2017年度 画像処理とフーリエ変換 期末試験問題

2018年1月24日 (水曜) 4限 (15:00〜16:00) 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下の6問の中から5問を選択して解答せよ。解答の順番は自由である。
以下で説明なしに用いている記号は講義に出て来たものである (分からない場合は質問すること)。

問 1. 周期 2π の関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$ $(-\pi < x \le \pi)$ を満たすとする。f のグラフを描き、f の Fourier 級数を求めよ。また、$g := f'$ とするとき (ただし f が微分できない点 x では、$g(x)$ は適当に定める)、g の Fourier 級数を求めよ。f と g の Fourier 級数は一様収束するかどうか、理由をつけて答えよ。

問 2. 正定数 a に対して、$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=e^{-ax^2}$ $(x\in\mathbb{R})$ により定めるとき、以下の問いに答えよ。(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\;dx$ を求めよ。　(2) $g(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$ $(\xi\in\mathbb{R})$ とおくとき、$g'(\xi)=-\dfrac{\xi}{2a}g(\xi)$, $g(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ が成り立つことを示せ。(3) g を求めよ。

問 3. 周期 N $(\in\mathbb{N})$ の周期数列 $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ の離散 Fourier 変換 $\mathscr{F}f$ を $\mathscr{F}f(n)=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} f(j)\omega^{-nj}$ $(n\in\mathbb{Z})$ で定める (ただし $\omega := e^{2\pi i/N}$)。また周期 N の周期数列 $f,g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ の畳込み $f*g$ を $f*g(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k)$ $(n\in\mathbb{Z})$ で定める。このとき、次の (1), (2) が成り立つことを示せ。

(1) $\{f*g(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は周期 N の周期数列である。

(2) 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して、$\mathscr{F}[f*g](n)=N\mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n)$ が成り立つことを示せ。

問 4. (1) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が C^1 級であり、$f(x)$ と $f'(x)$ は $|x|\to\infty$ のとき、十分速く減衰すると仮定する。このとき $\mathscr{F}[f'](\xi)=i\xi\mathscr{F}[f](\xi)$ が成り立つことを示せ。(2) f,g,h がいずれも $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ への関数であり、$|x|\to\infty$ のとき十分早く 0 に減衰し、$\mathscr{F}h=g\,\mathscr{F}f$ が成り立つならば、$G:=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}^*g$ とおくとき、$h=G*f$ が成り立つことを示せ。

問 5. F は線形定常デジタル・フィルター、$h=F[\delta]$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) F に離散信号 $x=\{e^{in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (ただし ω は実数とする) を入力したときの出力 $y=F[x]$ は、$y(n)=\widehat{h}(\omega)e^{in\omega}$ $(n\in\mathbb{Z})$ を満たすことを示せ。ただし $\widehat{h}(\omega):=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-ik\omega}$.

(2) ω_1,ω_2 は $0<\omega_1<\omega_2<\pi$ を満たすとする。F の周波数特性 $\widehat{h}(\omega)$ が

$$\widehat{h}(\omega)=\begin{cases} 1 & (\omega_1\le|\omega|\le\omega_2) \\ 0 & (|\omega|<\omega_1 \text{ または } \omega_2<|\omega|\le\pi)\end{cases}$$

を満たす場合の h を求めよ。

(3) 連続信号をサンプリング周波数 f_s でサンプリングした信号を、(2) のデジタルフィルター F に入力したとき、出力された信号はどのように変化するか説明せよ。

問 6. サンプリング定理について説明せよ。(定理を出来るだけ詳しく書き、例をあげて説明せよ。)

追試の用意をする人へ

授業中に折に触れて言っていることだけれど

- 証明の丸暗記は難しくて多分成功しない。基本的なこと (これはしっかり覚えておく) の積み木をするように練習をしておくこと。
- 積分については、微分と積分の順序交換、部分積分、変数変換が基本的な変形。
部分積分を間違える人はかなり多い。
- 覚えなさいと言った 5 つの関数 ($e^{-a|x|}$, $\frac{1}{x^2+a^2}$, $\operatorname{sinc}(ax)$, $\frac{1}{2a}\chi_{(-a,a)}$, e^{-ax^2}) の Fourier 変換は、自力で計算できるようにしておく。
- (対象とする関数の種類が 4 つあるが) Fourier 変換と共役 Fourier 変換の定義は覚えておこう。
- (対象とする関数の種類が 4...) $\mathcal{F}[f*g]$ がどうなるかの計算は、どれも似たようなもの。要点は以下の 3 つを順番に実行すること。

  1. $\displaystyle\int$ または $\displaystyle\sum$ の順序交換
  2. 変数変換
  3. 周期性から $\displaystyle\sum_{\ell=-k}^{N-k-1} = \sum_{\ell=0}^{N-1}$, $\displaystyle\int_{-\pi-y}^{\pi-y} = \int_{-\pi}^{\pi}$. あるいは極限を取ることから $\displaystyle\lim_{N_1,N_2\to+\infty}\sum_{\ell=-N_1-k}^{N_2-k} = \lim_{N_1,N_2\to+\infty}\sum_{\ell=-N_1}^{N_2}$. $\displaystyle\lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1-y}^{R_2-y} = \lim_{R_1,R_2\to+\infty}\int_{-R_1}^{R_2}$.

解説

問 1　(結果のみ)

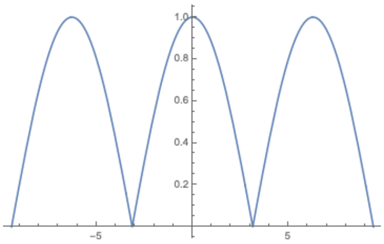

図 1: f のグラフ

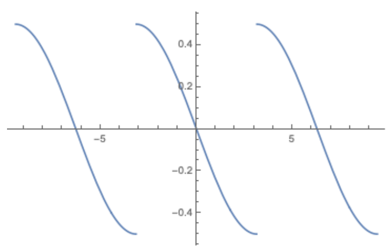

図 2: g のグラフ

$$f(x) = \cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}\cos nx$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}n}{(1-4n^2)\pi}\sin nx$$

f の Fourier 級数は一様収束するが、g の Fourier 級数は一様収束しない。f は連続かつ区分的に C^1 級であるが、g は飛びのある不連続関数であり Gibbs の現象が起こるから。 ■

配点　グラフ 2 点。f の a_n, b_n で 8 点 (定義式あれば値書いていなくても、間違っていても 4 点)。g の級数は f の級数を微分したものになっていて 4 点。一様収束の議論に残り 6 点 (理由なしは 3 点)。

解説　チェックしたいところは5つ。Fourier 係数の定義、偶関数の Fourier 級数では $b_n = 0$, f' の Fourier 級数は f の Fourier 級数を項別微分したもの、連続かつ区分的に C^1 級の関数の Fourier 級数は一様収束する、飛びのある不連続関数の Fourier 級数は (Gibbs の現象が起こるので) 一様収束しない。授業の例とレポート課題1のどちらでも同じことをやっている。

f のグラフを描かせるのは、偶関数であること、連続であることを気づかせるという親心なのだけど、g は連続と書いた人が少なくない。g は不連続 !! (計算用紙には g のグラフを描くとかするべきだ。) …そうそう、グラフはちゃんと周期関数らしく描こう。$[-\pi, \pi)$ の範囲だけでは連続かどうかも分からない。こういうのは高校で習うことだと思う (教員になる人はちゃんと教えて下さい)。コンピューターでグラフを描いたとき、それなりに手間をかけて (`Mod[]` を利用した…)、周期 2π の関数らしいグラフを描いたことを思い出して欲しいところ。

a_0 と a_n を分けて計算した人が多かったけれど、この問題ではその必要はない (何か勘違いしている？)。それから $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx$ とした人が少なくなかった、$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx$ のはず。

以下は試験術みたいなもので、書きたくないけれど、、、積分の計算にてこずって 20 分以上 (中には 30 分近く) 粘っている人がいたけれど (使うのは高校数学[1]だから出来て欲しいけれど)、少し努力の方向がずれている。$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$ が書いてあれば、最後まで計算しなくても (計算をし間違えても) その部分は半分は点をつけるし、そもそもそれはこの問題全体で大きな割合を占めない (ひょっとすると 1/5？)。 ■

問 2

(1) $\sqrt{a}x = y$ と置換積分して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. (確率積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ くらいは使って良い。と、授業で言ってある。)

(2)

$$
\begin{aligned}
g'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -ix e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i}{2a} e^{-ax^2}\right)' e^{-ix\xi} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\frac{i}{2a} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2a} e^{-ax^2}(-i\xi) e^{-ix\xi} dx\right\} \\
&= -\frac{\xi}{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = -\frac{\xi}{2a} g(\xi).
\end{aligned}
$$

$$
g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.
$$

(3) $y = g(\xi)$ とおくと、

$$
\frac{dy}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a} y, \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}.
$$

第 1 式から、$\log y = -\dfrac{\xi^2}{4a} + C$ (C は積分定数). ゆえに $y = C' e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$. 第 2 式から $C' = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$. ゆえに $g(\xi) = y = \dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$. ■

配点　(1) 5 点, (2) 10 点, (3) 5 点
(2) を解かずに、(3) を 2 次式の平方完成＋積分路の変形で解いたら、10 点。

[1] $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$ とか $\sin(n+1/2)\pi = (-1)^n$ とか…

解説　覚えなさい、と言ってある5つの関数の Fourier 変換のうち、ガウシアンの Fourier 変換を求める、という問題である (ただしやり方は授業で別解扱いしたもの)。(1) これは授業で3回くらい出て来た。(2) この辺は、微分と積分の順序交換、部分積分くらいしかすることがない。この f については、大体 $\mathcal{F}[f']$ に近い式になる。(3) (2) の問題文にある常微分方程式の初期値問題を解く、という話。

ところで $\dfrac{d}{d\xi}$ と書くべきところ、$\dfrac{1}{d\xi}$ と書いた人が複数いるのだけど一体どうしてだろう。

雑談になるけれど、この結果は非常に重要で、それで個人的に結果を丸暗記しようと思ったことが何回かあったけれど、覚えることが出来ていない (僕は暗記苦手…それでも覚えようかと思ったくらい重要、という面があります)。■

問 3

(1) 仮定から任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(n+N) = f(n)$ が成り立つので、

$$f*g(n+N) = \sum_{k=0}^{N-1} f\left((n+N)-k\right) g(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f\left((n-k)+N\right) g(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) = f*g(n).$$

(2) 離散 Fourier 変換の定義式

$$\mathcal{F}f(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)\omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

に畳み込みの定義式

$$f * g(j) = \sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

(n を j に置き換えていることに注意) を代入すると、

$$\mathcal{F}[f*g](n) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f*g(j)\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\right)\omega^{-nj}.$$

和の順序を交換して

$$\mathcal{F}[f*g](n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj}\right)g(k).$$

内側の $\sum$ で、$\ell := j-k$ とおいて、変数 j を ℓ に置換すると、

$$\mathcal{F}[f*g](n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-k-1} f(\ell)\omega^{-n(\ell+k)}\right)g(k).$$

$f(\ell)\omega^{-n(\ell+k)}$ は ℓ について周期 N であるから

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n(\ell+k)}\right)g(k) \\
&= N\cdot\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} g(j)\omega^{-nj}\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell} \\
&= N\mathcal{F}g(n)\cdot\mathcal{F}f(n).\blacksquare
\end{aligned}$$

配点　(1) 5 点　(2) 3 要素で $5 \times 3 = 15$ 点

解説　毎年出している (と授業でも言っている) $\mathcal{F}[f * g]$ の問題。今年は離散 Fourier 変換バージョン。授業で言ったように、(a) $\sum$ の順序交換、(b) 変数変換、(c) 周期性を用いて $\displaystyle\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} = \sum_{\ell=0}^{N-1}$ の 3 つを順番に、が要点。次の間違いが多かった。いきなりこんな式が書いてある。

$$\mathcal{F}[f * g](n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f(n-k) g(k) \right) \omega^{-nj}.$$

これが間違いであることが分かるように上の解答は詳しく書いてみた。離散 Fourier 変換の定義式と畳み込みの定義式を思い出して、前者に後者を代入する、というのが正しい道である。証明中の式を暗記しようとしてうろ覚えで失敗しているのかな？もしそうだとしたら、やり方が間違っている。(途中経由地点だけを覚えるのでなく、そこからどちらに向かうか把握する。)

多分この問については、自己採点と実際の得点が相当隔たっていると思う。■

問 4

(1) (少し雑で、答案はもう少しきちんと書いて欲しいけれど)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f'](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[f(x) e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi) e^{-ix\xi} dx \right) \\
&= i\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = i\xi \mathcal{F} f(\xi).
\end{aligned}$$

(2) $G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^* g$ であるから、$\mathcal{F}G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\mathcal{F}^* g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g$. ゆえに $g = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} G$. これを $\mathcal{F}h = g \mathcal{F} f$ に代入すると $\mathcal{F}h = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} G \mathcal{F} f = \mathcal{F}[G * f]$. 逆 Fourier 変換して $h = G * f$. ■

配点　(1) 10 点 (甘いけれど)　(2) 10 点。反転公式か、$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} f \mathcal{F} g$ を使おうとしていたら中間点の 5 点進呈。

解説　(1) $\mathcal{F}[f']$ と $(\mathcal{F} f)'$ のどちらを出題するか。今年は後者を出すことにした (問 2(2) は前者を出題したと言えなくもない)。部分積分するだけ。(2) これは、熱方程式の初期値問題を解くときに出て来た議論が分かりにくいので (昔から授業の悩みの種)、そこだけを取り出して定理にしてみた、という問題 (多分来年度の授業は、この定理を説明してから、熱方程式の初期値問題を解くことにする)。使うものは反転公式と $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} f \mathcal{F} g$ である。出来る人は少ないと予想していたけれど、しっかり解けている人も結構いて嬉しい。■

問 5

(1) F は LTI フィルターであるから、$y = F[x] = h * x (= x * h)$. ゆえに

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(n-k)\omega} h(k) = e^{in\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-ik\omega} = e^{in\omega} \widehat{h}(\omega).$$

(2) 離散時間 Fourier 変換の反転公式から、

$$\begin{aligned}
h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\omega) e^{in\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{in\omega} d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{in\omega} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\omega_2}^{\omega_2} e^{in\omega} d\omega - \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{in\omega} d\omega \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(2\omega_2 \operatorname{sinc}(n\omega_2) - 2\omega_1 \operatorname{sinc}(n\omega_1) \right) = \frac{\omega_2 \operatorname{sinc}(n\omega_2) - \omega_1 \operatorname{sinc}(n\omega_1)}{\pi}.
\end{aligned}$$

ただし

$$\int_{-a}^{a} e^{ibx}\,dx = 2a\,\mathrm{sinc}(ab), \quad \mathrm{sinc}\,x := \frac{\sin x}{x}$$

を用いた。

(3) 周波数 f_1, f_2 を $f_1 := \dfrac{f_s\omega_1}{2\pi}$, $f_2 := \dfrac{f_s\omega_2}{2\pi}$ で定めたとき、周波数 f が $f_1 \le f \le f_2$ の範囲にある信号が入力されたときは、そのまま出力し、範囲外にある信号は通さない。(いわゆるバンドパス・フィルターである。) ■

配点　(1) $y = x * h$ と式の整理の 2 つを見て $4 \times 2 = 8$ 点　(2) 反転公式が書けることと積分の計算の 2 つを見て $4 \times 2 = 8$ 点　(3) これは甘くバンドパス・フィルターであることが分かっていたら、計算ミスがあっても 4 点

解説　デジタル・フィルターは出題範囲が狭いので、こちらからすると毎年あまり変わり映えしないので、本当は狙いやすいと思うのだけれど、毎年あまり解いてくれない。今年は結構解いてくれて嬉しい。■

問 6　(略)

解説というか雑談　応用数学で、有名な定理だけれど、ちゃんと説明できない人が多い、というのがいくつかある。信号処理のサンプリング定理は代表例だろう。授業で紹介したのは「信号をサンプリング周波数 f_s でサンプリングするとき、信号に $f_s/2$ 以上の周波数成分が含まれていなければ、サンプリングしたデータから元の信号が復元できる (そういう公式がある)。」という命題である。

論理の間違いをしている答案が多かった。「$f_s/2$ 以上の周波数成分が含まれていると復元出来ない」とか。それは正しい主張だけれど、(ほぼ) 授業の定理の逆であって、それだけではサンプリング定理を述べたことにならない。

それ以外に、主語を述べないような解答も減点の対象となる。　■