画像処理とフーリエ変換 練習問題 (暫定版)

桂田 祐史
katurada AT meiji.ac.jp
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/

2016 年 9 月 21 日, 2016 年 9 月 28 日

この文書では、i は虚数単位を表すとする。

Fourier 級数

これまであまり Fourier 級数の計算をしたことがない人は、早目に問 4, 5, 6 を解いてみること。

問 1. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とするとき、関数 $\cos \alpha x$, $\sin \alpha x$, $e^{i\alpha x}$ の周期を求めよ。

問 2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 T の連続関数とするとき ($T > 0$ とする)、$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して次式が成り立つことを確かめよ。

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx.$$

(難しくないけれど、証明は結構面倒。事実を知っているだけで十分かもしれない。)

問 3. 三角関数の加法定理を既知として、以下の等式を示せ。

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right),$$
$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right),$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \quad \sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2},$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \quad \cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

(これはすらすら出来ないと困ると思う。)

問 4. 次の定積分の値を求めよ (注意: 場合分けが必要である)。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx \quad (k = 0, 1, \dots), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx \quad (k = 1, 2, \dots), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(計算しても分かるけれど、図形的にも納得して欲しい。結果を覚えてしまうべき。)

問 5. 周期 2π の複素数値関数 f, g に対して、内積 (f,g) を $(f,g) := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ で定めるとき (ただし $\overline{g(x)}$ は $g(x)$ の共役複素数を表す)、以下の関数系が直交系であることを示せ。

(1) $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (2) $\{\cos kx\}_{k\geq 0} \cup \{\sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$
((2) は $\cos kx$ と $\sin jx$, $\cos kx$ と $\cos jx$ ($j \neq k$), $\sin kx$ と $\sin jx$ ($j \neq k$) という 3 つの内積を計算する。)

問 6. (非常に重要) 以下の関数 f を区間 $[-\pi,\pi]$ で Fourier 級数展開せよ (必要ならば $[-\pi,\pi]$ の外で適当に拡張して、周期 2π の関数と考えて Fourier 級数展開せよ)。

(1) $f(x) = x\ (-\pi \le x \le \pi)$.

(2) $f(x) = x^2\ (-\pi \le x \le \pi)$. (一般に x^k はどうか？)

(3) $f(x) = |x|\ (-\pi \le x \le \pi)$.

(4) $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$

(5) $f(x) = \cos^2 x$.

(6) $f(x) = \sin^3 x$.

問 7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数で滑らかとする。

(1) f が偶関数ならば次式が成り立つことを示せ。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\ dx.$$

(2) f が奇関数ならば次式が成り立つことを示せ。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx.$$

問 8. 関数の偶関数拡張、奇関数拡張を考えることにより、以下の問に答えよ。ただし L は正の数とする。

(1) $f\colon [0,L] \to \mathbb{C}$ が滑らかな関数とするとき、$f(x)$ を $\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ を用いて表せ。

(2) $f\colon [0,L] \to \mathbb{C}$ が滑らかな関数とするとき、$f(x)$ を $\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を用いて表せ。その式が任意の $x \in [0,L]$ について成り立つためには、f に追加の条件が必要になる。それを求めよ。

問 9. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を周期 2π の連続関数として、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくとき、$c_n = \begin{cases} (a_n - ib_n)/2 & (n > 0) \\ a_0/2 & (n = 0) \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2 & (n < 0) \end{cases}$ が成り立つことを確かめよ。

問 10. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 T $(T > 0)$ の周期関数とするとき、a_n, b_n をどのように定めると

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

が期待できるか？

(ヒント: f を直交系 $\{\varphi_n\}$ で $f = \sum_n c_n\varphi_n$ と展開するとき、$c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$.)

問 11. (h については、デルタ関数を知っている人だけ解答せよ。) 次の 3 つの関数の Fourier 級数を求め、コンピューターを用いて部分和のグラフを描け (何項取るかは、いくつか試してから自分で決めて)。f, g, h の関係について気づいたことがあれば説明せよ。

$$f(x)=|x| \quad (x\in[-\pi,\pi]), \quad (f \text{ は周期 } 2\pi),$$
$$g(x)=\begin{cases} 1 & (x\in(0,\pi)), \\ 0 & (x=0,\pm\pi), \\ -1 & (x\in(-\pi,0)) \end{cases} \qquad (g \text{ は周期 } 2\pi),$$
$$h(x)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(x-n\pi) \quad (\delta \text{ は Dirac のデルタ関数}).$$

内積の基本

内積に慣れて欲しいので、出来る限り以下の問題を解いてみて下さい。見かけはものものしいけれど、やってみると、大したことがないと感じられる問題が多い。アイディアを知らないと解けない、というタイプの問題もあるので、ちょっと考えて分からなければ、解答を読んで構わない (それでアイディアを覚える、という考え方をしよう)。ほとんどが式の計算により解決する問題なので、時間さえかければ勉強はしやすいと思う。

複素数についての 1 行復習: $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ に対して、$\bar z=x-iy$, $|z|=\sqrt{z\bar z}=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とする。X が体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間であり、X の任意の 2 元 x, y に対して、$(x,y)\in\mathbb{K}$ が定まっていて[1]、以下の (i), (ii), (iii) を満たすとき、(x,y) を x と y の**内積**と呼び、写像 $(\cdot,\cdot)$ のことも X 上の**内積**という。また、X と写像 $(\cdot,\cdot)$ の組 $(X,(\cdot,\cdot))$ を**内積空間**という。

$(\cdot,\cdot)$ を書くことをサボって、単に X 自身を内積空間ということも多い。

(i) $(\forall x\in X)$ $(x,x)\ge 0$. 等号が成立するのは $x=0$ のとき、そのときに限る[2]。

(ii) $(\forall x,y\in X)$ $(y,x)=\overline{(x,y)}$.

(iii) $(\forall x_1,x_2,y\in X)$ $(\forall c_1,c_2\in\mathbb{K})$ $(c_1x_1+c_2x_2,y)=c_1(x_1,y)+c_2(x_2,y)$.

問 12. 次の (1), (2) を確かめよ。

(1) $x=(x_j), y=(y_j)\in\mathbb{R}^n$ に対して、$(x,y):=\displaystyle\sum_{j=1}^n x_jy_j$ とおくと、$(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の内積である。

(2) $x=(x_j), y=(y_j)\in\mathbb{C}^n$ に対して、$(x,y):=\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}$ とおくと、$(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の内積である。

問 13. $\mathbb{R}$ で連続で、周期 2π の、複素数値の周期関数全体の集合を X とする。関数の和や複素数倍を自然に定義して、X は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる (これは証明しなくて良い[3])。さらに $f,g\in X$ に対して

$$(f,g):=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

と定めると、$(\cdot,\cdot)$ は X 上の内積であることを示せ。

次の 2 問は $\mathbb{C}$ 上の内積に慣れてもらうためのものである (どちらも内積の条件 (ii), (iii) を使う)。

[1] (x,y) という記号は、x と y の順序対を表す場合が多いが、ここでは内積を表すために用いている。記号の使い回しを嫌ってか、内積を表すために $\langle x,y\rangle$ という記号を使っている本も多い。

[2] これは $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$ ということを意味する。

[3] この証明をするのは、線形代数の良い演習問題だけれど、この講義としては要求しない。

問 14. $\mathbb{C}$ 上の内積空間 X では、任意の $f, g_1, g_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \overline{\lambda_1}\,(f, g_1) + \overline{\lambda_2}\,(f, g_2)\,.$$

問 15. $\mathbb{C}$ 上の内積空間 X では、任意の $f, g \in X$ に対して

$$(f+g, f+g) = (f,f) + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + (g,g)$$

が成り立つことを示せ。($\mathrm{Re}(f,g)$ は、複素数 (f,g) の実部という意味である。)
(注: $\mathbb{R}$ 上の内積空間の場合は、$(f+g, f+g) = (f,f) + 2(f,g) + (g,g)$ という見慣れた式が得られる。)

問 16 はアイディア一発で難しくない (自力で思いつかなくても、解答を一度見れば覚えられるだろう)。
問 16. 任意の内積空間 X について、

$$(\sharp) \qquad (\forall f, g \in X) \quad |(f,g)|^2 \le (f,f)\,(g,g) \quad (\text{等号} \Leftrightarrow f,\ g \text{ が } 1 \text{ 次従属})$$

が成り立つ (この不等式を Schwarz(シュワルツ) の不等式と呼ぶ)。ここでは簡単のため、$\mathbb{R}$ 上の内積空間数を考えることにする。任意の実数 t に対して、(i) より

$$(tf+g, tf+g) \ge 0.$$

左辺を (ii), (iii) を使って変形すると

$$t^2\,(f,f) + 2t(f,g) + (g,g) \ge 0.$$

これを t についての 2 次式とみて、($\sharp$) を導け。(注意: 2 次の係数が 0 かもしれないので慎重に。)

問 17. $\mathbb{C}$ 上の内積空間の場合に Shwarz の不等式を証明せよ。(工夫が必要で、少し難しい。)

問 18. 内積空間の条件 (i) のかわりに

(i′) 任意の $f \in X$ に対して $(f,f) \ge 0$.

が成り立つが、$(f,f) = 0$ であっても $f = 0$ とは限らない場合がときどき現れる。そのとき Schwarz の不等式は成り立つか。

問 19. X が $\mathbb{C}$ 上の内積空間であるとき、

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)} \quad (f \in X)$$

とおくと、以下の (a), (b), (c) が成り立つことを確かめよ。

(a) 任意の $f \in X$ に対して $\|f\| \ge 0$. 等号が成立するためには $f = 0$ が必要十分である。

(b) 任意の $f \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\|\lambda f\| = |\lambda|\ \|f\|$.

(c) 任意の $f, g \in X$ に対して $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

注 (a), (b), (c) を満たす関数 $\|\cdot\|$ のことを、X 上の**ノルム**と呼ぶ。ベクトル空間 X が、ノルム $\|\cdot\|$ を備えているとき、X を**ノルム空間**と呼ぶ。任意の内積空間はノルム空間になっているわけである。
問 20. X を内積空間とするとき、任意の $f, g \in X$ に対して

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

が成り立つことを示せ。(注: これ自身は簡単な計算問題だが、図形的に解釈すると有名な「パップスの中線定理」になる。有名な「射影定理」の証明でも鍵となる。)

直交性

最初に記号と用語の確認をしておく。

次式で定義される δ_{nm} を **Kronecker のデルタ**と呼ぶ。

$$\delta_{nm} := \begin{cases} 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq m \text{ のとき}). \end{cases}$$

内積空間 X の 2 元 x, y が**直交する**とは、$(x, y) = 0$ が成り立つことをいう。

この講義では、内積空間 X 内の列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**直交系**であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことと定義する[4]。

(i) $(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \neq m \Rightarrow (\varphi_n, \varphi_m) = 0.$ (ii) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$

内積空間 X 内の列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**正規直交系**であるとは、次が成り立つことと定義する[5]。

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) \quad (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

問 21. X は内積空間で、$a_1, \cdots, a_n \in X$ が互いに直交するとき、

$$\|a_1 + a_2 + \cdots + a_n\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \cdots + \|a_n\|^2$$

が成り立つことを示せ (**ピタゴラスの定理**の一般化)。

問 22. 次のことを確認せよ。

(1) 正規直交系は直交系である。 (2) 直交系は 1 次独立である。

今回は用いないが、線形代数で学んだ**グラム・シュミットの直交化法**はマスターしておくと良い。

問 23. グラム・シュミットの直交化法 (単にシュミットの直交化法とも呼ぶ) を説明せよ。

直交系を “正規化” すれば正規直交系になる。これを次の問で確かめておこう。

問 24. X を内積空間、$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の直交系とするとき、

$$\psi_n := \frac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n$$

で定めた $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X の正規直交系であることを確かめよ。

次はぜひ理解して欲しい。

問 25. X は内積空間、V は X の線型部分空間、$f \in X$, $h \in V$ とする。このとき次の (i), (ii) は同値であることを示せ。

(i) $(\forall v \in V)\ (f - h, v) = 0.$

(ii) $\|f - h\| = \inf_{g \in V} \|f - g\|.$

(h を f の V への**直交射影**と呼ぶ。)

注意 (i) $\Rightarrow$ (ii) の証明は簡単である。(ii) $\Rightarrow$ (i) の証明は少し難しい。

---

[4] 普通は、直交系をきちんと定義せず (条件 (ii) も書かないとか) に議論することが多い。

[5] 注: 直交系、正規直交系などの言葉は、添字の範囲が $\mathbb{N}$ でなく、有限集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ や $\mathbb{Z}$ などの場合にも用いる。そういう場合に定義をどう修正すれば良いかは明らかでしょう。

問 26. (Bessel の不等式の証明) X を内積空間、$\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ を X の正規直交系とするとき、任意の $f \in X$ に対して

$$\sum_{j=1}^{N} |(f, \varphi_n)|^2 \le \|f\|^2$$

が成り立つことを示せ。

(これから $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が正規直交系である場合も、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |(f,\varphi_n)|^2 \le \|f\|^2$ が成り立つ。講義では、$s_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}(f,\varphi_n)\varphi_n$ が f の $\mathrm{Span}\langle\varphi_1,\cdots,\varphi_N\rangle$ への直交射影である (つまり $s_n = h$) と言って証明したけれど、この不等式を証明するだけならば、手短な証明が書ける。それを探してみよう。)

問 27. 内積空間の Bessel の不等式を用いて、次の不等式を示せ (ただし a_n, b_n は実 Fourier 係数とする)。

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

(ヒント: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が正規直交系であることを用いる。実は不等式でなく、等式が成り立つが (Parseval の等式)、その証明はしない。)

「数学とメディア」で似たような問題が出たみたいなので、一つくらい。

問 28. 関数 $f(x) = |x|$ $(|x| \le \pi)$ の Fourier 級数は

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

であった。

(1) $x = 0$ での値を考察して、$S_{\text{奇}} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots$ の値を求めよ。

(2) Parseval の等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

を用いて、$Q_{\text{奇}} = \dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \cdots$ の値を求めよ。

(結果を書いておくと $S_{\text{奇}} = \dfrac{\pi^2}{8}$, $Q_{\text{奇}} = \dfrac{\pi^4}{96}$.)

余談

$S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $S_{\text{偶}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ とおくと、$S_{\text{偶}} = \dfrac{S}{4}$, $S = S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}}$ であるから、$S_{\text{奇}} = \dfrac{3}{4}S$.

内積, Fourier 級数の続き

問 29. 数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2$ が収束するならば

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n\right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}$$

が成り立つことを示せ。

(N 項までの和についてはどこか (線形代数?) で習ったはず。後は極限を取る議論をきちんとするだけ。「数学の方法」、「数学解析」、「複素関数」のいずれかを履修した人向け。)

問 30. 複素数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のうち、絶対値の二乗和が収束するもの全体を ℓ^2 とおく:

$$\ell^2 := \left\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{C}\ (n\in\mathbb{N}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\right\}.$$

ℓ^2 は、$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ に自然に和とスカラー倍を定義したベクル空間の部分ベクトル空間である。また、ℓ^2 の要素同士の内積を次式で定めるとき、ℓ^2 は $\mathbb{C}$ 上の内積空間である (内積の公理を満たす) ことを示せ。

$$\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$$

問 31. 周期 2π の関数 g を、$g(x) = \begin{cases} 1 & (x\in(0,\pi)), \\ 0 & (x=0,\pm\pi), \\ -1 & (x\in(-\pi,0)) \end{cases}$ で定める。(1) 不連続点を求めよ。(2) 不連続点 x に対して $g(x-0)$, $g(x+0)$ を求めよ。(3) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して、g の Fourier 級数は、 $g(x)$ に収束することを示せ。

問 32. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が C^1 級, 周期 2π の関数のとき、

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx,\quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx$$

とおくと (要するに f' の Fourier 係数)

$$A_0 = 0,\quad a_n = -\frac{1}{n}B_n,\quad b_n = \frac{1}{n}A_n\quad (n\in\mathbb{N})$$

であることを示せ。ただし a_n, b_n は f の Fourier 係数とする。複素 Fourier 係数についてはどうなるか。

問 33. (「複素関数」履修者向け) 複素数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ が収束するならば、

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\quad (x\in\mathbb{R})$$

とおくとき、以下のことが成り立つことを示せ。

(1) f は連続関数である。

(2) 任意の連続関数 φ に対して、

$$(f,\varphi) = \frac{a_0}{2}(1,\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(\cos nx,\varphi) + b_n(\sin nx,\varphi)\}\quad (\text{いわゆる項別積分}).$$

(4 つの (,) はいずれも関数の内積です。Weierstrass の M-test というのを使うので、習っていない人はこの問題を無視して構いません。)

Fourier 変換

問 34. 一般に関数 f の Fourier 変換を $\mathcal{F}f$ と表すとき、$\mathcal{F}^2 f = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)$, $\mathcal{F}^4 f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}f)))$ はどういう関数か、なるべく簡潔に答えよ。

問 35. 都合の良い仮定 (関数の微分可能性、出て来る積分の収束や、微分と積分の順序交換、部分積分など) をおいて、以下の性質を示せ。

(1) $\mathcal{F}[f_1 + f_2] = \mathcal{F}f_1 + \mathcal{F}f_2$, $\mathcal{F}[\lambda f] = \lambda \mathcal{F}f$.

(2) $\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}^* f(-\xi)$, $\mathcal{F}^* f(x) = \mathcal{F}f(-x)$.

(3) $a \neq 0$ とするとき $\mathcal{F}\left[f(ax)\right](\xi) = \dfrac{1}{|a|}\mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right)$.

(4) $a \in \mathbb{R}$ とするとき $\mathcal{F}\left[f(x-a)\right](\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi)$.

(5) $\mathcal{F}\left[f(x)e^{iax}\right](\xi) = \mathcal{F}f(\xi - a)$.

(6) $\mathcal{F}\left[f'(x)\right](\xi) = (i\xi)\mathcal{F}f(\xi)$.

(7) $\dfrac{d}{d\xi}\mathcal{F}f(\xi) = -i\mathcal{F}\left[xf(x)\right](\xi)$.

問 36. (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}dx$ の値と、e^{-3x^2} の Fourier 変換を求めよ。

(2) Fourier 変換を求めよ。(i) $e^{-3|x|}$ (ii) $\dfrac{1}{x^2+9}$ (iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & (|x| < 3) \\ 0 & (|x| > 3) \end{cases}$ (iv) $\dfrac{\sin(3x)}{3x}$

(以上は、一般的な形の公式を授業で与えたが、それを覚えて、それに当てはめて解答しても、期末試験で評価しない。自分で式を導出できるようになっておくこと。(2) は順に解答すると、それほど難しくないはず。$\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}^* f(-\xi)$ は使って良い。)

問 37. (熱伝導方程式の初期値問題を<u>半分</u>解く。) $u\colon \mathbb{R}\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ に対して、$\hat{u}$ を

$$\hat{u}(\xi,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}dx \quad ((\xi,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty))$$

で定める (x についてのみ Fourier 変換をしたもの)。

(1) u が次の偏微分方程式を満たすとき、$\hat{u}$ が満たす微分方程式を求めよ。

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)).$$

(2) u が $u(x,0) = u_0(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ を満たすとき、$\hat{u}(\xi,0)$ を f を用いて表せ。

(3) $\hat{u}$ を求めよ (積分を用いずに表せる)。

離散 Fourier 変換

問 38. $N \in \mathbb{N}$ に対して、$\omega := e^{2\pi i/N}$ とおくとき、以下の (1), (2) が成り立つことを示せ。

(1) $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le N-1$ ならば $\omega^m \neq 1$. また $\omega^N = 1$.

(2) $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj} = \begin{cases} N & (m \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

問 39. $N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\omega := e^{2\pi i/N}, \quad W := \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \omega^{-0\cdot 0} & \omega^{-0\cdot 1} & \cdots & \omega^{-0\cdot(N-1)} \\ \omega^{-1\cdot 0} & \omega^{-1\cdot 1} & \cdots & \omega^{-1\cdot(N-1)} \\ \omega^{-2\cdot 0} & \omega^{-2\cdot 1} & \cdots & \omega^{-2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega^{-(N-1)\cdot 0} & \omega^{-(N-1)\cdot 1} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix}, \quad U := \sqrt{N}W$$

とおくと、U は対称なユニタリ行列であることを示せ。また W^{-1} の成分を求めよ。

(行列の行番号、列番号を 0 から数えることにすると、W の (n,j) 要素は $\dfrac{1}{N}\omega^{-nj}$ である。)

問 40. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数であるとき、$N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$h := \frac{2\pi}{N}, \quad \omega := e^{ih} = e^{2\pi i/N}, \quad x_j := jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

とおく。$n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

を $F(x) := \dfrac{1}{2\pi}f(x)e^{-inx}$ に関する台形則

$$\left(\frac{1}{2}F(x_0) + \sum_{j=1}^{N-1} F(x_j) + \frac{1}{2}F(x_N)\right)h$$

で近似すると

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\omega^{-nj}$$

となることを示せ。

問 41. 周期 T の関数 f が有限 Fourier 級数で定義できる、つまり $\{c_n\}_{n=-m}^{m} \in \mathbb{C}^{2m+1}$ があって

$$f(t) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

とする。このとき、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、N 項離散 Fourier 変換 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ は

$$C_n = c_n \quad (0 \le n \le m), \quad C_{N-n} = c_{-n} \quad (1 \le n \le m), \quad C_n = 0 \quad (m < n < N-m)$$

を満たすことを示せ。(つまり有限 Fourier 級数に対しては、もとの関数が完全に再生できる。)

離散時間 Fourier 変換

結果が周期 2π の関数になることと、反転公式くらいは押さえておこう。

問 42. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ が

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

を満たすとき

$$\widehat{f}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

が収束し、ω について周期 2π の関数となることを示せ。さらに次式が成り立つことを示せ。

$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\omega)e^{inw}d\omega \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

畳み込み

問 43. $\mathbb{R}$ 上定義された関数の畳み込み $f*g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy$ $(x\in\mathbb{R})$ について、適当な仮定をおいて (あるいは積分の収束の条件などはとりあえず放置して)、以下の公式を示せ。

(1) $(f_1+f_2)*g=(f_1*g)+(f_2*g)$, $(\lambda f)*g=\lambda(f*g)$.

(2) $f*g=g*f$.　(3) $(f*g)*h=f*(g*h)$.　(4) $(f*g)'=f'*g$.

問 44. 次の各場合に $\mathcal{F}[f*g]$ を計算して、$\mathcal{F}f\mathcal{F}g$ の定数倍であることを示せ。

(1) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy\quad(x\in\mathbb{R}),\quad \mathcal{F}f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx\quad(\xi\in\mathbb{R}).$$

(2) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)dy\quad(x\in\mathbb{R}),\quad \mathcal{F}f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

(3) $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ が周期 N の周期数列で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f*g(n)=\sum_{k=0}^{N-1}f(n-k)g(k)\quad(n\in\mathbb{Z}),\quad \mathcal{F}f(n)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f(j)\omega^{-nj}\quad(n\in\mathbb{Z}),\quad \omega=e^{2\pi i/N}.$$

(4) $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ が数列で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f*g(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(n-k)g(k)\quad(n\in\mathbb{Z}),\quad \mathcal{F}f(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}\quad(\omega\in\mathbb{R}).$$

解答

ほとんどは講義ノートに書いてあるけれど、サービス精神である程度までここに再録。

解答 1. $\alpha \neq 0$ とする。($\alpha = 0$ のときは定数関数なので、周期関数と考えない方が良い。) こういう問では、正の最小の周期 (それを基本周期と呼んだりする) を答えるものなので、$\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ が周期である。

$f(x) = \cos\alpha x, \sin\alpha x, e^{i\alpha x}$ のいずれも $f\left(x + \dfrac{2\pi}{\alpha}\right) = f(x)$ を満たす。$\dfrac{2\pi}{\alpha}$ が周期と言っても良いが、普通は絶対値を取った $\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ を答える。■

解答 3. cos の加法定理

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

から

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

これから

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cos b, \\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= -2\sin a \sin b. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right), \\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right). \end{aligned}$$

同様に sin の加法定理

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

から

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

これから

$$\begin{aligned} \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a \cos b, \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2\cos a \sin b. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right), \\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right). \end{aligned}$$

任意の実数 A, B が与えられたとき、

$$a + b = A, \quad a - b = B$$

を満たす a, b は一意的に存在して、$a = \dfrac{A+B}{2}$, $b = \dfrac{A-B}{2}$. ゆえに

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \\ \sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}, \\ \cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \\ \cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 4. $k=0$ のとき $(\cos 0=1,\ \sin 0=0,\ e^0=1$ であるから)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos 0x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos 0\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}dx = 2\pi,\\
\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin 0x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin 0\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}0\,dx = 0,\\
\int_{-\pi}^{\pi}e^{kx}\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}e^{0x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}e^{0}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}dx = 2\pi.
\end{aligned}$$

$k\neq 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$(\sin k\pi=0,\ \sin(-k\pi)=0$ であるからと言っても良いし、$\sin kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 2π の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx = -\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$(\cos k\pi=(-1)^k,\ \cos(-k\pi)=(-1)^{-k}=(-1)^k$ であるからと言っても良いし、$\cos kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 2π の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{kx}\,dx = \left[\frac{e^{ikx}}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$(e^{ik\pi}=(-1)^k,\ e^{-ik\pi}=(-1)^{-k}$ であるからと言っても良いし、e^{ikx} は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 2π の周期関数であるからと言っても良い。)

以上、計算して確かめたが、sin, cos は 1 周期の間に山と谷が同じだけあるので、積分すると 0 になるのは、当たり前ではある。■

復習 k を整数とするとき、$\sin k\pi=0,\ \cos k\pi=(-1)^k,\ e^{ik\pi}=(-1)^k.$

解答 6. 「$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数で、区分的に C^1 級であれば、

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

とおくとき、f の任意の連続点 x で

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

が成り立つ。」という定理が基本である。

(1) 積分を計算すると $a_k=0,\ b_k=\dfrac{2(-1)^{k-1}}{k}$ となるので、

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\sin kx = 2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right)\quad (x\in(-\pi,\pi)).$$

$\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を、$(-\pi,\pi)$ で f と一致し、$\widetilde{f}(\pi)=0$, 後は周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に C^1 級で、$\widetilde{f}$ は $(2m-1)\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。

(2) $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_k = \dfrac{4(-1)^k}{k^2}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ となるので、

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right) \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$[-\pi, \pi]$ で f と一致し、周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に C^1 級であるから、いたるところ収束する。

(3) $a_0 = \pi$, $a_k = \dfrac{2\left(-1 + (-1)^k\right)}{k^2\pi}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ となるので、

$$\begin{aligned}|x| &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\left(-1 + (-1)^k\right)}{k^2\pi} \cos kx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) \quad (x \in [-\pi, \pi]).\end{aligned}$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$[-\pi, \pi]$ で f と一致し、周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に C^1 級であるから、いたるところ収束する。

(4) $a_k = 0$, $b_k = -\dfrac{2\left(1 + (-1)^{k-1}\right)}{k\pi}$ となるので、

$$\begin{aligned}\operatorname{sign} x &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\left(1 + (-1)^{k-1}\right)}{k\pi} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right) \quad (x \in (-\pi, \pi)).\end{aligned}$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$(-\pi, \pi)$ で f と一致し、$\widetilde{f}(\pi) = 0$, 後は周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に C^1 級で、$\widetilde{f}$ は $m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。$\widetilde{f}(0+0) = 1$, $\widetilde{f}(0-0) = -1$ であるから、$\dfrac{\widetilde{f}(0+0) + \widetilde{f}(0-0)}{2} = 0 = \widetilde{f}(0)$ であるから、0 でも収束して $\widetilde{f}(0)$ に等しい。

(5) $a_0 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N},\ k \neq 2)$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ であるから

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

これは倍角の公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ から導かれる $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ からも得られる。

(6) $a_k = 0$, $b_1 = \dfrac{3}{4}$, $b_3 = -\dfrac{1}{4}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N},\ k \neq 1, 3)$ であるから、

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \quad (x \in (-\pi, \pi)).$$

これは 3 倍角の公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ から導かれる $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ からも得られる。■

解答 7.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

とおくと

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

(1) f が偶関数であれば、$f(x)\cos nx$ は偶関数、$f(x)\sin nx$ は奇関数であるので、

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \quad (n\in\mathbb{N}),$$
$$a_n = 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

(2) f が奇関数であれば、$f(x)\cos nx$ は奇関数、$f(x)\sin nx$ は偶関数であるので、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n = 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\cdots).\blacksquare$$

解答 8. (1) まず $\widetilde{f}\colon [-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L]) \\ f(-x) & (x\in[-L,0)) \end{cases}$$

で定めると、これは連続かつ区分的に滑らかな偶関数であり、$\widetilde{f}(L)=\widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに $\cos\dfrac{2n\pi x}{2L}=\cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L}=\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問題 7 で $T=2L$ の場合)。

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),$$
$$a_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$
$$b_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f}=\widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は偶関数であり、$[0,L]$ で f に等しいので

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad b_n=0.$$

以上から

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L} \quad (x\in[0,L]), \quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

(2) まず $\widetilde{f}\colon [-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L]) \\ -f(-x) & (x\in[-L,0)) \end{cases}$$

で定める。連続であるためには、$f(0)=0$ であることが必要十分である。以下 $f(0)=0$ と仮定する。すると $\widetilde{f}$ は区分的に滑らかな奇関数であり、$\widetilde{f}(L)=-\widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。$\widetilde{f}(L)=\widetilde{f}(-L)$ が成り立つためには、$f(L)=0$ であることが必要十分である。以下 $f(L)=0$ と仮定する。$\widetilde{f}$ を周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに

$\cos\dfrac{2n\pi x}{2L} = \cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L} = \sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問 7 で $T = 2L$ の場合)。

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),\\
a_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\\
b_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.
\end{aligned}$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f} = \widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は奇関数であり、$[0,L]$ で f に等しいので

$$a_n = 0,\quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

以上から

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (x\in[0,L]),\quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

$f(0) = f(L) = 0$ を仮定した (この必要性は、$x = 0, L$ で展開が成り立つことからも分かる)。■

解答 9. $n > 0$ のとき、$n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx} = \cos(-nx) + i\sin(-nx) = \cos nx - i\sin nx$ であるから、

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos nx - i\sin nx\right)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right).
\end{aligned}$$

$n = 0$ のとき、$e^{-inx} = e^0 = 1 = \cos nx$ であるから、

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x\,dx = \frac{1}{2}a_0.$$

$n < 0$ のとき、$-n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx} = \cos(-nx) + i\sin(-nx)$ であるから

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)\,dx + i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right).■
\end{aligned}$$

解答 10. (**解法 1**) 直交系 $\{\varphi_n\}$ で $f = \displaystyle\sum_n c_n\varphi_n$ と展開するとき $c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$ という結果を用いて解答する。

$\varphi_n(x) = \cos\frac{2n\pi x}{T}$ $(n = 0,1,\cdots)$, $\psi_n(x) = \sin\frac{2n\pi x}{T}$ $(n = 0,1,\cdots)$ $(n\in\mathbb{N})$ とおくとき $\{\varphi_n\}_{n\ge 0}\cup\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は直交系である。$n\ne 0$ のとき

$$(\varphi_n,\varphi_n) = \int_{-T/2}^{T/2}\cos^2\frac{2n\pi x}{T}dx = \int_{-T/2}^{T/2}\frac{1+\cos(4n\pi x/T)}{2}dx = \frac{T}{2},$$

$$(\psi_n,\psi_n) = \int_{-T/2}^{T/2}\sin^2\frac{2n\pi x}{T}dx = \int_{-T/2}^{T/2}\frac{1-\cos(4n\pi x/T)}{2}dx = \frac{T}{2}$$

であるから

$$a_n = \frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,$$

$$b_n = \frac{(f,\psi_n)}{(\psi_n,\psi_n)} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx.$$

一方

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_{-T/2}^{T/2} 1dx = T$$

であるから

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx.$$

すなわち

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx.$$

まとめると

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

(**解法 2**) f が周期 T であることから、

$$F(\xi) := f\left(\frac{T}{2\pi}\xi\right) \quad (\xi\in\mathbb{R})$$

とおくと、F は周期 2π である。ゆえに

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\cos n\xi\,d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\sin n\xi\,d\xi$$

とおくと

$$F(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\xi + b_n\sin n\xi\right).$$

ゆえに

$$f(x) = F\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right).$$

$\xi = \frac{2\pi}{T}x$ であるから、$\xi = -\pi, \pi$ のとき、$x = -T/2,\, T/2$ であるから

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx.\blacksquare$$

解答 11. (これは授業中にやったので省略する。有限個の点を除いて $g(x) = \operatorname{sign} x$ であるから、実は f と g の Fourier 級数は、実質的に (No. 1 の) 問6で求めてある。Fourier 級数展開の結果は

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right),\\
g(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right),\\
h(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2k-1)x = \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots\right).
\end{aligned}$$

コンピューターを用いて部分和を描く方法は「宿題 1 のグラフ描き」[6]) を見よ。f は $(2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 以外では微分可能で、微分可能なところでは

$$f'(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}).$$

実は超関数の意味で $f' = g$, $g' = h$ が成り立つ。f の Fourier 級数展開を項別に微分したものが g の Fourier 級数展開に等しく、g の Fourier 級数展開を項別に微分したものが h の Fourier 級数展開に等しくなっている。 ■

解答 13. (ii), (iii) はやれば出来るはず。(i) をきちんとやるのは難しいので、書いておく。

(i) の証明　$f \in X$ とするとき、任意の x に対して $|f(x)|^2 \ge 0$ であるから、

$$(f,f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \ge 0.$$

$f = 0$ つまり $(\forall x \in \mathbb{R})$ のとき $f(x) = 0$ であれば、$(f,f) = 0$ である。逆に $(f,f) = 0$ とすると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 0.$$

$|f(x)|^2$ は連続関数であるから、$(\forall x \in [-\pi,\pi])$ $|f(x)|^2 = 0$ (もしそうでないとすると、$(\exists x_0 \in [-\pi,\pi])$ $|f(x_0)|^2 \ne 0$. $|f(x_0)|^2 > 0$ であるが、$|f|^2$ の連続性から、x_0 の十分近くでは $|f(x)|^2 \ge |f(x_0)|^2/2 > 0$. すると $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx > 0$ となり矛盾する)。ゆえに $f(x) = 0$ $(x \in [-\pi,\pi])$. f は周期 2π の関数だから $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$. すなわち $f = 0$. ■

解答 14.

$$\begin{aligned}
(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) &= \overline{(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, f)} = \overline{\lambda_1 (f_1, g) + \lambda_2 (f_2, g)} = \overline{\lambda_1}\,\overline{(g_1, f)} + \overline{\lambda_2}\,\overline{(g_2, f)}\\
&= \overline{\lambda_1}\,(f, g_1) + \overline{\lambda_2}\,(f, g_2). \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 15. 任意の複素数 z に対して、$z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned}
(f+g, f+g) &= (f, f+g) + (g, f+g) = (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) = (f,f) + (f,g) + \overline{(f,g)} + (g,g)\\
&= (f,f) + 2\operatorname{Re}(f,g) + (g,g). \blacksquare
\end{aligned}$$

[6] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2014/toi1-drawing.pdf

解答 16. 問の文中の解説から、$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$t^2(f,f)+2t(f,g)+(g,g)\geq 0.$$

一般に $(f,f)\geq 0$ であるが、$(f,f)>0$ か、$(f,f)=0$ かで場合分けする。

(a) $(f,f)>0$ の場合、2次関数の符号が0以上ということから、判別式 ≤ 0. ゆえに $(2(f,g))^2-4(f,f)(g,g)\leq 0$. 整理すると $(f,g)^2\leq (f,f)(g,g)$. ゆえに $(\sharp)$ の不等式が成り立つ。

(b) $(f,f)=0$ の場合、$(\forall t\in\mathbb{R})$ $2t(f,g)+(g,g)\geq 0$ より $(f,g)=0$ でなければならない ($(f,g)\neq 0$ ならば矛盾が導かれる)。ゆえに $(\sharp)$ の不等式の両辺とも 0 で、不等式は成立する。

等号の成立条件を考える。

f と g が1次従属のとき、等号が成り立つことは簡単に分かるので省略する。

f と g が1次独立のときは、上の議論をていねいにたどると、$(f,g)^2<(f,f)(g,g)$ が導かれる。(実際、任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $tf+g\neq 0$ であるので、$(tf+g,tf+g)>0$ であり、2次関数の符号が正であるから、判別式は負である。) ゆえに $(\sharp)$ で等号が成り立つならば、f と g は1次独立ではない。■

(少し書き方を変えて) f と g が1次従属のとき、$(\exists t\in\mathbb{R})$ $f=tg$ または $(\exists s\in\mathbb{R})$ $g=sf$. 前者の場合、$(\sharp)$ の不等式の両辺はともに $t^2(g,g)^2$. 後者の場合、$(\sharp)$ の不等式の両辺はともに $s^2(f,f)^2$. ゆえに $(\sharp)$ の不等式で等号が成立する。

f と g が1次独立のとき (このとき $f\neq 0$ であることに注意)、$(\forall t\in\mathbb{C})$ $tf+g\neq 0$. 特に、$(f,g)=|(f,g)|\,e^{i\theta}$ となる $\theta\in\mathbb{R}$ を取って、$t=se^{-i\theta}$ $(s\in\mathbb{R})$ とおくと、$t(f,g)=s\,|(f,g)|$ であるから、

$$\begin{aligned}(tf+g,tf+g)&=(tf,tf)+2\,\mathrm{Re}(tf,g)+(g,g)=|t|^2(f,f)+2\,\mathrm{Re}\,[t(f,g)]+(g,g)\\&=s^2(f,f)+2s\,|(f,g)|+(g,g).\end{aligned}$$

ゆえに任意の $s\in\mathbb{R}$ に対して、

$$s^2(f,f)+2s\,|(f,g)|+(g,g)>0.$$

判別式は負でなければならないので、$|(f,g)|^2<(f,f)(g,g)$. ■

解答 17. $f,g\in X$ とする。任意の複素数 λ に対して、

$$0\leq(\lambda f+g,\lambda f+g)=|\lambda|^2(f,f)+2\,\mathrm{Re}\,(f,g)+(g,g) \tag{1}$$

が成り立つ。複素数 (f,g) の指数形式を $(f,g)=\rho e^{i\phi}$ $(\rho\geq 0,\ \phi\in\mathbb{R})$ とする。$\rho=|(f,g)|$ である。任意の実数 t に対して、$\lambda:=te^{-i\phi}$ とおいて、(2) に代入すると、$\lambda(f,g)=te^{-i\phi}\cdot|(f,g)|\,e^{i\phi}=t\,|(f,g)|$ であるから

$$t^2(f,f)+2t\,|(f,g)|+(g,g)\geq 0.$$

ここから後は、問 17 と同様である。■

解答 18. (準備中) 不等式自体は成り立つ。■

解答 19. 任意の $f\in X$ に対して、$(f,f)\geq 0$ であるから、$\sqrt{(f,f)}$ は意味を持ち、$\|f\|$ が定義できる。

(a) 任意の $f\in X$ に対して、$(f,f)\geq 0$ であるから、$\|f\|=\sqrt{(f,f)}\geq 0$. また $\|f\|=0\Leftrightarrow(f,f)=0\Leftrightarrow f=0$.

(b) 任意の $f\in X$, 任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して、

$$\|\lambda f\|=\sqrt{(\lambda f,\lambda f)}=\sqrt{\lambda\overline{\lambda}\,(f,f)}=\sqrt{|\lambda|^2(f,f)}=|\lambda|\sqrt{(f,f)}=|\lambda|\,\|f\|.$$

(c) 任意の $f,\, g \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g) = \|f\|^2 + (f,g) + \overline{(f,g)} + \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\|f\|+\|g\|)^2 - \|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\,\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 - \left(\|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2\right) \\ &= 2\left(\|f\|\,\|g\| - \mathrm{Re}(f,g)\right) \\ &\geq 2\left(\|f\|\,\|g\| - |(f,g)|\right) \geq 0.\end{aligned}$$

最後のところで Schwarz の不等式 $|(f,g)|^2 \leq (f,f)(g,g)$ を用いた。これから

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| .\blacksquare$$

解答 20. 条件 (ii) と問 14 で示したこと、それと $a \in \mathbb{C}$ に対して $a + \overline{a} = 2\,\mathrm{Re}\, a$ であることを用いる。

$$\begin{aligned}(f+g, f+g) &= (f, f+g) + (g, f+g) = (f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g) \\ &= (f,f)+(f,g)+\overline{(f,g)}+(g,g) = (f,f) + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + (g,g).\blacksquare\end{aligned}$$

解答 21.

$$\begin{aligned}\|a_1+\cdots+a_n\|^2 &= \left(\sum_{j=1}^n a_j, \sum_{k=1}^n a_k\right) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n (a_j, a_j) + \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_j, a_k) + \sum_{1\leq k<j\leq n} (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} 0 + \sum_{1\leq k<j\leq n} 0 = \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2 .\blacksquare\end{aligned}$$

解答 22.

(1) $\{\varphi_n\} \in \mathbb{N}$ を正規直交系とする。$n \neq m$ のとき $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} = 0$. また $(\varphi_n, \varphi_n) = \delta_{nn} = 1 \neq 0$.

(2) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を直交系とする。$N \in \mathbb{N}$, $c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K}$ が

$$\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j = 0$$

を満たすとするとき、$1 \leq n \leq N$ を満たす n に対して、

$$0 = (0, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^N c_j\varphi_j, \varphi_n\right) = \sum_{j=1}^N c_j\left(\varphi_j, \varphi_n\right) = \sum_{j=1}^N c_j \delta_{jn} = c_n\delta_{nn} = c_n \cdot 1 = c_n.$$

すなわち $c_1 = \cdots = c_N = 0$. ゆえに $\{\varphi_n\}$ は 1 次独立である。 $\blacksquare$

解答 23. (少し雑だけど、とりあえず) $u_1, u_2, \cdots \in X$ は 1 次独立とするとき、正規直交系 $\{\varphi_n\}$ で、

$$\mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle = \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle$$

が成り立つようなものを求める。

$n = 1, 2, \cdots$ の順に φ_n を定める。まず

(GS1)
$$\varphi_1 := \frac{1}{\|u_1\|} u_1$$

とおくと、$\{\varphi_1\}$ は正規直交系であり ($\because \|\varphi_1\| = 1$)、$\mathrm{Span}\langle u_1\rangle = \mathrm{Span}\langle \varphi_1\rangle$.

$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ まで求まった (正規直交系であり、$\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle$ が成り立つ) とする。

(GS2)
$$\psi_{k+1} := u_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j$$

とおく。$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ は正規直交系だから、

$$\begin{aligned}
(\psi_{k+1}, \varphi_j) &= \left(u_{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_\ell)\varphi_\ell, \varphi_j\right) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - \sum_{\ell=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_\ell)(\varphi_\ell, \varphi_j) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - (u_{k+1}, \varphi_j) \cdot 1 = 0 \quad (j = 1, \cdots, k).
\end{aligned}$$

また $\psi_{k+1} \neq 0$ である (もしも $\psi_{k+1} = 0$ とすると、$u_{k+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j \in \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ となり、$u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}$ が 1 次独立であることに反する)。

(GS3)
$$\varphi_{k+1} := \frac{1}{\|\psi_{k+1}\|} \psi_{k+1}$$

とおくと、$(\varphi_{k+1}, \varphi_j) = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$, $(\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1}) = 1$. ゆえに $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}$ は正規直交系である。また $\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_{k+1}\rangle$ が成り立つ。■

解答 24.

$$\begin{aligned}
(\psi_n, \psi_m) &= \left(\frac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n, \frac{1}{\|\varphi_m\|}\varphi_m,\right) = \frac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_m\|} (\varphi_n, \varphi_m) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_n\|} (\varphi_n, \varphi_n) = 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_m\|} \cdot 0 = 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases} \\
&= \delta_{nm}. \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 25. (準備中。まあ講義ノートにも書いてあるし。) ■

解答 26. $N \in \mathbb{N}$ とする。$h_N := \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k$ とおくと、$1 \leq j \leq N$ なる j に対して

$$\begin{aligned}
(f - h_N, \varphi_j) &= \left(f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k, \varphi_j\right) = (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_j) \\
&= (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\delta_{kj} = (f, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0.
\end{aligned}$$

ゆえに[7]

$$(f-h_N,h_N)=\left(f-h_N,\sum_{j=1}^N(f,\varphi_j)\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^N\overline{(f,\varphi_j)}(f-h_N,\varphi_j)=0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\|f-h_N+h_N\|^2=\|f-h_N\|^2+2\operatorname{Re}(f-h_N,h_N)+\|h_N\|^2=\|f-h_N\|^2+\|h_N\|^2\\&\geq\|h_N\|^2.\end{aligned}$$

φ_j $(j=1,\cdots,N)$ は互いに直交しているので (ピタゴラスの定理から)

$$\sum_{k=1}^N|(f,\varphi_k)|^2=\left\|\sum_{k=1}^N(f,\varphi_j)\varphi_j\right\|^2=\|h_N\|^2\leq\|f\|^2.$$

これが任意の $N\in\mathbb{N}$ について成り立つことから

$$\sum_{k=1}^\infty|(f,\varphi_k)|^2\leq\|f\|^2.\blacksquare$$

(テキストによっては、$\|f\|^2$ から始めて、一気に $\|f-h_N\|^N+\|h_N\|^2$ に等しいことを導いているものもある。)

解答 27. まず (念のため) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ は正規直交系であることを確かめよう。$\{\cos nx\}_{n\geq0}\cup\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ が直交系であることは分かっているので、長さが 1 であることを確かめれば良い。

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot2\pi=1,\\&\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos2nx}{2}\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1,\\&\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos2nx}{2};dx=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1.\end{aligned}$$

a_0', a_n', b_n' をこの正規直交系に関する係数とする。すなわち

$$\begin{aligned}a_0'&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f,1),\\a_n'&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\cos nx),\\b_n'&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\sin nx).\end{aligned}$$

Bessel の不等式は

$$(\star)\qquad\left|a_0'\right|^2+\sum_{n=1}^\infty\left|a_n'\right|^2+\sum_{n=1}^\infty\left|b_n'\right|^2\leq\|f\|^2.$$

ところで

$$a_0=\frac{1}{\pi}(f,1),\quad a_n=\frac{1}{\pi}(f,\cos nx),\quad b_n=\frac{1}{\pi}(f,\sin nx)\quad(n\in\mathbb{N})$$

[7]最初から一気に証明出来なくもない。$(f-h_N,h_N)=\left(f-\sum_{k=1}^N(f,\varphi_k)\varphi_k,\sum_{j=1}^N(f,\varphi_j)\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^N\overline{(f,\varphi_j)}(f,\varphi_j)-\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N(f,\varphi_k)\overline{(f,\varphi_j)}(\varphi_k,\varphi_j)=\sum_{j=1}^N|(f,\varphi_j)|^2-\sum_{k=1}^N|(f,\varphi_k)|^2=0.$

であるから、

$$a_0' = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0, \quad a_n' = \sqrt{\pi} a_n, \quad b_n' = \sqrt{\pi} b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$(\star)$ に代入すると

$$\frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi |a_n|^2 + + \sum_{n=1}^{\infty} \pi |b_n|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

両辺を π で割って

$$\frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx. \blacksquare$$

解答 28.

(1) f は連続で区分的に C^1 級なので、f の Fourier 級数は一様収束して、和は f に等しい。特に任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right).$$

$x = 0$ を代入して

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} S_{奇}.$$

ゆえに

$$S_{奇} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(余談になるが、$S = \dfrac{4}{3} S_{奇} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{6}$.)

(2) $a_0 = \pi$, $a_n = \dfrac{4}{n^2 \pi}$ (n が奇数), $a_n = 0$ (n が正の偶数), $b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) であるので、

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \right).$$

一方

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Parseval の不等式に代入して

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} Q_{奇} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

ゆえに

$$Q_{奇} = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^4}{96}. \blacksquare$$

余談 (余談になるが、$Q_{偶} = \dfrac{1}{2^4} Q = \dfrac{Q}{16}$ であるから、$Q_{奇} = Q - Q_{偶} = \dfrac{15}{16} Q$ であるので、$Q = \dfrac{16}{15} Q_{奇} = \dfrac{16}{15} \cdot \dfrac{\pi^4}{96} = \dfrac{\pi^4}{90}$. 一つの Fourier 級数展開から S と Q が求まるのはちょっと面白い。)
(参考: Mathematica で `Sum[1/n^4,{n,1,Infinity,2}]` とすると、$\pi^4/96$ と答えてくれる。)

解答 29. $\mathbb{R}^n$ の内積に関する Schwarz の不等式

$$\left|\sum_{n=1}^N a_n b_n\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^N b_n^2} \quad ((a_1,\dots,a_N),(b_1,\dots,b_N)\in\mathbb{R}^N)$$

を思い出そう。

$|x_n|$, $|y_n|$ をこの Schwarz の不等式の a_n, b_n とみなすことによって

$$\sum_{n=1}^N |x_n y_n| = \sum_{n=1}^N |x_n|\,|y_n| \le \sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^N |y_n|^2}.$$

0 以上のものはたくさん足した方が大きいので

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^N |y_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^\infty |y_n|^2}.$$

この右辺を M とおくと、

$$\sum_{n=1}^N |x_n y_n| \le M.$$

これは級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n|$ の部分和の作る数列が上に有界ということを示している。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n|$ は収束する。すなわち $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ は絶対収束する。したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ は収束し、

$$\left|\sum_{n=1}^\infty x_n y_n\right| \le \sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \le M = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^\infty |y_n|^2}.\blacksquare$$

(**余談**) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$ であるような複素数列 $a=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の全体を ℓ^2 と表す。$a,b\in\ell^2$ とするとき

$$(a,b) := \sum_{n=1}^\infty a_n \overline{b_n}$$

により $(a,b)\in\mathbb{C}$ が定義できることがこの問題から分かる。ℓ^2 はこの (a,b) を内積として内積空間になる。

解答 30. 複素数列全体の集合が問題文に定義した和と複素数倍について、$\mathbb{C}$ 上の線形空間をなすことは認めることにする。零ベクトルは $\mathbf{0} := \{0,0,0,\cdots\}$.

$\{x_n\}\in\ell^2$, $\lambda\in\mathbb{C}$ であれば、$\{\lambda x_n\}\in\ell^2$ は容易に分かる。

$|x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \le 2\left(|x|^2 + \|y\|^2\right)$ に注意すると、$\{x_n\},\{y_n\}\in\ell^2$ であれば、

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n+y_n| \le 2\left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 + \sum_{n=1}^\infty |y_n|^2\right) < \infty.$$

ゆえに $\{x_n\}+\{y_n\}\in\ell^2$.

$|x|\,|\bar{y}| \le |x|^2 + |y|^2$ であるから、$\{x_n\},\{y_n\}\in\ell^2$ であれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x_n\overline{y_n}$ は収束するので、$\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ が定義できる。

以上から、ℓ^2 は、問題文中の和、複素数倍、$(\cdot,\cdot)$ が定義できる。

$(\cdot,\cdot)$ が内積の公理を満たすことの確認をしよう。

$$(\{x_n\},\{x_n\}) = \sum_{n=1}^\infty x_n\overline{x_n} = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \ge 0.$$

また

$$(\{x_n\},\{x_n\}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |x_n|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n\} = \mathbf{0}.$$

線形性 $(\lambda\{x_n\} + \mu\{y_n\}, \{z_n\}) = \lambda(\{x_n\}, \{z_n\}) + \mu(\{y_n\}, \{z_n\})$, 対称性 $(\{y_n\}, \{x_n\}) = \overline{(\{x_n\}, \{y_n\})}$ も容易に確かめられる (サボる)。

以上より ℓ^2 は $\mathbb{C}$ 上の内積空間である。■

解答 31.

(1) (グラフを描くのが良い。) 一周期区間 $[-\pi, \pi]$ に制限すると、$x = 0, \pm\pi$ で不連続、$(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ で連続である。周期 2π の周期関数であるから、$n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ で不連続で、$x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ では連続である。ゆえに不連続点は $n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(2) $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0) = g(0+0) = 1$, $g(x-0) = g(0-0) = -1$. $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0) = g(-\pi+0) = -1$, $g(x-0) = g(\pi-0) = 1$.

(3) g は周期 2π、 区分的に C^1 級であるので、g の Fourier 級数は各点で収束し、和 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ は

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} g(x) & (x \text{ が } g \text{ の連続点}) \\ \dfrac{g(x+0)+g(x-0)}{2} & (x \text{ が } g \text{ の不連続}). \end{cases}$$

(2) より x が g の不連続点のとき、$g(x+0)+g(x-0) = \pm1 + \mp1 = 0 = g(x)$ であるから、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x).$$

(任意の x で $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ となるのは、最初に $g(x) = 0$ $(x = 0, \pm\pi)$ と定義したからで、もともとそうする必然性はあまりないけれど (どうせ、どうやっても g は不連続なので)、そうしておけば、最後に全部の点で極限が g に等しくなって気持ち良いかな、と思ったくらいの理由しかありません。Fourier 級数の方は積分で定まるので，$x = 0, \pm\pi$ での値をどう定義しても変化しないことに注意。) ■

解答 32. f は周期 2π であるから $f(\pi) = f(-\pi)$ であることに注意する。

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(0x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(f(\pi) - f(-\pi)\right) = 0.$$

$n \in \mathbb{N}$ とするとき、部分積分によって

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n\sin nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(0 + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) = n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(n\cos nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right) = -n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -na_n. \end{aligned}$$

複素 Fourier 係数については、(準備中) ■

解答 33.

(1) 仮定より、$M_n := |a_n| + |b_n|$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束し、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n|\,|\cos nx| + |b_n|\,|\sin nx| \le |a_n| \cdot 1 + |b_n| \cdot 1 = M_n.$$

Weierstrass の M-test により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は一様に絶対収束する。各項 $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ は連続関数であるから、部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ は連続であり、その一様収束の極限である $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は連続である。

(2) 連続関数 $|\varphi|$ は $[-\pi, \pi]$ で最大値 M を取ることから、

$$f(x)\overline{\varphi(x)} = \frac{a_0}{2}\,\overline{\varphi(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\overline{\varphi(x)}$$

も一様収束する。このことは、(1) と同様に Weierstrass の M-test をしても良いし ($M_n := M\,(|a_n| + \|b_n\|)$ とする)、

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| f(x)\overline{\varphi(x)} - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)\overline{\varphi(x)} \right| \\
&\qquad \le M \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) \right|
\end{aligned}$$

という不等式からも分かる ($N \to \infty$ のとき、右辺が 0 に収束するので、左辺も 0 に収束する)。従って項別積分が可能で

$$\begin{aligned}
(f, \varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\varphi(x)} dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\overline{\varphi(x)}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\overline{\varphi(x)} dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\overline{\varphi(x)} dx \right) \\
&= \frac{a_0}{2}\,(1, \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\,(\cos nx, \varphi) + b_n\,(\sin nx, \varphi)) . \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 34. (結果のみ) $\mathcal{F}^2 f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}f)(-x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. ゆえに $\mathcal{F}^4 f = f$. ■

解答 35. 講義ノートの **2.3「Fourier 変換の簡単な性質」** に書いてある。 ■

解答 36.

(1) 前半は $\sqrt{3}x = y$ と変数変換して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

後半は、まず定義から

$$\mathcal{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-3x^2} e^{-ix\xi} dx.$$

平方完成して

$$-3x^2 - ix\xi = -3\left(x + \frac{i\xi}{6}\right)^2 - \frac{\xi^2}{12}$$

であるから、

$$\mathcal{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] = e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(x+i\xi/6)^2}dx = e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}dx$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/12} = \frac{e^{-\xi^2/12}}{\sqrt{6}}.$$

(2 つめの等号は、複素関数論の積分路の変形を用いる。詳細は省略。なお、授業では別解も紹介した。講義ノートの 1.4.5 に載せてある。)

(2) (i) 積分区間を、負の範囲と正の範囲で分けて、負の範囲の方は $y = -x$ と変数変換すると[8]

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{-3|x|}\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|}e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{-ix\xi}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-3x}e^{ix\xi}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-(3+i\xi)x}}{-(3+i\xi)} + \frac{e^{-(3-i\xi)x}}{-(3-i\xi)}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{3+i\xi} + \frac{1}{3-i\xi}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{6}{\xi^2+9} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\xi^2+9}.
\end{aligned}$$

(ii) 反転公式を用いると、(i) の結果から

$$\mathcal{F}^*\left[\frac{1}{\xi^2+9}\right](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|x|}.$$

公式 $\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}^*f(-\xi)$ を用いて

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+9}\right](\xi) = \mathcal{F}^*\left[\frac{1}{x^2+9}\right](-\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|-\xi|} = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|\xi|}.$$

(iii) これも単純な計算で

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3}^{3}\frac{1}{6}e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-3}^{x=3}$$
$$= \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i3\xi}-e^{i3\xi}}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{3\xi}\frac{e^{i3\xi}-e^{-i3\xi}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin 3\xi}{3\xi}.$$

(iv) はこれを反転させて

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin 3x}{3x}\right](\xi) = \sqrt{2\pi}f(-\xi) = \sqrt{2\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (|\xi| < 3)\\ 0 & (|\xi| > 3).\end{cases}$$

細かいことを言うと、(不連続点では、片側極限の平均値に収束するので) $\xi = \pm 3$ では $\sqrt{2\pi}\times\dfrac{1}{12}$ という値を取る (試験ではここまで書かなくても良いことにする)。 ■

最後の結果は

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{sign}\ (3-y) + \mathrm{sign}\ (3+y)\right)$$

となるが、

$$= \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\mathrm{sign}\ (3-y) + \mathrm{sign}\ (y+3)}{2}$$

であるから、OK.

[8] この辺は好みの問題で、変数変換しなくても計算できる。

解答 37. (準備中)

解答 38.

(1) 一般に $(e^z)^n = e^{nz}$ であるので、
$$\omega^N = \left(e^{2\pi i/N}\right)^N = e^{2\pi i} = 1.$$

(2) $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le N-1$ とするとき、$0 < m/N < N$ であるから、$0 < 2\pi m/N < 2\pi$, $\cos\dfrac{2\pi m}{N} \ne 1$. ゆえに
$$\omega^m = \left(e^{2\pi i/N}\right)^m = e^{2\pi i m/N} = \cos\frac{2\pi m}{N} + i\sin\frac{2\pi m}{N} \ne 1.$$

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj}$ は公比 ω^m の等比数列であるが、(1), (2) から、$m \equiv 0 \pmod N$ のとき $\omega^m = 1$, そうでないとき $\omega^m \ne 1$ である。
$$\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj} = \begin{cases} \dfrac{(\omega^m)^N - 1}{\omega^m - 1} = \dfrac{1-1}{\omega^{m-1}} = 0 & (m \not\equiv 0 \pmod N) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} 1 = N & (m \equiv 0 \pmod N). \blacksquare \end{cases}$$

解答 39. 講義ノートの **3.2** の命題3.3 (p. 47) は、$W = \left(\dfrac{1}{N}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$W^{-1} = \left(\omega^{(j-1)(n-1)}\right)$ という内容である。この証明を真似すれば良い。

命題 3.3 を使って良いならば、$\overline{\omega} = \omega^{-1}$ であるので、$U = \sqrt{N}W = \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$U^* = \overline{U^T} = \overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(j-1)(n-1)}\right)} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{(j-1)(n-1)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1}$. ゆえに $UU^* = \sqrt{N}W\dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1} = I$. ■

解答 40. 講義ノートの 1.1「離散 Fourier 係数 — なぜそのように定義するか」に書いてある。■

解答 41. 今年度は、定理 3.2.4 とした。$N > 2m$ となるように N を取れば良い。命題 3.1.2「離散フーリエ係数の性質」、特に $C_n = \displaystyle\sum_{m\equiv n} c_m$ という式を理解せよ、という問題である。詳しいことは省略する。■

解答 42. 離散時間 Fourier 変換については、講義ノートの 5 節に書いてあるわけだが、収束については $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2 < \infty$ の場合に軽く言及しているだけだった。(注意: 繰り返しになるけれど、この講義では、級数や積分の収束の証明を出来ることを要求しない。) 反転公式についても、Fourier 級数の話と同じだよね、で済ませてあった。以下は講義内容の補足として。

収束について　$M_n := |f(n)|$ とおくと、$\left|f(n)e^{-in\omega}\right| = |f(n)| = M_n$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)| < \infty$ であるから、Weierstrass の M-test により $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}$ は一様に絶対収束するので、特に収束する。

周期性について　(これは講義ノートに書いてあるけれど、ついでだから) $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$e^{-i2n\pi i} = 1$ であるから
$$\widehat{f}(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in(\omega+2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}e^{-i2n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} = \widehat{f}(\omega).$$

ゆえに $\widehat{f}$ は周期 2π である。

反転公式について　これは Fourier 級数の Fourier 係数がどうなるか、という話である。$\left\{e^{-inx}\right\}$ は直交系で

$$\left(e^{-inx}, e^{-inx}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\overline{e^{-inx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

であるから、e^{inx} の係数 $f(n)$ は

$$f(n) = \frac{\left(f, e^{-inx}\right)}{\left(e^{-inx}, e^{-inx}\right)} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{-inx}}\,dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.\blacksquare$$

解答 43. (4) 以外は講義ノート **7.4「畳み込みの基本的な性質の証明」**(pp. 60–60) に書いてある。(4) は **7.3.2「静電場からの例」** に書いてある。■

解答 44.

(1) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-ix\xi}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi}dx\right)g(y)dy.
\end{aligned}$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = u + y$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+y)\xi} = e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}du\right)g(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}du\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\xi}dy \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi).\blacksquare
\end{aligned}$$

(2) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx\right)g(y)dy.
\end{aligned}$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = -\pi$ のとき $u = -\pi - y$, $x = \pi$ のとき $u = \pi - y$, $x = u + y$, $e^{-inx} = e^{-in(u+y)n} = e^{-inu}e^{-iny}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}e^{-iny}du\right)g(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}du\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}dy \\
&= \mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n).\blacksquare
\end{aligned}$$

(3) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\right)\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\omega^{-nj}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj}\right)g(k).
\end{aligned}$$

$\ell = j-k$ とおくと、$j=0$ のとき $\ell=-k$, $j=N-1$ のとき $\ell = N-1-k$, $j=\ell+k$, $\omega^{-nj} = \omega^{-in(\ell+k)} = \omega^{-n\ell}\omega^{-nk}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\omega^{-nk}\right)g(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\sum_{k=0}^{N-1} g(k)\omega^{-nk} \\
&= N\mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n).\blacksquare
\end{aligned}$$

(4) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)\right)e^{-in\xi} \\
&= \sum_{k=-\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\xi}\right)g(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}e^{-ik\xi}\right)g(k) \\
&= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\xi}\right) \\
&= \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi).\blacksquare
\end{aligned}$$

Mathematica で検算

```
ft[f_,x_,y_]:=FourierTransform[f, x, y, FourierParameters -> {0, -1}]

ft[Exp[-3 x^2], x, y]
ft[Exp[-3 Abs[x]],x,y]
ft[1/(x^2+9),x,y]

f[x_] := If[Abs[x] < 3, 1/6, 0]
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
ft[f[x], x, y]

ft[Sin[3x]/(3x),x,y]
```

解答

解答 1. $\alpha \neq 0$ とする。($\alpha = 0$ のときは定数関数なので、周期関数と考えない方が良い。) こういう問では、正の最小の周期 (それを基本周期と呼んだりする) を答えるものなので、$\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ が周期である。

$f(x) = \cos\alpha x, \sin\alpha x, e^{i\alpha x}$ のいずれも $f\left(x + \dfrac{2\pi}{\alpha}\right) = f(x)$ を満たす。$\dfrac{2\pi}{\alpha}$ が周期と言っても良いが、普通は絶対値を取った $\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ を答える。■

解答 3. cos の加法定理

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

から

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

これから

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cos b,\\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= -2\sin a \sin b.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right),\\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right).\end{aligned}$$

同様に sin の加法定理

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

から

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

これから

$$\begin{aligned}\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a \cos b,\\ \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2\cos a \sin b.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right),\\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right).\end{aligned}$$

任意の実数 A, B が与えられたとき、

$$a + b = A, \quad a - b = B$$

を満たす a, b は一意的に存在して、$a = \dfrac{A+B}{2}$, $b = \dfrac{A-B}{2}$. ゆえに

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\\ \sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},\\ \cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\\ \cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.\blacksquare\end{aligned}$$

解答 4. $k=0$ のとき ($\cos 0=1$, $\sin 0=0$, $e^0=1$ であるから)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos 0x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos 0\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 0x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 0\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}0\,dx=0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{kx}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{0x}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{0}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi.$$

$k\neq 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

($\sin k\pi=0$, $\sin(-k\pi)=0$ であるからと言っても良いし、$\sin kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 2π の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=-\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

($\cos k\pi=(-1)^k$, $\cos(-k\pi)=(-1)^{-k}=(-1)^k$ であるからと言っても良いし、$\cos kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 2π の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{kx}\,dx=\left[\frac{e^{ikx}}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

($e^{ik\pi}=(-1)^k$, $e^{-ik\pi}=(-1)^{-k}$ であるからと言っても良いし、e^{ikx} は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 2π の周期関数であるからと言っても良い。)

以上、計算して確かめたが、sin, cos は 1 周期の間に山と谷が同じだけあるので、積分すると 0 になるのは、当たり前ではある。■

復習 k を整数とするとき、$\sin k\pi=0$, $\cos k\pi=(-1)^k$, $e^{ik\pi}=(-1)^k$.

解答 6. 「$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数で、区分的に C^1 級であれば、

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

とおくとき、f の任意の連続点 x で

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

が成り立つ。」という定理が基本である。

(1) 積分を計算すると $a_k=0$, $b_k=\dfrac{2(-1)^{k-1}}{k}$ となるので、

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\sin kx=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right)\quad(x\in(-\pi,\pi)).$$

$\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を、$(-\pi,\pi)$ で f と一致し、$\widetilde{f}(\pi)=0$, 後は周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に C^1 級で、$\widetilde{f}$ は $(2m-1)\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。

(2) $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_k = \dfrac{4(-1)^k}{k^2}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ となるので、

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right) \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$[-\pi, \pi]$ で f と一致し、周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に C^1 級であるから、いたるところ収束する。

(3) $a_0 = \pi$, $a_k = \dfrac{2\left(-1 + (-1)^k\right)}{k^2\pi}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ となるので、

$$\begin{aligned}|x| &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\left(-1 + (-1)^k\right)}{k^2\pi} \cos kx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) \quad (x \in [-\pi, \pi]).\end{aligned}$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$[-\pi, \pi]$ で f と一致し、周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に C^1 級であるから、いたるところ収束する。

(4) $a_k = 0$, $b_k = -\dfrac{2\left(1 + (-1)^{k-1}\right)}{k\pi}$ となるので、

$$\begin{aligned}\operatorname{sign} x &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\left(1 + (-1)^{k-1}\right)}{k\pi} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right) \quad (x \in (-\pi, \pi)).\end{aligned}$$

$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、$(-\pi, \pi)$ で f と一致し、$\widetilde{f}(\pi) = 0$, 後は周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に C^1 級で、$\widetilde{f}$ は $m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。$\widetilde{f}(0+0) = 1$, $\widetilde{f}(0-0) = -1$ であるから、$\dfrac{\widetilde{f}(0+0) + \widetilde{f}(0-0)}{2} = 0 = \widetilde{f}(0)$ であるから、0 でも収束して $\widetilde{f}(0)$ に等しい。

(5) $a_0 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N}, k \neq 2)$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ であるから

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

これは倍角の公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ から導かれる $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ からも得られる。

(6) $a_k = 0$, $b_1 = \dfrac{3}{4}$, $b_3 = -\dfrac{1}{4}$, $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N}, k \neq 1, 3)$ であるから、

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \quad (x \in (-\pi, \pi)).$$

これは 3 倍角の公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ から導かれる $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ からも得られる。■

解答 7.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

とおくと

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

(1) f が偶関数であれば、$f(x)\cos nx$ は偶関数、$f(x)\sin nx$ は奇関数であるので、

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \quad (n\in\mathbb{N}),\\
a_n &= 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots).
\end{aligned}$$

(2) f が奇関数であれば、$f(x)\cos nx$ は奇関数、$f(x)\sin nx$ は偶関数であるので、

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots),\\
b_n &= 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\cdots).\blacksquare
\end{aligned}$$

解答 8. (1) まず $\widetilde{f}\colon[-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L])\\ f(-x) & (x\in[-L,0))\end{cases}$$

で定めると、これは連続かつ区分的に滑らかな偶関数であり、$\widetilde{f}(L)=\widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに $\cos\dfrac{2n\pi x}{2L}=\cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L}=\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問題 7 で $T=2L$ の場合)。

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),\\
a_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\\
b_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.
\end{aligned}$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f}=\widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は偶関数であり、$[0,L]$ で f に等しいので

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\quad b_n=0.$$

以上から

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L} \quad (x\in[0,L]),\quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

(2) まず $\widetilde{f}\colon[-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L])\\ -f(-x) & (x\in[-L,0))\end{cases}$$

で定める。連続であるためには、$f(0)=0$ であることが必要十分である。以下 $f(0)=0$ と仮定する。すると $\widetilde{f}$ は区分的に滑らかな奇関数であり、$\widetilde{f}(L)=-\widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。$\widetilde{f}(L)=\widetilde{f}(-L)$ が成り立つためには、$f(L)=0$ であることが必要十分である。以下 $f(L)=0$ と仮定する。$\widetilde{f}$ を周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに

$\cos\dfrac{2n\pi x}{2L} = \cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L} = \sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問 7 で $T = 2L$ の場合)。

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),\\
a_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\\
b_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.
\end{aligned}$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f} = \widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は奇関数であり、$[0,L]$ で f に等しいので

$$a_n = 0,\quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

以上から

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (x\in[0,L]),\quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

$f(0) = f(L) = 0$ を仮定した (この必要性は、$x = 0, L$ で展開が成り立つことからも分かる)。■

解答 9. $n > 0$ のとき、$n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx} = \cos(-nx) + i\sin(-nx) = \cos nx - i\sin nx$ であるから、

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos nx - i\sin nx\right)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right).
\end{aligned}$$

$n = 0$ のとき、$e^{-inx} = e^0 = 1 = \cos nx$ であるから、

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x\,dx = \frac{1}{2}a_0.$$

$n < 0$ のとき、$-n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx} = \cos(-nx) + i\sin(-nx)$ であるから

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)\,dx + i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right).■
\end{aligned}$$

解答 10. (**解法 1**) 直交系 $\{\varphi_n\}$ で $f = \sum_n c_n\varphi_n$ と展開するとき $c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$ という結果を用いて解答する。

$\varphi_n(x) = \cos\frac{2n\pi x}{T}$ $(n = 0,1,\cdots)$, $\psi_n(x) = \sin\frac{2n\pi x}{T}$ $(n = 0,1,\cdots)$ $(n\in\mathbb{N})$ とおくとき $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}\cup\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は直交系である。$n \neq 0$ のとき

$$(\varphi_n,\varphi_n) = \int_{-T/2}^{T/2}\cos^2\frac{2n\pi x}{T}dx = \int_{-T/2}^{T/2}\frac{1+\cos(4n\pi x/T)}{2}dx = \frac{T}{2},$$

$$(\psi_n,\psi_n) = \int_{-T/2}^{T/2}\sin^2\frac{2n\pi x}{T}dx = \int_{-T/2}^{T/2}\frac{1-\cos(4n\pi x/T)}{2}dx = \frac{T}{2}$$

であるから

$$a_n = \frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,$$

$$b_n = \frac{(f,\psi_n)}{(\psi_n,\psi_n)} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx.$$

一方

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_{-T/2}^{T/2} 1dx = T$$

であるから

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx.$$

すなわち

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx.$$

まとめると

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

(**解法 2**) f が周期 T であることから、

$$F(\xi) := f\left(\frac{T}{2\pi}\xi\right) \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

とおくと、F は周期 2π である。ゆえに

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\cos n\xi\;d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\sin n\xi\;d\xi$$

とおくと

$$F(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\xi + b_n\sin n\xi\right).$$

ゆえに

$$f(x) = F\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right).$$

$\xi = \frac{2\pi}{T}x$ であるから、$\xi = -\pi, \pi$ のとき、$x = -T/2,\, T/2$ であるから

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\;dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\;dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\;dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\;dx.\blacksquare$$

解答 11. (これは授業中にやったので省略する。有限個の点を除いて $g(x)=\operatorname{sign} x$ であるから、実は f と g の Fourier 級数は、実質的に (No. 1 の) 問 6 で求めてある。Fourier 級数展開の結果は

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right),\\ g(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right),\\ h(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2k-1)x=\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots\right). \end{aligned}$$

コンピューターを用いて部分和を描く方法は「宿題 1 のグラフ描き」[9]) を見よ。f は $(2k-1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 以外では微分可能で、微分可能なところでは

$$f'(x)=g(x)\quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{(2k-1)\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}).$$

実は超関数の意味で $f'=g$, $g'=h$ が成り立つ。f の Fourier 級数展開を項別に微分したものが g の Fourier 級数展開に等しく、g の Fourier 級数展開を項別に微分したものが h の Fourier 級数展開に等しくなっている。■

解答 13. (ii), (iii) はやれば出来るはず。(i) をきちんとやるのは難しいので、書いておく。

(i) の証明　$f\in X$ とするとき、任意の x に対して $|f(x)|^2\ge 0$ であるから、

$$(f,f)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\ge 0.$$

$f=0$ つまり $(\forall x\in\mathbb{R})$ のとき $f(x)=0$ であれば、$(f,f)=0$ である。逆に $(f,f)=0$ とすると、

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=0.$$

$|f(x)|^2$ は連続関数であるから、$(\forall x\in[-\pi,\pi])$ $|f(x)|^2=0$ (もしそうでないとすると、$(\exists x_0\in[-\pi,\pi])$ $|f(x_0)|^2\ne 0$. $|f(x_0)|^2>0$ であるが、$|f|^2$ の連続性から、x_0 の十分近くでは $|f(x)|^2\ge |f(x_0)|^2/2>0$. すると $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx>0$ となり矛盾する)。ゆえに $f(x)=0$ $(x\in[-\pi,\pi])$. f は周期 2π の関数だから $f(x)=0$ $(x\in\mathbb{R})$. すなわち $f=0$. ■

解答 14.

$$\begin{aligned} (f,\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2) &= \overline{(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2,f)}=\overline{\lambda_1(f_1,g)+\lambda_2(f_2,g)}=\overline{\lambda_1}\,\overline{(g_1,f)}+\overline{\lambda_2}\,\overline{(g_2,f)}\\ &=\overline{\lambda_1}(f,g_1)+\overline{\lambda_2}(f,g_2).■ \end{aligned}$$

解答 15. 任意の複素数 z に対して、$z+\overline{z}=2\operatorname{Re} z$ が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned} (f+g,f+g) &= (f,f+g)+(g,f+g)=(f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g)=(f,f)+(f,g)+\overline{(f,g)}+(g,g)\\ &=(f,f)+2\operatorname{Re}(f,g)+(g,g).■ \end{aligned}$$

[9] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/fourier-2014/toi1-drawing.pdf

解答 16. 問の文中の解説から、$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$t^2(f,f)+2t(f,g)+(g,g)\geq 0.$$

一般に $(f,f)\geq 0$ であるが、$(f,f)>0$ か、$(f,f)=0$ かで場合分けする。

(a) $(f,f)>0$ の場合、2次関数の符号が0以上ということから、判別式≤ 0. ゆえに $(2(f,g))^2-4(f,f)(g,g)\leq 0$. 整理すると $(f,g)^2\leq (f,f)(g,g)$. ゆえに ($\sharp$) の不等式が成り立つ。

(b) $(f,f)=0$ の場合、$(\forall t\in\mathbb{R})$ $2t(f,g)+(g,g)\geq 0$ より $(f,g)=0$ でなければならない ($(f,g)\neq 0$ ならば矛盾が導かれる)。ゆえに ($\sharp$) の不等式の両辺とも 0 で、不等式は成立する。

等号の成立条件を考える。

f と g が1次従属のとき、等号が成り立つことは簡単に分かるので省略する。

f と g が1次独立のときは、上の議論をていねいにたどると、$(f,g)^2<(f,f)(g,g)$ が導かれる。(実際、任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $tf+g\neq 0$ であるので、$(tf+g,tf+g)>0$ であり、2次関数の符号が正であるから、判別式は負である。) ゆえに ($\sharp$) で等号が成り立つならば、f と g は1次独立ではない。■

(少し書き方を変えて) f と g が1次従属のとき、$(\exists t\in\mathbb{R})$ $f=tg$ または $(\exists s\in\mathbb{R})$ $g=sf$. 前者の場合、($\sharp$) の不等式の両辺はともに $t^2(g,g)^2$. 後者の場合、($\sharp$) の不等式の両辺はともに $s^2(f,f)^2$. ゆえに ($\sharp$) の不等式で等号が成立する。

f と g が1次独立のとき (このとき $f\neq 0$ であることに注意)、$(\forall t\in\mathbb{C})$ $tf+g\neq 0$. 特に、$(f,g)=|(f,g)|\,e^{i\theta}$ となる $\theta\in\mathbb{R}$ を取って、$t=se^{-i\theta}$ $(s\in\mathbb{R})$ とおくと、$t(f,g)=s\,|(f,g)|$ であるから、

$$\begin{aligned}(tf+g,tf+g)&=(tf,tf)+2\,\mathrm{Re}(tf,g)+(g,g)=|t|^2(f,f)+2\,\mathrm{Re}\,[t(f,g)]+(g,g)\\&=s^2(f,f)+2s\,|(f,g)|+(g,g).\end{aligned}$$

ゆえに任意の $s\in\mathbb{R}$ に対して、

$$s^2(f,f)+2s\,|(f,g)|+(g,g)>0.$$

判別式は負でなければならないので、$|(f,g)|^2<(f,f)(g,g)$. ■

解答 17. $f,g\in X$ とする。任意の複素数 λ に対して、

$$0\leq(\lambda f+g,\lambda f+g)=|\lambda|^2(f,f)+2\,\mathrm{Re}\,(f,g)+(g,g) \tag{2}$$

が成り立つ。複素数 (f,g) の指数形式を $(f,g)=\rho e^{i\phi}$ $(\rho\geq 0,\ \phi\in\mathbb{R})$ とする。$\rho=|(f,g)|$ である。任意の実数 t に対して、$\lambda:=te^{-i\phi}$ とおいて、(2) に代入すると、$\lambda(f,g)=te^{-i\phi}\cdot|(f,g)|\,e^{i\phi}=t\,|(f,g)|$ であるから

$$t^2(f,f)+2t\,|(f,g)|+(g,g)\geq 0.$$

ここから後は、問 17 と同様である。■

解答 18. (準備中) 不等式自体は成り立つ。■

解答 19. 任意の $f\in X$ に対して、$(f,f)\geq 0$ であるから、$\sqrt{(f,f)}$ は意味を持ち、$\|f\|$ が定義できる。

(a) 任意の $f\in X$ に対して、$(f,f)\geq 0$ であるから、$\|f\|=\sqrt{(f,f)}\geq 0$. また $\|f\|=0\Leftrightarrow(f,f)=0\Leftrightarrow f=0$.

(b) 任意の $f\in X$, 任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して、

$$\|\lambda f\|=\sqrt{(\lambda f,\lambda f)}=\sqrt{\lambda\bar{\lambda}\,(f,f)}=\sqrt{|\lambda|^2(f,f)}=|\lambda|\sqrt{(f,f)}=|\lambda|\,\|f\|.$$

(c) 任意の $f,\, g \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g) = \|f\|^2 + (f,g) + \overline{(f,g)} + \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\|f\|+\|g\|)^2 - \|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\,\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 - \left(\|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2\right) \\ &= 2\left(\|f\|\,\|g\| - \mathrm{Re}(f,g)\right) \\ &\geq 2\left(\|f\|\,\|g\| - |(f,g)|\right) \geq 0.\end{aligned}$$

最後のところで Schwarz の不等式 $|(f,g)|^2 \leq (f,f)(g,g)$ を用いた。これから

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|\,.\blacksquare$$

解答 20. 条件 (ii) と問 14 で示したこと、それと $a \in \mathbb{C}$ に対して $a + \overline{a} = 2\,\mathrm{Re}\,a$ であることを用いる。

$$\begin{aligned}(f+g, f+g) &= (f, f+g) + (g, f+g) = (f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g) \\ &= (f,f)+(f,g)+\overline{(f,g)}+(g,g) = (f,f) + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + (g,g).\blacksquare\end{aligned}$$

解答 21.

$$\begin{aligned}\|a_1+\cdots+a_n\|^2 &= \left(\sum_{j=1}^n a_j, \sum_{k=1}^n a_k\right) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n (a_j, a_j) + \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_j, a_k) + \sum_{1\leq k<j\leq n} (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} 0 + \sum_{1\leq k<j\leq n} 0 = \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2\,.\blacksquare\end{aligned}$$

解答 22.

(1) $\{\varphi_n\} \in \mathbb{N}$ を正規直交系とする。$n \neq m$ のとき $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} = 0$. また $(\varphi_n, \varphi_n) = \delta_{nn} = 1 \neq 0$.

(2) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を直交系とする。$N \in \mathbb{N}$, $c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K}$ が

$$\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j = 0$$

を満たすとするとき、$1 \leq n \leq N$ を満たす n に対して、

$$0 = (0, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^N c_j\varphi_j, \varphi_n\right) = \sum_{j=1}^N c_j\left(\varphi_j, \varphi_n\right) = \sum_{j=1}^N c_j \delta_{jn} = c_n\delta_{nn} = c_n \cdot 1 = c_n.$$

すなわち $c_1 = \cdots = c_N = 0$. ゆえに $\{\varphi_n\}$ は1次独立である。 $\blacksquare$

解答 23. (少し雑だけど、とりあえず) $u_1, u_2, \cdots \in X$ は 1 次独立とするとき、正規直交系 $\{\varphi_n\}$ で、

$$\mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle = \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle$$

が成り立つようなものを求める。

$n = 1, 2, \cdots$ の順に φ_n を定める。まず

$$\text{(GS1)} \qquad \varphi_1 := \frac{1}{\|u_1\|} u_1$$

とおくと、$\{\varphi_1\}$ は正規直交系であり ($\because \|\varphi_1\| = 1$)、$\mathrm{Span}\langle u_1\rangle = \mathrm{Span}\langle\varphi_1\rangle$.

$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ まで求まった (正規直交系であり、$\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle$ が成り立つ) とする。

$$\text{(GS2)} \qquad \psi_{k+1} := u_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j$$

とおく。$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ は正規直交系だから、

$$\begin{aligned}
(\psi_{k+1}, \varphi_j) &= \left(u_{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_\ell)\varphi_\ell, \varphi_j \right) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - \sum_{\ell=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_\ell)(\varphi_\ell, \varphi_j) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - (u_{k+1}, \varphi_j) \cdot 1 = 0 \quad (j = 1, \cdots, k).
\end{aligned}$$

また $\psi_{k+1} \neq 0$ である (もしも $\psi_{k+1} = 0$ とすると、$u_{k+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j \in \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ となり、$u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}$ が 1 次独立であることに反する)。

$$\text{(GS3)} \qquad \varphi_{k+1} := \frac{1}{\|\psi_{k+1}\|} \psi_{k+1}$$

とおくと、$(\varphi_{k+1}, \varphi_j) = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$, $(\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1}) = 1$. ゆえに $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}$ は正規直交系である。また $\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_{k+1}\rangle$ が成り立つ。■

解答 24.

$$\begin{aligned}
(\psi_n, \psi_m) &= \left(\frac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n, \frac{1}{\|\varphi_m\|}\varphi_m, \right) = \frac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_m\|} (\varphi_n, \varphi_m) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_n\|} (\varphi_n, \varphi_n) = 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{\|\varphi_n\|\,\|\varphi_m\|} \cdot 0 = 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases} \\
&= \delta_{nm}. \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 25. (準備中。まあ講義ノートにも書いてあるし。) ■

解答 26. $N \in \mathbb{N}$ とする。$h_N := \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k$ とおくと、$1 \leq j \leq N$ なる j に対して

$$\begin{aligned}
(f - h_N, \varphi_j) &= \left(f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k, \varphi_j \right) = (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_j) \\
&= (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\delta_{kj} = (f, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0.
\end{aligned}$$

ゆえに[10]

$$(f - h_N, h_N) = \left(f - h_N, \sum_{j=1}^{N} (f, \varphi_j)\varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \overline{(f, \varphi_j)} (f - h_N, \varphi_j) = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \|f - h_N + h_N\|^2 = \|f - h_N\|^2 + 2\operatorname{Re}(f - h_N, h_N) + \|h_N\|^2 = \|f - h_N\|^2 + \|h_N\|^2 \\ &\geq \|h_N\|^2 .\end{aligned}$$

φ_j $(j = 1, \cdots, N)$ は互いに直交しているので (ピタゴラスの定理から)

$$\sum_{k=1}^{N} |(f, \varphi_k)|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_j)\varphi_j \right\|^2 = \|h_N\|^2 \leq \|f\|^2 .$$

これが任意の $N \in \mathbb{N}$ について成り立つことから

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2 .\blacksquare$$

(テキストによっては、$\|f\|^2$ から始めて、一気に $\|f - h_N\|^N + \|h_N\|^2$ に等しいことを導いているものもある。)

解答 27. まず (念のため) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ は正規直交系であることを確かめよう。$\{\cos nx\}_{n\geq 0} \cup \{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ が直交系であることは分かっているので、長さが 1 であることを確かめれば良い。

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1, \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1, \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2}\, ; dx = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1.
\end{aligned}$$

a_0', a_n', b_n' をこの正規直交系に関する係数とする。すなわち

$$\begin{aligned}
a_0' &= \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f, 1), \\
a_n' &= \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, \cos nx), \\
b_n' &= \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, \sin nx).
\end{aligned}$$

Bessel の不等式は

$$(\star) \qquad |a_0'|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n'|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n'|^2 \leq \|f\|^2 .$$

ところで

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f, 1), \quad a_n = \frac{1}{\pi}(f, \cos nx), \quad b_n = \frac{1}{\pi}(f, \sin nx) \quad (n \in \mathbb{N})$$

---

[10]最初から一気に証明出来なくもない。$(f - h_N, h_N) = \left(f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k, \sum_{j=1}^{N} (f, \varphi_j)\varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \overline{(f, \varphi_j)}\,(f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} (f, \varphi_k)\overline{(f, \varphi_j)}\,(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{N} |(f, \varphi_j)|^2 - \sum_{k=1}^{N} |(f, \varphi_k)|^2 = 0.$

であるから、

$$a_0' = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0, \quad a_n' = \sqrt{\pi} a_n, \quad b_n' = \sqrt{\pi} b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$(\star)$ に代入すると

$$\frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi |a_n|^2 + + \sum_{n=1}^{\infty} \pi |b_n|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

両辺を π で割って

$$\frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx. \blacksquare$$

解答 28.

(1) f は連続で区分的に C^1 級なので、f の Fourier 級数は一様収束して、和は f に等しい。特に任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right).$$

$x = 0$ を代入して

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} S_{\text{奇}}.$$

ゆえに

$$S_{\text{奇}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(余談になるが、$S = \dfrac{4}{3} S_{\text{奇}} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{6}$.)

(2) $a_0 = \pi$, $a_n = \dfrac{4}{n^2 \pi}$ (n が奇数), $a_n = 0$ (n が正の偶数), $b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) であるので、

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \right).$$

一方

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Parseval の不等式に代入して

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} Q_{\text{奇}} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

ゆえに

$$Q_{\text{奇}} = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^4}{96}. \blacksquare$$

余談 (余談になるが、$Q_{\text{偶}} = \dfrac{1}{2^4} Q = \dfrac{Q}{16}$ であるから、$Q_{\text{奇}} = Q - Q_{\text{偶}} = \dfrac{15}{16} Q$ であるので、$Q = \dfrac{16}{15} Q_{\text{奇}} = \dfrac{16}{15} \cdot \dfrac{\pi^4}{96} = \dfrac{\pi^4}{90}$. 一つの Fourier 級数展開から S と Q が求まるのはちょっと面白い。)
(参考: Mathematica で `Sum[1/n^4,{n,1,Infinity,2}]` とすると、$\pi^4/96$ と答えてくれる。)

解答 29. $\mathbb{R}^n$ の内積に関する Schwarz の不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{N} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} b_n^2} \quad ((a_1,\dots,a_N),(b_1,\dots,b_N)\in\mathbb{R}^N)$$

を思い出そう。

$|x_n|$, $|y_n|$ をこの Schwarz の不等式の a_n, b_n とみなすことによって

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| = \sum_{n=1}^{N} |x_n|\,|y_n| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2}.$$

0 以上のものはたくさん足した方が大きいので

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}.$$

この右辺を M とおくと、

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \le M.$$

これは級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ の部分和の作る数列が上に有界ということを示している。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ は収束する。すなわち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ は絶対収束する。したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ は収束し、

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \le M = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}. \blacksquare$$

(余談) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ であるような複素数列 $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の全体を ℓ^2 と表す。$a, b \in \ell^2$ とするとき

$$(a,b) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

により $(a,b) \in \mathbb{C}$ が定義できることがこの問題から分かる。ℓ^2 はこの (a,b) を内積として内積空間になる。

解答 30. 複素数列全体の集合が問題文に定義した和と複素数倍について、$\mathbb{C}$ 上の線形空間をなすことは認めることにする。零ベクトルは $\mathbf{0} := \{0,0,0,\cdots\}$.

$\{x_n\} \in \ell^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ であれば、$\{\lambda x_n\} \in \ell^2$ は容易に分かる。

$|x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \le 2\left(|x|^2 + \|y\|^2\right)$ に注意すると、$\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^2$ であれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \le 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right) < \infty.$$

ゆえに $\{x_n\} + \{y_n\} \in \ell^2$.

$|x|\,|\bar{y}| \le |x|^2 + |y|^2$ であるから、$\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^2$ であれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ は収束するので、$\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ が定義できる。

以上から、ℓ^2 は、問題文中の和、複素数倍、$(\cdot,\cdot)$ が定義できる。

$(\cdot,\cdot)$ が内積の公理を満たすことの確認をしよう。

$$(\{x_n\}, \{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \ge 0.$$

また

$$(\{x_n\},\{x_n\})=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad |x_n|^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad x_n=0 \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n\}=\mathbf{0}.$$

線形性 $(\lambda\{x_n\}+\mu\{y_n\},\{z_n\})=\lambda(\{x_n\},\{z_n\})+\mu(\{y_n\},\{z_n\})$, 対称性 $(\{y_n\},\{x_n\})=\overline{(\{x_n\},\{y_n\})}$ も容易に確かめられる (サボる)。

以上より ℓ^2 は $\mathbb{C}$ 上の内積空間である。 ■

解答 31.

(1) (グラフを描くのが良い。) 一周期区間 $[-\pi,\pi]$ に制限すると、$x=0,\pm\pi$ で不連続、$(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ で連続である。周期 2π の周期関数であるから、$n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ で不連続で、$x\in\mathbb{R}\setminus\{n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\}$ では連続である。ゆえに不連続点は $n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.

(2) $x=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0)=g(0+0)=1$, $g(x-0)=g(0-0)=-1$. $x=(2k-1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0)=g(-\pi+0)=-1$, $g(x-0)=g(\pi-0)=1$.

(3) g は周期 2π、 区分的に C^1 級であるので、g の Fourier 級数は各点で収束し、和 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ は

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\begin{cases} g(x) & (x \text{ が } g \text{ の連続点}) \\ \dfrac{g(x+0)+g(x-0)}{2} & (x \text{ が } g \text{ の不連続}). \end{cases}$$

(2) より x が g の不連続点のとき、$g(x+0)+g(x-0)=\pm1+\mp1=0=g(x)$ であるから、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x).$$

(任意の x で $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$ となるのは、最初に $g(x)=0$ $(x=0,\pm\pi)$ と定義したからで、もともとそうする必然性はあまりないけれど (どうせ、どうやっても g は不連続なので)、そうしておけば、最後に全部の点で極限が g に等しくなって気持ち良いかな、と思ったくらいの理由しかありません。Fourier 級数の方は積分で定まるので，$x=0,\pm\pi$ での値をどう定義しても変化しないことに注意。) ■

解答 32. f は周期 2π であるから $f(\pi)=f(-\pi)$ であることに注意する。

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(0x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(f(\pi)-f(-\pi)\right)=0.$$

$n\in\mathbb{N}$ とするとき、部分積分によって

$$\begin{aligned} A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n\sin nx)dx\right) \\ &=\frac{1}{\pi}\left(0+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)=n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=nb_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(n\cos nx)dx\right) \\ &=\frac{1}{\pi}\left(0-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right)=-n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=-na_n. \end{aligned}$$

複素 Fourier 係数については、(準備中) ■

解答 33.

(1) 仮定より、$M_n := |a_n| + |b_n|$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束し、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n|\,|\cos nx| + |b_n|\,|\sin nx| \le |a_n| \cdot 1 + |b_n| \cdot 1 = M_n.$$

Weierstrass の M-test により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は一様に絶対収束する。各項 $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ は連続関数であるから、部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ は連続であり、その一様収束の極限である $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は連続である。

(2) 連続関数 $|\varphi|$ は $[-\pi, \pi]$ で最大値 M を取ることから、

$$f(x)\overline{\varphi(x)} = \frac{a_0}{2}\,\overline{\varphi(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\overline{\varphi(x)}$$

も一様収束する。このことは、(1) と同様に Weierstrass の M-test をしても良いし ($M_n := M\,(|a_n| + \|b_n\|)$ とする)、

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| f(x)\overline{\varphi(x)} - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \overline{\varphi(x)} \right| \\
&\qquad \le M \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \right|
\end{aligned}$$

という不等式からも分かる ($N \to \infty$ のとき、右辺が 0 に収束するので、左辺も 0 に収束する)。従って項別積分が可能で

$$\begin{aligned}
(f, \varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\varphi(x)} dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\overline{\varphi(x)}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\overline{\varphi(x)} dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\overline{\varphi(x)} dx \right) \\
&= \frac{a_0}{2}\,(1, \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\,(\cos nx, \varphi) + b_n\,(\sin nx, \varphi) \right). \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 34. (結果のみ) $\mathcal{F}^2 f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}f)(-x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. ゆえに $\mathcal{F}^4 f = f$. ■

解答 35. 講義ノートの **2.3「Fourier 変換の簡単な性質」** に書いてある。■

解答 36.

(1) 前半は $\sqrt{3}x = y$ と変数変換して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

後半は、まず定義から

$$\mathcal{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-3x^2} e^{-ix\xi} dx.$$

平方完成して

$$-3x^2 - ix\xi = -3\left(x + \frac{i\xi}{6}\right)^2 - \frac{\xi^2}{12}$$

であるから、

$$\mathcal{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] = e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(x+i\xi/6)^2}dx = e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}dx$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/12} = \frac{e^{-\xi^2/12}}{\sqrt{6}}.$$

(2 つめの等号は、複素関数論の積分路の変形を用いる。詳細は省略。なお、授業では別解も紹介した。講義ノートの 1.4.5 に載せてある。)

(2) (i) 積分区間を、負の範囲と正の範囲で分けて、負の範囲の方は $y=-x$ と変数変換すると[11]

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{-3|x|}\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|}e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{-ix\xi}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-3x}e^{ix\xi}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-(3+i\xi)x}}{-(3+i\xi)} + \frac{e^{-(3-i\xi)x}}{-(3-i\xi)}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{3+i\xi} + \frac{1}{3-i\xi}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{6}{\xi^2+9} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\xi^2+9}.
\end{aligned}$$

(ii) 反転公式を用いると、(i) の結果から

$$\mathcal{F}^*\left[\frac{1}{\xi^2+9}\right](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|x|}.$$

公式 $\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}^*f(-\xi)$ を用いて

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+9}\right](\xi) = \mathcal{F}^*\left[\frac{1}{x^2+9}\right](-\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|-\xi|} = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|\xi|}.$$

(iii) これも単純な計算で

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3}^{3}\frac{1}{6}e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-3}^{x=3}$$
$$= \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i3\xi}-e^{i3\xi}}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{3\xi}\frac{e^{i3\xi}-e^{-i3\xi}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin 3\xi}{3\xi}.$$

(iv) はこれを反転させて

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin 3x}{3x}\right](\xi) = \sqrt{2\pi}f(-\xi) = \sqrt{2\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (|\xi|<3)\\ 0 & (|\xi|>3).\end{cases}$$

細かいことを言うと、(不連続点では、片側極限の平均値に収束するので) $\xi=\pm 3$ では $\sqrt{2\pi}\times\dfrac{1}{12}$ という値を取る (試験ではここまで書かなくても良いことにする)。 ■

最後の結果は

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{sign}\ (3-y) + \mathrm{sign}\ (3+y)\right)$$

となるが、

$$= \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\mathrm{sign}\ (3-y)+\mathrm{sign}\ (y+3)}{2}$$

であるから、OK.

[11] この辺は好みの問題で、変数変換しなくても計算できる。

解答 37. (準備中)

解答 38.

(1) 一般に $(e^z)^n = e^{nz}$ であるので、

$$\omega^N = \left(e^{2\pi i/N}\right)^N = e^{2\pi i} = 1.$$

(2) $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le N-1$ とするとき、$0 < m/N < N$ であるから、$0 < 2\pi m/N < 2\pi$, $\cos\dfrac{2\pi m}{N} \ne 1$. ゆえに

$$\omega^m = \left(e^{2\pi i/N}\right)^m = e^{2\pi i m/N} = \cos\frac{2\pi m}{N} + i\sin\frac{2\pi m}{N} \ne 1.$$

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj}$ は公比 ω^m の等比数列であるが、(1), (2) から、$m \equiv 0 \pmod N$ のとき $\omega^m = 1$, そうでないとき $\omega^m \ne 1$ である。

$$\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj} = \begin{cases} \dfrac{(\omega^m)^N - 1}{\omega^m - 1} = \dfrac{1-1}{\omega^{m-1}} = 0 & (m \not\equiv 0 \pmod N) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} 1 = N & (m \equiv 0 \pmod N). \blacksquare \end{cases}$$

解答 39. 講義ノートの **3.2** の命題3.3 (p. 47) は、$W = \left(\dfrac{1}{N}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$W^{-1} = \left(\omega^{(j-1)(n-1)}\right)$ という内容である。この証明を真似すれば良い。

命題 3.3 を使って良いならば、$\overline{\omega} = \omega^{-1}$ であるので、$U = \sqrt{N}W = \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$U^* = \overline{U^T} = \overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(j-1)(n-1)}\right)} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{(j-1)(n-1)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1}$. ゆえに $UU^* = \sqrt{N}W\dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1} = I$. ■

解答 40. 講義ノートの 1.1「離散 Fourier 係数 — なぜそのように定義するか」に書いてある。 ■

解答 41. 今年度は、定理 3.2.4 とした。$N > 2m$ となるように N を取れば良い。命題 3.1.2「離散フーリエ係数の性質」、特に $C_n = \displaystyle\sum_{m\equiv n} c_m$ という式を理解せよ、という問題である。詳しいことは省略する。 ■

解答 42. 離散時間 Fourier 変換については、講義ノートの 5 節に書いてあるわけだが、収束については $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2 < \infty$ の場合に軽く言及しているだけだった。(注意: 繰り返しになるけれど、この講義では、級数や積分の収束の証明を出来ることを要求しない。) 反転公式についても、Fourier 級数の話と同じだよね、で済ませてあった。以下は講義内容の補足として。

収束について $M_n := |f(n)|$ とおくと、$\left|f(n)e^{-in\omega}\right| = |f(n)| = M_n$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)| < \infty$ であるから、Weierstrass の M-test により $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}$ は一様に絶対収束するので、特に収束する。

周期性について (これは講義ノートに書いてあるけれど、ついでだから) $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$e^{-i2n\pi i} = 1$ であるから

$$\widehat{f}(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in(\omega+2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}e^{-i2n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} = \widehat{f}(\omega).$$

ゆえに $\widehat{f}$ は周期 2π である。

反転公式について　これは Fourier 級数の Fourier 係数がどうなるか、という話である。$\{e^{-inx}\}$ は直交系で

$$\left(e^{-inx}, e^{-inx}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\overline{e^{-inx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

であるから、e^{inx} の係数 $f(n)$ は

$$f(n) = \frac{\left(f, e^{-inx}\right)}{\left(e^{-inx}, e^{-inx}\right)} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{-inx}}\,dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx. \blacksquare$$

解答 43. (4) 以外は講義ノート **7.4「畳み込みの基本的な性質の証明」**(pp. 60–60) に書いてある。(4) は **7.3.2「静電場からの例」** に書いてある。 ■

解答 44.

(1) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-ix\xi}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi}dx\right)g(y)dy.
\end{aligned}$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = u + y$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+y)\xi} = e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}du\right)g(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}du\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\xi}dy \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi). \blacksquare
\end{aligned}$$

(2) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx\right)g(y)dy.
\end{aligned}$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = -\pi$ のとき $u = -\pi - y$, $x = \pi$ のとき $u = \pi - y$, $x = u + y$, $e^{-inx} = e^{-in(u+y)n} = e^{-inu}e^{-iny}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}e^{-iny}du\right)g(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}du\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}dy \\
&= \mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n). \blacksquare
\end{aligned}$$

(3) $h := f * g$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\right)\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\omega^{-nj}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj}\right)g(k).
\end{aligned}
$$

$\ell = j-k$ とおくと、$j=0$ のとき $\ell = -k$, $j = N-1$ のとき $\ell = N-1-k$, $j = \ell + k$, $\omega^{-nj} = \omega^{-in(\ell+k)} = \omega^{-n\ell}\omega^{-nk}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\omega^{-nk}\right)g(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\sum_{k=0}^{N-1} g(k)\omega^{-nk} \\
&= N\mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n). \blacksquare
\end{aligned}
$$

(4) $h := f * g$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)\right)e^{-in\xi} \\
&= \sum_{k=-\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\xi}\right)g(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}e^{-ik\xi}\right)g(k) \\
&= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\xi}\right) \\
&= \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi). \blacksquare
\end{aligned}
$$