**画像処理とフーリエ変換 課題 No. 2**　(2016/11/16 出題, 締め切り 12/7)

__年__ 組____番　氏名______________　(Oh-o! Meiji に PDF, または A4 サイズの紙で提出)

(a) $a>0$ に対して、関数 $f$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & (|x|<a)\\ 0 & (|x|>a)\end{cases}$$

で定めるとき、$f$ の Fourier 変換を (Fourier 変換の定義に基づき) 求めよ。

(b) $a>0$ に対して、関数 $g(x)=\dfrac{\sin(ax)}{ax}$ $(x\in\mathbb{R})$ の Fourier 変換を求めよ (結果だけでなく、そうなる理由も述べよ)。

(c) 連続関数 $\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\quad((x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)), \tag{1}$$

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\quad(x\in\mathbb{R}) \tag{2}$$

を満たす $u$ を求めたい (波動方程式の初期値問題)。

(1) $u$ の $x$ に関する Fourier 変換 $\hat{u}(\xi,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、それを解け。

(2) $\hat{u}$ を逆 Fourier 変換することによって、$u$ を求めよ。(この問題の解の公式は有名であり、それによると $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)\,dy$ となる。検算のために用いると良い。)