Fourier 変換

Fourier 変換の L^2 理論というのは、非常にまとまりのある話で、学ぶ価値が高い。

扱う関数として、 f の自乗 f^2 (あるいは結局は同じことだが、 $|f|^2$) が Lebesgue 積分の意味で積分可能であることを考える。

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue 可測, } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

という集合に属する f を対象にする、ということである。

$L^1(\mathbb{R})$ と異なり、Fourier 変換しても同じ範囲に属している、という重要な性質が成り立つ。すなわち

命題 E.4.1 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、 $\mathcal{F}f$ と \mathcal{F}^*f は $L^2(\mathbb{R})$ に属する。

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx$$

とおき、これを f と g の内積と呼ぶ。また

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)}$$

とおき、これを f のノルムと呼ぶ。

定理 E.4.2 $L^2(\mathbb{R})$ は、上で定義した内積のもとで、Hilbert 空間 (完備な内積空間) である。

証明 非常に重要であるけれど省略する。Lebesgue 積分や関数解析のテキストに載っていることが多い。 ■

定理 E.4.3 (1) 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、 $\mathcal{F}f, \mathcal{F}^*f \in L^2(\mathbb{R})$ である。

(2) 任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$(f, g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$$

が成り立つ。特に

$$\|\mathcal{F}f\| = \|\mathcal{F}^*f\| = \|f\|.$$

まず

$$(E.2) \quad L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R}), \quad L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$$

であることに注意しよう。

- $f \in L^2(\mathbb{R})$ としても、 $f \in L^1(\mathbb{R})$ とは限らないので、 $f(x)e^{-ix\xi}$ は Lebesgue 積分可能とは限らず、 f の Fourier 変換は、普通の積分の意味では確定しない場合がある。
- それから、Lebesgue 積分可能な関数の中に、 $L^2(\mathbb{R})$ に属さないものがあるため、 f が Lebesgue 積分可能であるが、この節で説明する理論は適用できない、ということがある。

問 8. 以下のことを示せ。

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \pi$$

であるから、 $f \notin L^1(\mathbb{R})$ かつ $f \in L^2(\mathbb{R})$. また

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \infty$$

であるから、 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \notin L^2(\mathbb{R})$.

付録F Fourier変換に関する事項のもう少し数学的な取り扱い (旧版)

本文中では、積分や級数の収束については問題にしなかったところが多い。変換したものがどういふ集合に属するかについても論じなかった。ここではその辺を少し述べてみる。

F.1 記号表

Ω を \mathbb{R} の Lebesgue 可測集合とする。ただし Ω 上ほとんど至る所等しい複素数値関数は同一視する。

$1 \leq p < \infty$ に対して $L^p(\Omega)$ は Ω で定義された可測関数で、 p 乗可積分であるもの全体の集合を表すとする。

$$L^p(\Omega) := \left\{ f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ は Lebesgue 可測}, \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

$f \in L^p(\Omega)$ に対して、

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

可測関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\|f\|_{\infty} := \operatorname{ess.\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

ただし $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $\operatorname{ess.\,sup}_{x \in \Omega} g(x)$ とは、次式で定義される g の本質的上限を表す。

$$\operatorname{ess.\,sup}_{x \in \Omega} g(x) := \inf \{ M \mid \mu(\{x \in \Omega \mid g(x) > M\}) = 0 \}.$$

$$L^{\infty}(\Omega) := \{ f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ は Lebesgue 可測}, \|f\|_{\infty} < \infty \}.$$

F.2 \mathbb{R} 上の関数の Fourier 変換と畳込み

F.2.1 $L^1(\mathbb{R})$ に属する関数についての定義

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$(F.1) \quad \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

で定まる $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を f の Fourier 変換 (the Fourier transform of f) と呼び、 \mathcal{F} を Fourier 変換 (the Fourier transformation) と呼ぶ。

\mathcal{F} の逆変換は、

$$(F.2) \quad \mathcal{F}^*g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

で定義される \mathcal{F}^* である。この \mathcal{F}^* は逆 Fourier 変換、あるいは共役 Fourier 変換と呼ばれる。

$f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R})$ であるとき、 $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g$ はそれぞれ (F.1), (F.2) によって (普通の Lebesgue 積分として) 定義される。

$f \in L^1(\mathbb{R})$ とするとき、

$$(F.3) \quad \widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}), \quad \|\widehat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1,$$

$$(F.4) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

(F.4) を **Riemann-Lebesgue の定理** と呼ぶ。

F.2.2 $L^2(\mathbb{R})$ に属する関数についての定義

$L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ であるので、 $f \in L^2(\mathbb{R})$ であっても、(F.1) で $\mathcal{F}f$ を定義することは出来ない。

$f \in L^2(\mathbb{R})$ とするとき、

$$f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$$

となる $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を取ると、 $L^2(\mathbb{R})$ の Cauchy 列になる。そこで

$$\widehat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f_n} \quad (\text{in } L^2(\mathbb{R}))$$

として $\mathcal{F}f = \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ を定義する。($\{f_n\}$ の取り方によらずに $\mathcal{F}f$ が定まることが示せる。)

$g \in L^2(\mathbb{R})$ に対する \mathcal{F}^*g も同様に定義する。

$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \mathcal{F}^*: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ はともに全単射あり、 $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ 。

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ は連続であり、さらに次の意味で等長である。実際 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

が成り立つ。これを **Parseval の等式** と呼ぶ。

形式的な証明は

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \right) \overline{f(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(\xi) \overline{f(x)} e^{i\xi x} dx \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Parseval の等式は L^2 内積 (\cdot, \cdot) を用いると、 $(f, f) = (\widehat{f}, \widehat{f})$ と書ける (あるいは $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$)。これから $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g})$$

が得られる。これを示すには

$$(f, g) = \frac{1}{4} (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2)$$

を利用すれば良い。

要するに、 $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ は Hilbert 空間としての同型写像であり、いわゆる unitary 変換である。

F.2.3 その他の空間での Fourier 変換

急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は、 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ を満たすので、任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{F}f$ が定義できるが、実は $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であり、さらには $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ は同型写像 (全単射かつ逆写像も込めて連続) になる。

緩増加超関数の空間 \mathcal{S}' に対して、 $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ が定義され、やはり同型写像となる。

F.2.4 畳込み

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ のとき、

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

で関数 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が定まるとき、 $f * g$ を f と g の**畳込み** (合成積, the convolution of f and g) という。非有界領域における積分であるから、 $f * g$ が有限であるかどうかはケース・バイ・ケースである。

命題 F.2.1 (1) $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ とするとき、 $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ で、

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

(2) (Minkowski の不等式) $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ とするとき、 $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ で、

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}.$$

(3) (Young の不等式) $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ が

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

を満たし、 $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^r(\mathbb{R})$ とするとき、 $f * g \in L^q(\mathbb{R})$,

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}.$$

(1) は (2) の特殊な場合であるが、覚えやすいので別々に書いておいた。

証明 多くの本に載っている。例えば Grafakos [47] 等を見よ。■

問 4. $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [-1, 1]) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ とするとき、 $f * f$ を求めよ。

(交換法則) $f * g$ が定義できるときは、 $g * f$ も定義できて

$$f * g = g * f.$$

(線形性) $f_1 * g$ と $f_2 * g$ が定義できるときは、 $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対して $(c_1 f_1 + c_2 f_2) * g$ も定義できて

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2) * g = c_1 (f_1 * g) + c_2 (f_2 * g).$$

(結合法則)

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

F.2.5 畳込みと Fourier 変換

f と g の畳み込みの Fourier 変換は、 f と g の Fourier 変換の積である:

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f \mathcal{F}g.$$

(この式がどういう仮定のもとで成り立つか、調べること。)

F.2.6 Fourier 変換の流儀

Fourier 変換のどう定義するか、テキストによって様々な流儀がある。

いずれの場合も、逆 Fourier 変換 (共役 Fourier 変換) は、反転公式が成り立つように定義される。

Parseval の等式 $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$ や、「畳み込みの Fourier 変換は、それぞれの Fourier 変換の積である」という公式については、流儀によって、異なる定数因子が現れることがある。

この定義で採用した Fourier 変換、逆 Fourier 変換については、

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2, \quad \mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f \mathcal{F}g.$$

余談 F.2.2 f の Fourier 変換を

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

で定めると (信号処理の本はこれを定義に採用することが多い)、

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}f \mathcal{F}g$$

となる。これだけ見ると、こちらの流儀の方が簡明なように見えるが、こうすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (\|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2)$$

となるので、 $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ は unitary 変換にならない。「こちらを立てると、あちらが立たない」というわけである。

なお、逆変換は

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

である。■

余談 F.2.3 f の Fourier 変換を

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ix\xi} dx$$

で定義してみよう (この流儀で Fourier 変換を定義している本には、伊藤 [18] などがある)。そのとき

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}f \mathcal{F}g$$

となる。また

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2)$$

となるので、 $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ は unitary 変換である。

逆変換は

$$\tilde{g}(x) = \mathcal{F}^*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{2\pi ix\xi} d\xi$$

である。

この流儀は割ときれいであると思うのだが、採用している本が少ないようである。毎度 $2\pi i$ を書くのが面倒だからだろうか? ■

F.2.7 その他

$\widehat{f}(\xi)$ を周波数スペクトル、 $|\widehat{f}(\xi)|$ をエネルギー・スペクトルと呼ぶことがある。

f が実数値であれば、 $\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi)$ であるから、特に $|\widehat{f}(\xi)| = |\widehat{f}(-\xi)|$ 、すなわちエネルギー・スペクトルは原点に関して対称である。

命題 F.2.4 (Poisson の和公式) $f \in C(\mathbb{R})$ に対して、

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |f(x+m)|$$

が $[0, 1]$ で一様収束し、 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ が絶対収束するならば

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

証明 伊藤 [17] の pp. 227-228 にある。 ■

F.3 \mathbb{R} 上の周期 2π の関数の Fourier 変換と畳み込み

周期 2π の周期関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定まる $\widehat{f} = \{\widehat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を f の Fourier 係数と呼ぶ。

$\mathcal{F}: L^2(-\pi, \pi) \ni f \mapsto \{\widehat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ は全単射な線形写像で、連続かつ逆写像も連続である。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数であるとき、 $f * g$ は

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定義される関数 $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数である。

畳み込みの Fourier 係数は、Fourier 係数の積に等しい:

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

すなわち

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}f\mathcal{F}g.$$

F.4 \mathbb{Z} 上の関数の離散時間 Fourier と畳み込み

$x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{F}x(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

で定義される周期 2π の関数 $\mathcal{F}x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を、 x の離散時間 Fourier 変換と呼ぶ。

$x, y: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ について、 $x * y$ は

$$x * y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(n - k)y(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定義される関数 $x * y: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ である。

f と g の畳み込みの離散時間 Fourier 変換は、 f と g の離散時間 Fourier 変換の積である:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}f\mathcal{F}g.$$

付録G 離散 Fourier 変換についてのガラク 夕箱

G.1 離散 Fourier 係数を用いた級数の和

この節の内容はそのうち講義しようとして 2016 年頃用意したのですが、講義する可能性は低そうなので、付録に回すことにしました。

最初に結論を述べる。

命題 G.1.1 $\{C_n\}$ を、周期 2π の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の N 項離散 Fourier 係数とする。すなわち、

$$(G.1) \quad h = \frac{2\pi}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j = f(x_j), \quad \omega = e^{ih}, \quad C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}.$$

このとき、 N 項部分 and $S_N(x)$ を

$$(G.2) \quad S_N(x) := \begin{cases} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} C_k e^{ikx} & (N \text{ が偶数のとき}) \\ \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} C_k e^{ikx} & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

で定めると

$$S_N(x_j) = f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ。すなわち s_N は f の補間関数である。また、標本点上での値 $\{S_N(x_j)\}$ を求めるには、 $\{C_n\}$ を逆離散 Fourier 変換すれば良い。

証明に入る前に、(G.2) と定義することが自然であることを説明する。

Fourier 級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx)$$

は普通

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), \quad s_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

と解釈される。部分 and $s_n(x)$ については、実は

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

が成り立つので、この解釈は自然であろう。

離散 Fourier 係数 C_k が求まっているとき、それを用いて Fourier 級数 (の和) を近似計算することが考えられる。素朴に考えると、 $s_n(x)$ に現われる Fourier 係数 c_k を C_k で置き換えた

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{ikx} \quad (\text{この式は採用しない})$$

を使うことが思い浮かぶが、 $2n + 1$ 個の独立した離散 Fourier 係数 C_k ($|k| \leq n$) を得るには、 $N \geq 2n + 1$ とする必要がある。 $N = 2n + 1$ とすると N が奇数になってしまうが、 N を奇数に限るとしたくないので (むしろ $N = 2^m$ のように偶数とする場合がほとんどである)、次のような工夫を思いつく。

$$(G.3) \quad S_N(x) := \sum'_{|k| \leq \frac{N}{2}} C_k e^{ikx},$$

ただし、 $\sum'_{|k| \leq N/2}$ は次のように定める。

(a) N が奇数のとき、'なしの普通の \sum とする。 $|k| \leq N/2$ を満たす整数 k は、 $k = -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2} + 1, \dots, \frac{N-1}{2}$ (これでちょうど N 個) であるから、具体的には

$$\sum'_{|k| \leq \frac{N}{2}} C_k e^{ikx} := \sum_{|k| \leq N/2} C_k e^{ikx} = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} C_k e^{ikx}.$$

(b) N が偶数のとき。 $N/2$ は自然数であり、 $|k| \leq N/2$ を満たす k は $k = -N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2$ と $N + 1$ 個ある (1つ多い)。ここでは

$$\sum'_{|k| \leq \frac{N}{2}} C_k e^{ikx} := \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} C_k e^{ikx}$$

と約束しておく¹。

証明 $x = x_j = jh$ のとき、 $e^{ikx} = e^{ikx_j} = e^{ikjh} = \omega^{kj}$ であり、これは k について周期 N であるから、 $C_k e^{ikx} = C_k \omega^{kj}$ も k について周期 N であるので

$$S_N(x_j) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} C_k \omega^{kj} \quad (N \text{ が偶数}) \\ \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} C_k \omega^{kj} \quad (N \text{ が奇数}) \end{array} \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \omega^{kj} = f_j = f(x_j). \blacksquare$$

注意 G.1.2 上の証明からすぐ分かるように

$$S_N(x) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} C_k e^{ikx}$$

¹その代わりに $\sum'_{|k| \leq \frac{N}{2}} C_k e^{ikx} := \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} C_k e^{ikx}$ としても、以下同様のことが成立するが、2つの定義法が一致するわけではないので、どちらかを選択する必要がある。

と定義しても、

$$S_N(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \omega^{kj} = f_j = f(x_j)$$

は成り立つ。■

標本点 x_j 以外の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $S_N(x)$ を求めたい場合にどうすべきかを考えてみよう。1つの x について $S_N(x)$ が計算したい場合は、定義式 (G.2) 通りに計算すれば良いが、例えば標本点の中間点 $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) での値をまとめて計算したい場合は、以下のような工夫がある (Fourier 変換の場合の §§2.4.3 の (2.23) を参照せよ)。

$x = x_j + \Delta x = jh + \Delta x$ とする。

$$S_N(x) = \sum_{|k| \leq \frac{N}{2}}' C_k e^{ikx} = \sum_{|k| \leq \frac{N}{2}}' C_k e^{ik(jh + \Delta x)} = \sum_{|k| \leq \frac{N}{2}}' (C_k e^{ik\Delta x}) \omega^{kj}$$

であるから、最初に Fourier 係数 C_k に $e^{ik\Delta x}$ をかけておけば、逆離散 Fourier 変換することで $S_N(x)$ が求められる。

FFTPACK を用いた C コード (そのうち FFTW に置き換え)

```
// workN[] は zfffti(N, workN); として初期化してあるとする。
// c[k] (0 ≤ k ≤ N-1) は離散フーリエ係数 C_k が記憶されているとする。
// x=j h+dx (j=0,1,...,N-1) での f_N(x) を計算する。
for (k = 0; k < N/2; k++) {
    d[k] = CMPLX(cos(k*dx), sin(k*dx));
    d[N-k] = conj(d[k]);
}
// N が奇数ならばこれで準備は済んでいる。N が偶数のときはもう一仕事
if (N % 2 == 0)
    d[N/2] = CMPLX(cos(N*dx/2), -sin(N*dx/2));
for (k = 0; k < N; k++)
    r[k] = c[k] * d[k];
zffftb(N, r, workN);
// r[j] に f_N(x_j+dx) が記憶されている。
```

G.2 数学的応用 1 巡回行列

N 次正方行列 $C = (c_{ij})$ が巡回行列 (circulant) であるとは、長さ N の数列 L_0, L_1, \dots, L_{N-1} が存在して

$$c_{ij} = L_\ell, \quad \ell = (j - i) \bmod N$$

となることをいう。すなわち

$$C = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 & \cdots & L_{N-2} & L_{N-1} \\ L_{N-1} & L_0 & L_1 & & L_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ L_2 & & \ddots & L_0 & L_1 \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_{N-1} & L_0 \end{pmatrix}.$$

このとき、 $U := \frac{1}{\sqrt{N}} (\omega^{-nj})$ として

$$U^* C U = \text{diag} [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}] = \begin{pmatrix} \varphi_0 & & & & 0 \\ & \varphi_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \varphi_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \varphi_p := \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-pj} L_j$$

のように対角化できる。 C の固有値、固有ベクトルが分かったわけだが、これから C^{-1} , $\det C$ など
が簡単に計算できる (結果は省略する)。

付録H 微分方程式

これは別の講義ノート ([3]) から引っ張ってきた。

H.1 1次元空間 \mathbb{R}^1 における波動方程式

H.1.1 d'Alembert の解

無限の長さの様な弦の振動を考えよう。言い換えると

$$(H.1) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

を満たす $u = u(x, t)$ を考える。(c は正定数であると仮定する。)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の C^2 級の関数とすると、

$$(H.2) \quad u(x, t) := f(x - ct) + g(x + ct)$$

で定義される u が (H.1) を満たすことを確認するのは容易である (すぐ後で述べる)。実はその逆も成り立つ。定理としてまとめておこう。

定理 H.1.1 (波動方程式の一般解) (1) 任意の C^2 級関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 u を (H.2) で定義すると、 u は (H.1) を満たす。

(2) C^2 級の関数 $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が (H.1) を満たすならば、(H.2) を満たす C^2 級の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

証明 共に合成関数の微分法の応用である¹。(1) は

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= f'(x - ct) \cdot (-c) + g'(x + ct) \cdot c, \\ u_{tt}(x, t) &= f''(x - ct) \cdot (-c)^2 + g''(x + ct) \cdot c^2 = c^2(f''(x - ct) + g''(x + ct)), \\ u_x(x, t) &= f'(x - ct) + g'(x + ct), \quad u_{xx}(x, t) = f''(x - ct) + g''(x + ct) \end{aligned}$$

より明らか。(2) については、変数変換 $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$ を

$$(H.3) \quad \xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

で定めて、 $v(\xi, \eta) = u(x, t)$ とおくと、まず

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}$$

¹高校で、 f が微分可能で、 a と b を定数とすると、 $(f(ax + b))' = af'(ax + b)$ という公式を学んだ。ここで出て来る u は多変数関数であるが、偏微分の計算は1変数関数の微分と同じであるので、この高校数学の公式が適用できることに注意しよう。

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -c \frac{\partial v}{\partial \xi} + c \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(-c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(-c \frac{\partial v}{\partial \xi} + c \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right).\end{aligned}$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$$

となるが、 u が波動方程式 $\frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{xx}$ を満たすことから、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

これから $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ は ξ に依らない、つまり η だけの関数であることが分かる²:

$$\exists G \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad \text{s.t.} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = G(\eta).$$

G の原始関数、すなわち $g'(\eta) = G(\eta)$ となる関数 g を 1 つ取ると、それは $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ の元であり、

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (v(\xi, \eta) - g(\eta)) = \frac{\partial v}{\partial \eta} - G(\eta) = 0.$$

これから $v(\xi, \eta) - g(\eta)$ は η に依らない、つまり ξ だけの関数であることが分かる:

$$\exists f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad \text{s.t.} \quad v(\xi, \eta) - g(\eta) = f(\xi).$$

これから

$$u(x, t) = v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct). \blacksquare$$

つまり (H.2) は、(H.1) の (いわゆる) 一般解を表わしていると考えられる³。この解を発見者にちなんで **d'Alembert の解** と呼ぶ。 $f(x - ct)$ は x 軸の正方向に速さ c で進む波、 $g(x + ct)$ は x 軸の負方向に速さ c で進む波を表わしている。

² 「 $f = f(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ が $f_x \equiv 0$ を満たすならば、 $f(x, y) = f(0, y)$ ($\forall y \in \mathbb{R}$) が成り立つ。」という命題が簡単に証明できる。実際、一般に $f(x, y) = f(0, y) + \int_0^x f_x(t, y) dt$ が成り立つことから証明できる。あるいは、平均値の定理を使っても証明できる。

³ 「微分方程式の一般解を得てから、初期条件などの条件を用いて特定の解を選びだす」という手順は、常微分方程式の問題ではしばしば出て来たが、偏微分方程式の問題では滅多にない。この (空間) 1 次元の波動方程式は例外と言える。

余談 H.1.2 (H.2) や、(H.3) をどうやって見つけるのか？ということの説明すべきかも知れないが、ここではさぼらしてもらう。一つの回答は、

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

という微分作用素の因数分解が出来て、それぞれの因数が $2\frac{\partial}{\partial \eta}$ と $2\frac{\partial}{\partial \xi}$ になる、ということである。

H.1.2 波動方程式の初期値問題, d'Alembert の波動公式

(H.1) を満たす解 $u = u(x, t)$ は無数に存在し、解を一つに特定するためには、何か他に条件を追加しなければならない。代表的なものは、特定の時刻 (ここでは $t = 0$) における状態を指定する条件である。

$$(H.4) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

条件 (H.1) と (H.4) を同時に満たす $u = u(x, t)$ を求めよ、という問題を**初期値問題** (initial value problem) または **Cauchy 問題** (Cauchy problem) と呼ぶ。また (H.4) を**初期条件** (initial condition) と呼ぶ。波動方程式は時刻 t について 2 階であることから、初期条件の式が二つになっていることに注目しよう。二つの関数 ϕ と ψ を**初期値** (initial values) と呼ぶ。

前項で見たように、(H.1) を満たす u の一般形 (H.2) が得られた。そこで、初期条件 (H.4) を満たすように、(H.2) 中の f, g を定められれば初期値問題が解けることになるが、これが実際に可能であることを以下に示す。初期条件に (H.2) を代入すると

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \phi(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ c(-f'(x) + g'(x)) &= \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

となる。後者から

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(y) dy - f(0) + g(0) \quad (x \in \mathbb{R})$$

が得られるので、連立 1 次方程式を解いて

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\phi(x) - \frac{1}{c} \int_0^x \psi(y) dy + f(0) - g(0) \right), \\ g(x) &= \frac{1}{2} \left(\phi(x) + \frac{1}{c} \int_0^x \psi(y) dy - f(0) + g(0) \right). \end{aligned}$$

これから

$$(H.5) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

これを ^{ダランベール}**d'Alembert の波動公式**あるいは **Stokes の公式**と呼ぶ (Euler による、1750 年頃の結果⁴⁾。以上をまとめると次の定理を得る。

定理 H.1.3 (1次元波動方程式の初期値問題の解の一意存在) $\phi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$ ならば、波動方程式の初期値問題 (H.1), (H.4) の C^2 級の解が一意的に存在し、それは d'Alembert の波動公式 (H.5) で与えられる。

⁴Euler が得た結果なのに、なぜ d'Alembert や Stokes の名を冠されるのだろうか？ともあれ、簡単であるから 1750 年という早い時期に解けたのだろうが、偏微分方程式の問題がこんなに簡単かつ鮮やかに解けるのは奇跡のような気がする。

興味があったらやってみよう 次の各場合に d'Alembert の波動公式で解を計算し、それがどうい
う波を表わすか考えてみよ (コンピューターが使える場合、アニメーションを表示してみよう)⁵。

(1) $\phi(x) = \sin x, \psi(x) \equiv 0$.

(2) $\phi(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (-1, 1)) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}, \psi(x) \equiv 0$.

(3) $\phi(x) = 0, \psi(x) = \sin x$.

問 9. $\phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ とするとき、

$$u(x, t) := \frac{1}{2}(\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy \quad ((x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

で定めた u が

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満すことを直接計算で示せ。

⁵実は (2) の場合、d'Alembert の波動公式に機械的に代入することによって u は簡単に「求まる」が、不連続関数になってしまう。不連続関数をどうやって微分方程式の解と考えるのか、頭をひねらねばならないところであるが、この結果は物理的にそれなりにもっともなものになっている。この辺りの事情は後述する熱伝導方程式とは対照的である。熱伝導方程式の解は、最初に不連続性があっても、すぐに解は滑らかになってしまうが、波動方程式の解においては、不連続性は消滅せずに伝搬していく。実用面から見ても、波動現象においては、衝撃波のような、不連続な関数で表現するほうがむしろ適当なものを扱う必要があるため、これは重要な問題である。

付録I $[0, \infty)$ 上の関数の Laplace 変換と畳み込み

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ とするとき、 $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で定めて、 f の代わりに \tilde{f} を用いて、Fourier 変換や畳み込みを定義することも出来るが、Laplace 変換を使うという方法も有用である。

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ とするとき、

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \quad (s \text{ は複素変数})$$

で定まる $\mathcal{L}f$ を f の **Laplace 変換** (the Laplace transform of f) と呼ぶ。

g の **逆 Laplace 変換** (the inverse Laplace transform of g) とは

$$\mathcal{L}f = g$$

を満たす関数 f のことをいう。存在するならば一意に定まることが知られている。 $f = \mathcal{L}^{-1}g$ と書くことにする。

余談 I.0.1 (Laplace 逆変換の積分表示) g の特異点を含まない領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \gamma\}$ において、 g の Laplace 逆変換 $\mathcal{L}^{-1}g$ は、Bromwich 積分

$$\mathcal{L}^{-1}g(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} g(s)e^{st} ds$$

で求められる。■

$f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ のとき、 $f * g$ は

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y) dy \quad (x \in [0, \infty))$$

で定義される関数 $f * g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ である。実は

$$f * g(x) = \tilde{f} * \tilde{g}(x) \quad (x \geq 0)$$

であるから、?? 節の結果から、こちらの畳み込みの性質のいくつかを導くことが出来る。

f と g の畳み込みの Laplace 変換は、 f と g の Laplace 変換の積である:

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}f \mathcal{L}g.$$

付録J メモ

J.1

周期関数の Fourier 変換には超関数が必要になるが、遠方で 0 にカットして Fourier 変換したらどうなるだろう？

$$f_m(x) = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq m\pi) \\ 0 & (|x| > m\pi) \end{cases}$$

```
FourierTransform[If[Abs[x] < Pi, Sin[x], 0], x, y]
```

結果はなるほどである。

$$f(x) = e^{i\frac{2\pi x}{T}}$$

として、

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| \leq mT) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 T とする。

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}x} dx$$

とおくと、

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}x}.$$

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| \leq mT/2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする。

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

であるから、

$$\hat{f}_m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-mT/2}^{mT/2} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

特に

$$\hat{f}_m(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{-mT/2}^{mT/2} f(x) e^{-inx} dx$$

J.2 sinc

(ここは本文に書いたから要らないのかも。チェックして削除する。)

有名な sinc という関数は次式で定義される。

$$\text{sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

実はこれは非正規化 sinc と呼ばれる。信号処理の分野では

$$\text{正規化 sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

で定義される正規化 sinc 関数も使われる ([48] がそうなっている)。以下の Mathematica の Sinc[] は非正規化 sinc である。この文書では一貫して非正規化 sinc を使うことにする。

Mathematica で sinc のグラフ描画

```
g = Plot[Sinc[x], {x, -15, 15}, PlotRange -> Full]
```

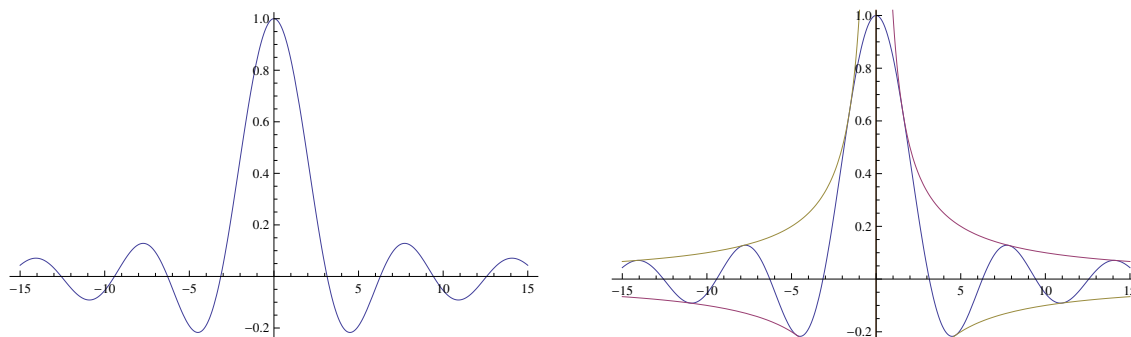


図 J.1: 左は $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ のグラフ, 右は $\pm \frac{1}{x}$ のグラフを重ねた

滑らかな偶関数で、 $x = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) が零点で、グラフは $y = \pm \frac{1}{|x|}$ で挟まれた部分を上下している。

sinc が重要視される理由は次の事実にある。 $\omega_p \in (0, \pi)$ とするとき、区間 $[-\omega_p, \omega_p]$ の特性関数 $\chi_{[-\omega_p, \omega_p]}$ の逆 Fourier 変換¹は $\frac{\omega_p}{\pi} \text{sinc } \omega_p t$ である。実際、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\omega_p, \omega_p]}(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_p}^{\omega_p} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i\omega t}}{it} \right]_{\omega=-\omega_p}^{\omega=\omega_p} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}}{it} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_p t}{t} \\ &= \frac{\omega_p}{\pi} \text{sinc } \omega_p t. \end{aligned}$$

J.3 復習: 周期、周波数、角周波数

周期の逆数を周波数と呼ぶ。周波数に 2π をかけたものを角周波数と呼ぶ。

$x(t) = e^{i\Omega t}$ という正弦波の角周波数は Ω である。周波数、周期をそれぞれ F, T とすると、

$$F = 2\pi\Omega, \quad T = \frac{1}{f}.$$

¹フーリエ変換の定義には色々な流儀があるが、?? 節の「流儀 2」を採用した。

サンプリングするとき、サンプリング周波数を F_s とすると、サンプリング周期 T_s 、サンプリング角周波数 Ω_s は

$$T_s = \frac{1}{F_s}, \quad \Omega_s = 2\pi F_s.$$

付録K Laplace 変換、z 変換

Laplace 変換、z 変換まで含めて話が出来れば良いのだけど…

K.0.1 Laplace 変換

$x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ の Laplace 変換とは

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} X(s)e^{st} ds.$$

ただし α は Laplace 変換の収束域が $\operatorname{Re} s > \gamma$ であるとして、 $\alpha > \gamma$ であるように選ぶ (自由度があるがどれを取っても同じ)。

K.1 z 変換

整数全体の集合を \mathbb{Z} , 1 以上の整数全体の集合を \mathbb{N} , $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。

以下、数列 $\{x_n\}$ の話として説明するが、関数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と、 $T > 0$ に対して $x_n = x(nT)$ とおくことで、関数のサンプリングデータの話と考えることも出来る。

数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ に対して、

$$(K.1) \quad X(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} \quad (z \in \mathbb{C}, \text{ただし収束する場合})$$

で定義される $X = X(z)$ を $\{x_n\}$ の **z 変換** (two-sided z-transform) と呼ぶ。

(一般に数列 $\{a_n\}$ に対して、母関数と呼ばれる関数 $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ を考え ($\{\varphi_n\}$ の選び方は色々ある)、その性質を調べることで数列を解析する、というテクニックがある。その一例となっている。)

$X = X(z)$ が円環領域 $\{z \in \mathbb{C}; 1/\kappa < |z| < \kappa\}$ における正則関数であれば、関数 X の Laurent 級数展開であるとみなせる。ゆえに x_n は $X(z)$ の Laurent 展開の z^{-n} の係数であり、

$$(K.2) \quad x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

これを **z 変換の反転公式** と呼ぶ。(実際、 x_n は関数 $X(z)$ の Laurent 級数展開の z^{-n} の係数であるから、 $x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{X(z)}{z^{-n+1}} dz$ となるはず。)

$x, y, h \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ とそれらの z 変換 X, Y, H の間には

$$(K.3) \quad y = x * h \quad \Rightarrow \quad Y(z) = X(z)H(z)$$

の関係がある。

Laplace 変換の場合の片側 Laplace 変換と同様に、

$$(K.4) \quad X(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}$$

を $\{x_n\}$ の片側 z 変換と呼ぶ。 $\{x_n\}_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に対しては、単に $\{x_n\}$ の z 変換と呼ぶ。

余談 K.1.1 (ほかの概念との関係) 数列用のラプラス変換のようなもの、という見方も出来る。

Laplace 変換は、この講義ではこれまで説明しなかったが、

$$\mathcal{L}[x](s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

で定義される (普通は \int_0^{∞} という片側 Laplace 変換が良く使われる)。変数 s として複素変数を許すと、Fourier 変換と関係がつけられる。実際

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}[f(x)](i\xi).$$

— Laplace 変換の虚軸上の値が Fourier 変換である — が成り立つ。後で見るように、 z 変換と離散時間 Fourier 変換の間関係もそれに近い (z 変換の単位円周上の値が離散時間 Fourier 変換である)。■

参考文献

- [1] ジョゼフ・フーリエ著, ガストン・ダルブー編: 熱の解析的理論, 大学教育出版 (2005), 竹下貞雄訳. 有名な Par M. Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier), *Théorie analytique de la chaleur* (初版は Paris で 1822 年に出版される) の翻訳.
- [2] フーリエ著, 西村 重人翻訳, 高瀬 正仁翻訳, 監修, 解説: フーリエ 熱の解析的理論, 朝倉書店 (2019/10/15).
- [3] 桂田祐史: 微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」), <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/pde/pde2013.pdf> (1997 年~).
- [4] Körner, O. H.: *Fourier analysis*, Cambridge Univ. Press (1990), (邦訳) フーリエ解析大全, 高橋陽一郎訳, 朝倉書店 (1996).
- [5] クロード・E. シャノン: 通信の数学的理論, 筑摩書房 (2009), 1948 年の論文 [25] の翻訳. ワレン ウィーバー (解説), 植松 友彦 (翻訳, 解説).
- [6] Cooley, J. W. and Tukey, J. W.: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Mathematics of Computation*, Vol. 19, No. 90, pp. 297–301 (1965), <http://www.ams.org/journals/mcom/1965-19-090/S0025-5718-1965-0178586-1/S0025-5718-1965-0178586-1.pdf> で公開されている。
- [7] Gibbs, J. W.: Fourier Series, *Nature*, Vol. 59, 200, (1898), The collected works of J. Willard Gibbs. Vol. II (<http://catalog.hathitrust.org/Record/001477419>) に収録.
- [8] Gibbs, J. W.: Fourier Series, *Nature*, Vol. 59, 606, (1899), The collected works of J. Willard Gibbs. Vol. II (<http://catalog.hathitrust.org/Record/001477419>) に収録.
- [9] T. W. ケルナー: フーリエ解析大全 上・下, 朝倉書店 (1996), 高橋 陽一郎 訳.
- [10] 藤田宏, 黒田成俊^{しげとし}, 伊藤清三: 関数解析, 岩波書店 (1991), 岩波講座 基礎数学 (1978 年) の書籍化.
- [11] 吉田 耕作・加藤敏夫: 大学演習 応用数学 I, 裳華房 (1961).
- [12] Woodward, P. M. and Davies, I. L.: Information theory and inverse probability in telecommunication, *Proceedings of the IEEE - Part III: Radio and Communication Engineering*, Vol. 99, No. 58, pp. 37–44 (March 1952).
- [13] Stenger, F.: *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer (1993, 2011).
- [14] 竹内淳: 高校数学でわかるフーリエ変換, 講談社ブルーバックス, 講談社 (2009/11/20).
- [15] 杉浦光夫: 解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), MIND からは <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843> でアクセス可能である.

- [16] 杉浦光夫：解析入門 II, 東京大学出版会 (1985), MIND からは <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046844> でアクセス可能である。
- [17] 伊藤清三：ルベーク積分入門, 裳華房 (1963).
- [18] 伊藤清三：偏微分方程式, 培風館 (1966, 1983).
- [19] 熊ノ郷 準^{くまの ごうひとし}：偏微分方程式, 共立出版 (1978).
- [20] 大浦拓哉：FFT (高速フーリエ・コサイン・サイン変換) の概略と設計法, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/fftman/> (1997～).
- [21] 大浦拓哉：高速 Fourier 変換の概略メモ, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/fftman/fft_note_s.pdf (2005).
- [22] 松山周五郎：音の Fourier 解析, 2003 年度卒業研究レポート, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/open/2003-matsuyama.pdf> (2004).
- [23] 木村英紀^{ひでのり}：Fourier-Laplace 解析, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1993).
- [24] Nyquist, H.: Certain topics in telegraph transmission theory, *Transactions*, Vol. 47, No. 2, pp. 617–644 (1928).
- [25] Shannon, C. E.: A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, No. 3, pp. 379–423 (1948).
- [26] 染谷勲：波形伝送, 修教社 (1949).
- [27] Whittaker, E. T. and Watson, G. N.: *A Course of Modern Analysis: An Introduction to the General Theory of Infinte Processes and of Analytic Functions; With an Account of the Principal Transcendental Functions*, Ams Pr Inc (1915).
- [28] Butzer, P. L., Ferreira, P. J. S. G., Higgins, J. R., Saitoh, S., Schmeisser, G. and Stens, R. L.: Interpolation and Sampling: E. T. Whittaker, K. Ogura and Their Followers, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, Vol. April 2011, Volume 17, Issue 2, pp 320-354, (2011), http://blog.goo.ne.jp/kei_matsuura2007/e/4a3d79de5b7b5873961ab48e06d8c0cd で教えてもらった。
- [29] 一般社団法人 電子情報通信学会編：電子情報通信学会創立 100 周年記念 マイルストーン— 100 年の偉業を振り返り未来に繋ぐ (2017), <https://www.ieice.org/jpn/100th/milestone.html> で公開されている。
- [30] Yosida, K.: *Functional analysis, sixth edition*, Springer (1980).
- [31] 新井仁之：有理型関数, 数学のかんどころ 37, 共立出版 (2018/12/25).
- [32] Radon, J.: On the Determination of Functions From Their Integral Values Along Certain Manifolds, *Berichteder Sachsischen Akadamie der Wissenschaft*, Vol. vol. 69, pp. pp. 262–277 (1917), IEEE TRANSACTIONS ON MEDICAL IMAGING, VOL. MI-5, NO. 4, DECEMBER 1986 に英語訳がある。
- [33] 大石進一：フーリエ解析, 岩波書店 (1989).

- [34] 船越満明：キーポイント フーリエ解析, 岩波書店 (1997).
- [35] 小出昭一郎：物理現象のフーリエ解析, 東京大学出版会 (1981), 2018年ちくま学芸文庫に入った。
- [36] 新井^{ひとし}仁之：フーリエ解析と関数解析学, 培風館 (2001).
- [37] 中村周：フーリエ解析, 朝倉書店 (2003).
- [38] エリアス・M. スタイン, ラミシャカルチ：複素解析, 日本評論社 (2009).
- [39] 岡本^{きよさと}清郷：フーリエ解析の展望, 朝倉書店 (1997/11, 2011).
- [40] Oppenheim, A. V. and Schaffer, R. W.: *Discrete Time Signal Processing*, Prentice-Hall (2009), これは第3版.
- [41] 藤田宏：三訂版 応用数学, 放送大学出版協会 (2000), 第7章『発展系の数値解析』は <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-0.pdf> から入手できる。
- [42] 柴田良弘：ルベーク積分論, 内田老鶴圃 (2006).
- [43] 吉田伸生：ルベーク積分入門 — 使うための理論と演習, 遊星社 (2006/5).
- [44] 岩田耕一郎：ルベーク積分 — 理論と計算手法, 森北出版 (2015).
- [45] 原啓介：測度・確率・ルベーク積分, KS 理工学専門書, 講談社 (2017/9/21).
- [46] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第1部, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf> (2008).
- [47] Grafakos, L.: *Classical Fourier Analysis*, Springer (2008).
- [48] 樋口龍雄, 川又^{まさゆき}政征：MATLAB 対応 デジタル信号処理, 昭晃堂 (2000).