画像処理とフーリエ変換 宿題 No. 2　(2015/11/18 出題, 12/2 提出, 2 枚以上ホチキス止め)

__ 年 __ 組 ____ 番　氏名 ______________

問 2　(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の Fourier 変換 $\widehat{f}$ が定まるとする。このとき、次の (a), (b) を示せ。

(a) f が実数値であれば、$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi)$. (b) f が偶関数であれば $\widehat{f}$ も偶関数であり、また f が奇関数であれば $\widehat{f}$ も奇関数である。　(ヒント: $e^{-ix\xi} = \cos(x\xi) - i\sin(x\xi)$)

(2) 次の各関数の Fourier 変換を求めよ。可能ならば、計算結果を Mathematica で検算せよ。

(a) $f(x) = e^{-2|x|}$ (授業で紹介した結果に代入するのではなく、計算の途中経過を書くこと)

(b) $g(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{3} & (|x| < 3) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$　　(c) $h(x) = e^{-(x-1)^2/2}$

(1) (a) $f(x)$ は実数であるから、$\overline{f(x)} = f(x)$. また $\overline{e^{-ix\xi}} = e^{ix\xi}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{f}(\xi)} &= \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx} = \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)e^{-ix\xi}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}\ \overline{e^{-ix\xi}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(-\xi)}dx = \widehat{f}(-\xi).\end{aligned}$$

(b)

$$\widehat{f}(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(-\xi)}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-x)\xi}\ dx.$$

$y = -x$ とおくと、$dx = -dy$ であるから、

$$\widehat{f}(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} f(-y)e^{-iy\xi}\cdot(-1)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{-iy\xi}dy.$$

もしも f が偶関数ならば $f(-y) = f(y)$ であるから、

$$\widehat{f}(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy = \widehat{f}(\xi).$$

ゆえに $\widehat{f}$ も偶関数である。また、もしも f が奇関数ならば $f(-y) = -f(y)$ であるから、

$$\widehat{f}(-\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy = -\widehat{f}(\xi)$$

となり、$\widehat{f}$ は奇関数である。

(2) $f(x) = e^{-2|x|}$ とするとき、

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{2x}e^{-ix\xi}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2x}e^{-ix\xi}dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(2-i\xi)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-2-i\xi)x}dx\right)\end{aligned}$$

```
myF[fx_, x_, y_] :=
 FourierTransform[fx, x, y, FourierParameters -> {0, -1}]

myF[Exp[-2Abs[x]],x,y]
```