試験にのぞむ

桂田 祐史

2017 年 1 月 31 日, 2017 年 1 月 31 日

以下に述べるのは、もともと授業中に話したり、講義ノートに書いてあることである。

1. 4 つの Fourier 変換の定義＆反転公式を書けるようにしておく。講義ノート 6.2 節の表を参照。見るだけでなくて書く練習をしておく。時間がなければ、Fourier 級数と普通の Fourier 変換だけでも。
   Fourier 級数だけは cos, sin で表す式 (講義ノートの 1.1 節) も大事。

2. Fourier 級数
   - 計算は出来るようにしておく。練習問題の問 6 とか。(他の Fourier 変換と比べて、この手の問題が出しやすい。)
   - 偶関数ならば $b_n = 0$、奇関数ならば $a_n = 0$
   - 連続かつ区分的 C^1 級ならば一様収束、不連続ならば Gibbs の現象が起こる&一様収束はしない
   - $f' = g$ ならば、f の Fourier 級数を項別微分すると、g の Fourier 級数に等しい。
   - $\sin n\pi = 0$ は知っている人が多いけれど、$\cos n\pi = (-1)^n$ も知っておく。

3. 「φ_n が直交系で $f = \sum_n c_n \varphi_n$ ならば、$c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$」はあちこちで出て来る式で、(出来れば証明と一緒に) 身につけておくこと。

   $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx$$

   は皆それで理解出来る。

4. Fourier 変換は Fourier 級数ほど計算が簡単でない。紹介した 5 つの関数の Fourier 変換 (講義ノートの定理 2.2.1) は導出出来るようにしておく。その過程で重要なことが身につく (反転公式 $\mathscr{F}^*\mathscr{F}f = f$, $\mathscr{F}[\mathscr{F}f](\xi) = f(-\xi)$ 等々)。
   注意: 共役 Fourier 変換 (逆 Fourier 変換) の定義を間違えると、$\mathscr{F}^*\mathscr{F}f = f$ とはならない。

5. 次のような式を書く人が多い。決してやらないように気をつける。
   - $f = g(x)$ とか $\mathscr{F}f = g(\xi)$ とか、片方だけに変数名を書く (左辺が関数、右辺が関数値で、そもそも比べようがないものである。変数の間の関係を表す $y = f(x)$ のような式とは別物である。)。この辺をサボると、間違いの元になる可能性が非常に高い。

- $f(\xi) = g(x)$ 左辺と右辺で変数名が違う (そんなことがあるはずない)。
  $\mathscr{F}[f(x)](\xi)$ という記法には注意すること。変数名はあくまでも ξ であり、$\mathscr{F}[f(x)](\xi) = g(x)$ はおかしい。

6. $\mathscr{F}[f * g] =$ 定数 $\mathscr{F}f\mathscr{F}g$ は重要なので (覚えて欲しいので)、取り上げることが多い。
   証明は 4 つの Fourier 変換で「皆同じ」。積分 (和) の順序交換をして、変数変換して、整理。最初の順序交換をしないと 0 点答案の出来上がり。

7. その他、公式の証明が出来るようにある程度準備する。数が多いので丸暗記するのは無理 (やめよう、キリがない)。こういう形が出て来たらこういうことをする、というハウツー (囲碁将棋を知っていれば「手筋」という表現がぴったり) を習得する。部分積分、微分と積分の順序交換、重複積分の順序交換、積分の変数変換、周期性と積分範囲、などなど。

8. サンプリング定理 (定理 5.0.1「f 以上の周波数成分を含まない信号は、$2f$ 以上のサンプリング周波数でサンプリングしたデータから復元できる」, 定理 3.2.4) を正確に覚えるのは難しいが、最低限大ざっぱに理解して欲しい。
   例えば音楽 CD のフォーマットは、サンプリング周波数 44.1 kHz でサンプリングしたデータを用いることになっているので、22.05 kHz 以上の周波数成分を含まない信号はきちんと記録できる。

9. 常識的なこととして：人間が普通耳で聞き取れる音は 20 Hz $\sim$ 20 kHz と言われている (個人差があり、年齢にもよる)。ピアノの鍵盤の中央付近のラの基本周波数は (調律にもよるが) 440 Hz. 1 オクターブ上の音の周波数は 2 倍。

10. t 秒記録したデータを離散フーリエ変換するということは、信号が周期 t 秒の周期関数であると考えて Fourier 級数展開したと解釈できる。従って $n = 1$ に対応する係数は、周期 t 秒 (周波数 $1/t$ Hz) の信号成分に対応する。2016 年度の授業中の実習では、$t = 1$ 秒にしたので、$n = 1$ に対応するのは 1 Hz の信号成分であった。
    サンプリング周波数は高い方の音をどこまで記録できるかを決め、信号の長さは低い方の音をどこまで記録できるかを決める。

11. デジタル・フィルターについては、実例をあげてないので、分かりにくいかもしれない…
    「LTI フィルター F は、F の単位インパルス応答 $h = F[\delta]$ 用いて、任意の信号 x に対して $F[x] = h * x$ を満たす。」「LTI フィルター F に正弦波 $x(n) = e^{in\omega}$ を入力すると、出力は $F[x] = \widehat{h}(\omega)x$. ここで $\widehat{h}$ は h の離散時間 Fourier 変換。」単位インパルス δ と、F の単位インパルス応答 $F[\delta]$ を混同しないこと。