1月9日の補講の内容

桂田 祐史

2018年1月10日, 2018 年1 月10 日

1月9日の補講と、10日の講義で、講義ノート第8章の「デジタル・フィルター」を説明する。

この文書は9日の補講の内容である。定理の証明と図 (グラフ2つ) は省略してある。定理の証明は講義ノート中に書いてある。

デジタル・フィルターとは、離散信号を入力して、離散信号を出力するもの、数学的には、離散信号を離散信号に写す写像である。

離散信号　離散信号とは、複素数列 $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ のことを指す。x は $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{C}$ への写像 $x\colon \mathbb{Z}\ni n\mapsto x(n)\in\mathbb{C}$ とみなせる。x_n を $x(n)$ とも書く。

この講義では、離散信号の全体を $\mathcal{S}$ と表す。これは $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ ($\mathbb{Z}$ から $\mathbb{C}$ への写像全体の集合) とみなせる。

$\mathcal{S}$ において、和 $x+y$, 定数倍 cx を

$$(x+y)(n):=x(n)+y(n),\quad (cx)(n):=cx(n)\quad (n\in\mathbb{Z})$$

で定める。$\mathcal{S}$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる。

離散信号の畳み込み　$x,y\in\mathcal{S}$ に対して、畳み込み $x*y\in\mathcal{S}$ を

$$x*y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-k)y(k)\quad (n\in\mathbb{Z})$$

で定める (これは復習。本当は収束のための条件が必要。)。

単位インパルス　$\delta\in\mathcal{S}$ を

$$\delta(n)=\delta_{n0}=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})\end{cases}$$

で定める。この δ を単位インパルス (the unit impulse) と呼ぶ。

(授業では δ のグラフを描いた。ここでは省略。)

命題 0.1 任意の $x\in\mathcal{S}$ に対して

$$x*\delta=\delta*x=x.$$

すなわち、δ は $*$ に関する単位元である。

証明　(略) ■

線形定常フィルター (LTI フィルター)　$\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への写像をデジタル・フィルターと呼ぶ。
　デジタル・フィルター $F\colon \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ による $x\in\mathcal{S}$ の像を $F[x]$ と表す。
　デジタル・フィルター $F\colon \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ が線形 (linear) であるとは、

$$\begin{aligned}&(\forall x,y\in\mathcal{S})\quad F[x+y]=F[x]+F[y],\\&(\forall x\in\mathcal{S})(\forall c\in\mathbb{C})\quad F[cx]=cF[x]\end{aligned}$$

が成り立つことをいう。
　「定常」を説明するために、信号をずらした信号の記号を導入する。
　$x\in\mathcal{S}$, $k\in\mathbb{Z}$ に対して

$$y(n):=x(n-k)\quad(n\in\mathbb{Z})$$

で定まる $y\in\mathcal{S}$ のことを $x(\cdot-k)$ で表す。
　(授業では $\delta(\cdot-2)$ のグラフを描いた。ここでは省略。「要するに平行移動である。」)
　線形デジタル・フィルター $F\colon \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ が定常 (時不変, time-invariant) とは

$$(\forall x\in\mathcal{S})(\forall k\in\mathbb{Z})\quad F[x(\cdot-k)]=F[x](\cdot-k)$$

が成り立つことをいう。直感的には「いつでも同じように信号を変換する」ということである。
　線形定常フィルターのことを LTI フィルターと略記する。

定理 0.2 LTI フィルター $F\colon \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ に対して

$$h:=F[\delta]$$

とおくと

$$(\forall x\in\mathcal{S})\quad F[x]=h*x.$$

(F に単位インパルスを入力したときの出力 h がわかれば、一般の入力 x に対する出力 $F[x]$ は $h*x$ で求まる。)

証明　(略) ■
　h のことを F の単位インパルス応答 (the unit impulse response) と呼ぶ。

正弦波を入力したときの出力, LTI フィルターの周波数特性

$$\to\boxed{連続信号\ X(t)}\overset{AD\ 変換}{\longrightarrow}\boxed{離散信号\ x=\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}}\overset{F}{\to}\boxed{離散信号\ y=\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}}\overset{DA\ 変換}{\longrightarrow}\boxed{連続信号\ Y(t)}\to$$

　連続信号 $X\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ をサンプリング周期 T_s でサンプリングして離散信号 $x\in\mathcal{S}$ を求める。つまり

$$x(n)=X(nT_s)\quad(n\in\mathbb{Z})$$

とする。この x をデジタル・フィルター $F\colon\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ に入力したときの出力を y とする。

$$y=F[x]=x*h\quad(h:=F[\delta])$$

すなわち

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-k)h(k)\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

　正弦波をサンプリングして得られた離散信号を F に入力するとどうなるか調べてみよう。(なぜそんなことをするか: 反転公式 $X(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{X}(\xi)e^{it\xi}\,d\xi$ は、任意の信号 X は正弦

波 $e^{it\xi}$ の重ね合わせで表せることを意味している。$e^{it\xi}$ がどうなるか調べると、様子が分かるであろう、という読み。)

周波数 f の正弦波 $X(t)=e^{2\pi ift}$ をサンプリング周波数 T_s でサンプリングして得られる離散信号を x とする:

$$x(n)=X(nT_s)=e^{2\pi ifnT_s}=e^{in\omega}=(e^{i\omega})^n,$$

ただし

$$\omega:=2\pi fT_s.$$

$x=\{x(n)\}$ は公比 $e^{i\omega}$ の等比数列である。(一般に指数関数をサンプリングすると等比数列になるので、特に不思議はない。)

命題 0.3 LTI フィルター F に離散信号 $x=\{e^{in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を入力したときの出力 y は

$$y(n)=\widehat{h}(\omega)x(n)\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

ただし

$$h:=F[\delta],\quad \widehat{h}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-ik\omega}.$$

($\widehat{h}$ は、離散信号 h の離散時間 Fourier 変換である。)

証明 (略) ■

「正弦波を LTI フィルターに入力すると、同じ周波数の正弦波が出力される」ということである。

$\left|\widehat{h}(\omega)\right|$ は、フィルター F の「増幅率」と呼べるであろう。$\widehat{h}(\omega)$ を F の**周波数特性** (周波数応答, frequency characteristic, frequency response) と呼ぶ。

フィルターの例: ローパス・フィルター デジタル・フィルターの例として、ローパスフィルター (low pass filter) を作ってみよう。これは低い周波数の信号は通すが、高い周波数の信号は通さない (カットする) というデジタル・フィルターである。

$0<f_1<f_2$ として、

$$X_1(t)=Ae^{2\pi if_1t}+Be^{-2\pi if_1t},$$
$$X_2(t)=Ce^{2\pi if_2t}+De^{-2\pi if_2t}$$

とする。X_i は周波数 f_i の正弦波の一般形である。もしも

$$\widehat{h}(\omega_1)=\widehat{h}(-\omega_1)=1,\quad \omega_1:=2\pi f_1T_s,$$
$$\widehat{h}(\omega_2)=\widehat{h}(-\omega_2)=0,\quad \omega_2:=2\pi f_2T_s$$

が成り立てば、X_1,X_2 をサンプリングして得られた離散信号 x_1,x_2 に対して

$$F[x_1]=x_1,\quad F[x_2]=0$$

が成り立つ。

以上は大体正しいが、一般に離散時間 Fourier 変換 $\widehat{h}(\omega)$ は周期 2π の周期関数であることを思い出すと、注意が必要なことが分かる。例えば

$$\omega_2=\omega_1+2\pi$$

となっている場合、F がなんであっても、$\widehat{h}(\omega_1)=\widehat{h}(\omega_2)$, $\widehat{h}(-\omega_1)=\widehat{h}(-\omega_2)$ である。サンプリング定理を思い出すと、もともと条件

$$f_1, f_2 < \frac{F_s}{2}, \quad F_s := \frac{1}{T_s}$$

が満たされないと、信号 X_1, X_2 は満足なサンプリングが出来ない。逆にこの条件が満たされる場合は、

$$0 < \omega_1, \omega_2 < 2\pi T_s \cdot \frac{F_s}{2} = \pi$$

が成り立つので、$\omega_2 = \omega_1 + 2\pi$ のようなことは起こらない。

そこで

$$\omega_1 < \omega_e < \omega_2$$

を満たす ω_e を取って、

$$\widehat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \le \omega_e) \\ 0 & (\omega_e < |\omega| < \pi) \end{cases}$$

となるような h を求めよう。これは反転公式を使えばよい。

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\omega) e^{in\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_e}^{\omega_e} \widehat{h}(\omega) e^{in\omega} d\omega = \frac{\omega_e}{\pi} \operatorname{sinc} n\omega_e.$$

ここで

$$\int_{-a}^{a} e^{ibx}\, dx = 2a \operatorname{sinc} ab$$

を用いた (これは以前も使ったが、良く出て来るので公式と考えるのが良いかもしれない)。