信号処理とFourier変換 10/20 講義メモ

桂田 祐史

2018 年 10 月 21

目 次

1 Fourier 級数

2018/10/20

ここまでの 3 回のあらすじ

1. Fourier 級数の定理・公式の復習。
2. Fourier 級数の収束の様子をコンピューターで見る。連続かつ区分的 C^1 級ならば一様収束、区分的 C^1 級だけでも連続点では収束、不連続点では Gibbs の現象が起こる。
3. 「直交性」 関数空間の内積を導入して公式を見直した。結論を 1 行でまとめると Fourier 級数 $f = \sum_n c_n \varphi_n$ は、直交系 $\{\varphi_n\}$ による展開であり、$c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$.

例 1.1 (これは講義では省略した) 周期 T の関数 f の Fourier 級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

の場合の a_n, b_n も、周期 T の関数の空間 X_T における内積を

$$(f, g) := \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義して

$$a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)}, \quad b_n = \frac{(f, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)}, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)}$$

から求まる。これは現時点では “証明” にはならないけれど。 ■

1.4 最短距離 $\Leftrightarrow$ 垂直, Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似

2 つの図を描く。

- 直線 $\ell = V$ とその上にない点 F. ℓ 上の動点 G.
- 平面 $\pi = V$ とその上にない点 F. π 上の動点 G.

V 上の点 G をなるべく F に近くしたい。FG が最短距離となる G (それを H と書く) を求められるか？

F から V に引いた垂線と V との交点 H、が答。

F から V に下ろした垂線の足 H, F の V への直交射影、ともいう。

論理をきちんと (短く) 言い切ると「最短 $\Leftrightarrow$ 垂直」

定理

内積空間 X の部分空間 V と $f \in X$, $h \in V$ 対して

$$h \text{ は } f \text{ の } V \text{ への直交射影} \Leftrightarrow h \text{ が最も } f \text{ に近い}$$

つまり次の 2 つが成り立つ。ただし $\|\quad\|$ は内積から定まるノルムである。

(1) $f - h \perp V$ となる $h \in V$ があれば、$\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$.

(2) $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|$ となる h (最短距離を達成する h) があれば $f - h \perp V$.

証明 (1) の証明 (直角三角形 $\triangle FGH$ の図を描く) $\forall g \in V$ に対して

$$\|f - h\|^2 + \|g - h\|^2 = \|f - g\|^2 \quad \text{(ピタゴラスの定理)}$$

であるから $\|f - h\| \le \|f - g\|$.

(2) の証明 $v := g - h$ とおく。関数

$$f(t) := \|f - (h + tv)\|^2 \quad (t \in \mathbb{K}).$$

は $t = 0$ で最小値を与える。これから実は $(f - h, v) = 0$ が導かれる。ゆえに $f - h \perp V$.

講義では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の証明のみ紹介した。h が最も近いという仮定から、t の 2 次関数

$$f(t) = \|f - h\|^2 - 2(f - h, v)t + t^2 \|v\|^2$$

は $t = 0$ のとき最小値をとるので、1 次の項の係数 $-2(f - h, v)$ は 0 である。$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は省略する (講義ノートを見よ。以下の議論では (1) しか使わない、という言い逃れも可能かもしれない。) ■

系

内積空間 X の部分空間 V が直交系 $\{\varphi_n\}$ で張られている、つまり

$$V = \operatorname{span}\langle \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \;\middle|\; c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K} \right\}$$

であれば、任意の $f \in X$ に対して、f に最も近い $h \in V$ は (一意的に存在して)

$$h = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n.$$

(Fourier 級数を途中で打ち切った部分和 h は、その範囲内でもっとも f に近い。)

証明　$h \in V$ であるから、ある $c_1, \cdots, c_N$ が存在して

$$h = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n.$$

上で述べたことから、$f - h$ は V と直交するので

$$(f - h, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N).$$

ゆえに

$$(f, \varphi_n) = (h, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_n \right) = c_n (\varphi_n, \varphi_n) \quad \text{(3 つめの等号は前回やった式変形と同様)}.$$

ゆえに

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \blacksquare$$

例 1.2 (Fourier 級数の部分和は直交射影かつ最良近似)　部分和

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は f の $\operatorname{span}\langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos Nx, \sin Nx \rangle$ への直交射影で、最良近似でもある。

　部分和

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

は f の $\operatorname{span}\langle e^{-iNx}, \cdots, e^{-ix}, e^{i0x}, e^{ix}, \cdots, e^{iNx} \rangle$ への直交射影で、最良近似でもある。 $\blacksquare$

　以下、式を簡単にすませるため、正規直交系の場合をメインに話をする。単なる直交系 $\{\varphi_n\}$ に対して

$$\psi_n := \frac{1}{\|\varphi_n\|} \varphi_n$$

とおいた $\{\psi_n\}$ についての話をしている、と考えて良い。

　$\|\psi_n\| = 1$ であるから

$$f = \sum \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \varphi_n$$

は

$$f = \sum_n (f, \psi_n) \psi_n$$

と書き直せる。

命題 1.3 (Bessel の不等式)　内積空間 X の正規直交系 $\{\psi_n\}$ と任意の $f \in X$ に対して

$$\sum_{n=1}^{N} |(f, \psi_n)|^2 \le \|f\|^2$$

が成り立つ。無限個の場合は (極限を取って)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2 \le \|f\|^2 \quad \text{(**Bessel の不等式**)}.$$

証明　$0, h, f$ を頂点とする直角三角形の図を描く。ピタゴラスの定理から

$$\|h\|^2 + \|f-h\|^2 = \|f\|^2 .$$

ゆえに

$$\|h\|^2 \le \|f\|^2 .$$

左辺はやはりピタゴラスの定理より

$$\|h\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{N}(f,\psi_n)\psi_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N}\|(f,\psi_n)\psi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N}|(f,\psi_n)|^2 .$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{N}|(f,\psi_n)|^2 \le \|f\|^2 .\blacksquare$$

単なる直交系 $\{\varphi_n\}$ の場合にも同様の不等式が得られる。

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \le \|f\|^2 ,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(f,\varphi_n)|^2}{\|\varphi_n\|^2} \le \|f\|^2 \quad \text{(拡張版 Bessel の不等式)}.$$

実は、任意の f に対して Bessel の不等式が等式となるような $\{\psi_n\}$ がある。つまり

$$(\forall f \in X) \quad \sum_{n=1}^{\infty}|(f,\psi_n)|^2 = \|f\|^2$$

が成り立つとき、$\{\psi_n\}$ は**完全系** (**完全正規直交系**) であるという。またこの等式を **Parseval**（パーセバル）**の等式**と呼ぶ (「完全正規直交系に対して Parseval の等式が成り立つ」)。

N 項までの部分和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(f,\psi_n)\psi_n$ を s_N と表すことにする。

$$\begin{aligned}\{\psi_n\} \text{ が完全系} &\Leftrightarrow (\forall f \in X) \quad \sum_{n=1}^{\infty}|(f,\psi_n)|^2 = \|f\|^2 \\ &\Leftrightarrow (\forall f \in X) \quad \lim_{N\to\infty}\|f - s_N\| = 0.\end{aligned}$$

内積空間の列 $\{s_n\}$ に対して、$\lim_{n\to\infty}\|f-s_n\| = 0$ が成り立つとき、$\{s_n\}$ は f に収束すると定義する。普通の数の場合と同様に、級数の和が定義できる。

$\{\psi_n\}$ が X の完全系のとき、任意の $f \in X$ に対して

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\psi_n)\psi_n$$

が成り立つことになる。

正規でない直交系 $\{\varphi_n\}$ に対しても、$\forall f$ に対して拡張版 Bessel の不等式で等号が成り立つとき、$\{\varphi_n\}$ は**完全系** (**完全直交系**) であるという。

例 1.4 $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{\cos nx\}_{n\geq 0}\cup\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ は共に完全直交系である。つまり

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\right\|=0$$

が成り立つ。これは L^2 収束と言ったりする。

このことの証明は大変なので省略するが、一般に

$$\text{一様収束} \Rightarrow L^2 \text{ 収束}$$

が成り立つことに注意する。Fourier 級数の一様収束の証明は「数学とメディア」でやってあるかもしれない。■

以上は、Fourier 級数の L^2 理論のさわり、でした。普通は、Lebesgue 積分を学んでから、$L^2(-\pi,\pi)$ という関数空間を定義して、それに対する話として展開される。理論的なことをしっかり学びたい人はどこかでチャレンジすると良い。

積分は面積・体積レベルの話だと定義が曖昧なままでもなんとかなるが、Fourier 級数を突き詰めようとすると突き詰めて考える必要がある。

1.5 微分との関係

言いたいこと (A の Fourier 級数が B であることを $A\sim B$ と書くことにして)

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

とするとき

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}inc_ne^{inx}.$$

が成り立つ。まるで項別微分出来るような式 (覚える苦労はいらない)。

複数の関数 の Fourier 係数が出て来るので、この節では次のような記号を用いる。

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,$$
$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{e^{inx}}\,dx.$$

命題 1.5 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 周期 2π, 連続かつ区分的に C^1 級ならば

$$a_n(f')=\begin{cases} nb_n(f) & (n\in\mathbb{N})\\ 0 & (n=0)\end{cases},\quad b_n=-na_n(f).$$

$$c_n(f')=inc_n(f).$$

証明 アイディア一発「部分積分」

まず f が C^1 級の場合は

$$a_n(f')=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{[f(x)\cos nx]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(-n\sin nx)dx\right\}$$
$$=n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\begin{cases} nb_n(f) & (n\geq 1)\\ 0 & (n=0).\end{cases}$$

$b_n(f'), c_n(f')$ も同様である。

f が区分的に C^1 級の場合は (書きかけ) ■