# 2017/11/22 の説明のやり直し

桂田 祐史

2017 年 11 月 23 日

11 月 22 日の授業で、行列 $W$ の逆行列を示した定理を、$W$ と逆行列であることが分かる行列との積が単位行列であることを示して証明したが、良く分からないという訴えがあったので、少し違った説明を駆け足でしてみる (今後授業のどこかで空いた時間に説明するかも)。

$\varphi_n(x)=e^{in\frac{2\pi}{T}x}$ が直交関数系であることは (1 章の議論で) 知っているはずだが、それからサンプリングして得られるベクトル列 $\boldsymbol{\varphi}_n=(\omega^{n\cdot 0},\omega^{n\cdot 1},\cdots,\omega^{n(N-1)})^T$ $(n=0,1,\cdots,N-1)$ が $\mathbb{C}^N$ の直交系になる、というのが要点である[1]。

- $N$ 次元ベクトルの添字を (普通は 1 から $N$ までだが) 0 から $N-1$ までとする: $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_{N-1}\end{pmatrix}$.
- 行列についてもそうする: $A=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}&\cdots&a_{0,N-1}\\a_{10}&a_{11}&\cdots&a_{1,N-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{N-1,0}&a_{N-1,1}&&a_{N-1,N-1}\end{pmatrix}$.
- 行列は、普通は $(i,j)$ 成分 $a_{ij}$ を用いて $A=(a_{ij})$ のように表すが、$i$ という字は虚数単位 $i$ に使っているので、$(n,j)$ 成分を表すことにする: $A=(a_{nj})$.
- 転置行列は右肩に $T$ (あるいは左肩に $^t$) をつけて表す。転置行列の複素共役 (Hermite 共役) は右肩に $*$ をつけて表す。つまり
$$(a_{nj})^T=(a_{jn}),\quad (a_{nj})^*=(\overline{a_{jn}}).$$
- $\mathbb{C}^N$ の要素 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\sum_{j=0}^{N-1}x_j\overline{y_j}$ で定義されるが、
$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\overline{y_0}\ \overline{y_1}\ \cdots\ \overline{y_{N-1}})\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_{N-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{x} \tag{1}$$
とも表せる (初めて見る人がいるかもしれないけれど、実はとても良く使われる)。
- 一般に周期 $T\ (>0)$ の周期関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ と $N\in\mathbf{N}$ に対して、
$$h:=\frac{T}{N},\quad x_j:=jh\quad (j\in\mathbb{Z}),\quad \boldsymbol{f}:=\begin{pmatrix}f(x_0)\\f(x_1)\\\vdots\\f(x_{N-1})\end{pmatrix}$$

[1] $\omega$ は、$\omega=e^{\frac{2\pi i}{N}}$ で定義してある。$\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{pk}$ は等比数列の和で、$p\equiv 0\pmod N$ のとき $N$, そうでないとき 0 に等しいことを示してある。

で $\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^N$ を定める (サンプリング周期 $h$ でサンプリングしたデータを並べた)。

- (1 章ですでに知っているはずだけど) $\varphi_n(x) := e^{in\frac{2\pi}{T}x}$ について、

(2) $$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_0^T e^{in\frac{2\pi}{T}x}\overline{e^{im\frac{2\pi}{T}x}}dx = \int_0^T e^{i(n-m)\frac{2\pi}{T}x}dx = \frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta = T\delta_{nm}$$

が成り立つ。ゆえに $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は (関数としての) 直交系である。

- $\varphi_n$ をサンプリングして得たベクトル $\boldsymbol{\varphi}_n$ の第 $j$ 成分は $\omega^{nj}$ である:

(3) $$\boldsymbol{\varphi}_n = \left(\omega^{n\cdot 0}, \omega^{n\cdot 1}, \cdots, \omega^{n(N-1)}\right)^T.$$

実際

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \begin{pmatrix} e^{in\frac{2\pi}{T}x_0} \\ \vdots \\ e^{in\frac{2\pi}{T}x_j} \\ \vdots \\ e^{in\frac{2\pi}{T}x_{N-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{n\cdot 0} \\ \vdots \\ \omega^{n\cdot j} \\ \vdots \\ \omega^{n\cdot(N-1)} \end{pmatrix} \qquad (\because in\frac{2\pi}{T}x_j = in\frac{2\pi}{T}\cdot j\frac{T}{N} = nj\frac{2\pi i}{N}).$$

これから

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+N} = \boldsymbol{\varphi}_n$$

が成り立つことが分かる。

- (**ここがクライマックス**) $0 \le n \le N-1$, $0 \le m \le N-1$ に対して

(4) $$(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_m) = N\delta_{nm}$$

が成り立つ。実際、

$$(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_m) = \sum_{k=0}^{N-1}\omega^{nk}\overline{\omega^{mk}} = \sum_{k=0}^{N-1}\omega^{nk}\omega^{-mk} = \sum_{k=0}^{N-1}\omega^{k(n-m)} = N\delta_{nm}.$$

ゆえに $\boldsymbol{\varphi}_0, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_{N-1}$ は $\mathbb{C}^N$ の直交系である。これを列ベクトルとして並べた行列を $\Phi$ とおく:

(5) $$\Phi := (\boldsymbol{\varphi}_0\ \boldsymbol{\varphi}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\varphi}_{N-1}) = \begin{pmatrix} \omega^{0\cdot 0} & \omega^{0\cdot 1} & \omega^{0\cdot 2} & \cdots & \omega^{0\cdot(N-1)} \\ \omega^{1\cdot 0} & \omega^{1\cdot 1} & \omega^{1\cdot 2} & \cdots & \omega^{1\cdot(N-1)} \\ \omega^{2\cdot 0} & \omega^{2\cdot 1} & \omega^{2\cdot 2} & \cdots & \omega^{2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega^{(N-1)\cdot 0} & \omega^{(N-1)\cdot 1} & \omega^{(N-1)\cdot 2} & \cdots & \omega^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix}.$$

つまり $(n,j)$ 成分が $\omega^{nj}$ であるような行列である。列ベクトルが直交系をなすことから、$\Phi^*\Phi$ は対角行列になる。実際

$$\Phi^*\Phi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_0^* \\ \boldsymbol{\varphi}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_{N-1}^* \end{pmatrix}\left(\boldsymbol{\varphi}_0\ \boldsymbol{\varphi}_1\ \cdots \boldsymbol{\varphi}_{N-1}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_0^*\boldsymbol{\varphi}_0 & \boldsymbol{\varphi}_0^*\boldsymbol{\varphi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_0^*\boldsymbol{\varphi}_{N-1} \\ \boldsymbol{\varphi}_1^*\boldsymbol{\varphi}_0 & \boldsymbol{\varphi}_1^*\boldsymbol{\varphi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_1^*\boldsymbol{\varphi}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_{N-1}^*\boldsymbol{\varphi}_0 & \boldsymbol{\varphi}_{N-1}^*\boldsymbol{\varphi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_{N-1}^*\boldsymbol{\varphi}_{N-1} \end{pmatrix}$$
$$= (\boldsymbol{\varphi}_n^*\boldsymbol{\varphi}_j) = (N\delta_{nj}) = NI.$$

これから

(6) $$\Phi^{-1} = \frac{1}{N}\Phi^* = \frac{1}{N}(\omega_{nj})^* = \frac{1}{N}\left(\overline{\omega_{jn}}\right) = \frac{1}{N}\left(\omega^{-jn}\right).$$

- 11/22 の授業で定義した行列 $W$ はこの行列 $\Phi^{-1}$ である (ノートと照らし合わせれば良い)。すなわち

$$W = \frac{1}{N}\left(\omega^{-jn}\right) = \Phi^{-1}.$$

ゆえに

$$W^{-1} = \Phi = \left(\omega^{nj}\right).$$