画像処理とフーリエ変換 練習問題 No. 3

桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/

2016 年 1 月 20 日

内積, Fourier 級数の続き

問 1. 数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2$ が収束するならば

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}$$

が成り立つことを示せ。

(N 項までの和についてはどこか (線形代数？) で習ったはず。後は極限を取る議論をきちんとするだけ。「数学の方法」、「数学解析」、「複素関数」のいずれかを履修した人向け。)

問 2. 複素数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のうち、絶対値の二乗和が収束するもの全体を ℓ^2 とおく:

$$\ell^2 := \left\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ \middle|\ x_n\in\mathbb{C}\ (n\in\mathbb{N}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\right\}.$$

ℓ^2 は、$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ に自然に和とスカラー倍を定義したベクル空間の部分ベクトル空間である。また、ℓ^2 の要素同士の内積を次式で定めるとき、ℓ^2 は $\mathbb{C}$ 上の内積空間である (内積の公理を満たす) ことを示せ。

$$\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$$

問 3. 周期 2π の関数 g を、$g(x) = \begin{cases} 1 & (x\in(0,\pi)), \\ 0 & (x=0,\pm\pi), \\ -1 & (x\in(-\pi,0)) \end{cases}$ で定める。(1) 不連続点を求めよ。(2) 不連続点 x に対して $g(x-0)$, $g(x+0)$ を求めよ。(3) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して、g の Fourier 級数は、$g(x)$ に収束することを示せ。

問 4. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が C^1 級, 周期 2π の関数のとき、

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx,\quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx$$

とおくと (要するに f' の Fourier 係数)

$$A_0 = 0,\quad a_n = -\frac{1}{n}B_n,\quad b_n = \frac{1}{n}A_n\quad (n\in\mathbb{N})$$

であることを示せ。ただし a_n, b_n は f の Fourier 係数とする。

問 5. (複素関数論履修者向け) 複素数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ が収束するならば、

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

とおくとき、以下のことが成り立つことを示せ。

(1) f は連続関数である。

(2) 任意の連続関数 φ に対して、

$$(f,\varphi) = \frac{a_0}{2}(1,\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(\cos nx,\varphi) + b_n(\sin nx,\varphi)\} \quad (\text{いわゆる項別積分}).$$

(4 つの (,) はいずれも関数の内積です。Weierstrass の M-test というのを使うので、習っていない人はこの問題を無視して構いません。)

Fourier 変換

問 6. 一般に関数 f の Fourier 変換を $\mathcal{F}f$ と表すとき、$\mathcal{F}^2 f = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)$, $\mathcal{F}^4 f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}f)))$ はどういう関数か、なるべく簡潔に答えよ。

問 7. 都合の良い仮定 (関数の微分可能性、出て来る積分の収束や、微分と積分の順序交換、部分積分など) をおいて、以下の性質を示せ。

(1) $\mathcal{F}[f_1+f_2] = \mathcal{F}f_1 + \mathcal{F}f_2$, $\mathcal{F}[\lambda f] = \lambda\mathcal{F}f$.

(2) $\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}^*f(-\xi)$, $\mathcal{F}^*f(x) = \mathcal{F}f(-x)$.

(3) $a \neq 0$ とするとき $\mathcal{F}\left[f(ax)\right](\xi) = \dfrac{1}{|a|}\mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right)$.

(4) $a \in \mathbb{R}$ とするとき $\mathcal{F}\left[f(x-a)\right](\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi)$.

(5) $\mathcal{F}\left[f(x)e^{iax}\right](\xi) = \mathcal{F}f(\xi-a)$.

(6) $\mathcal{F}\left[f'(x)\right](\xi) = (i\xi)\mathcal{F}f(\xi)$.

(7) $\dfrac{d}{d\xi}\mathcal{F}f(\xi) = -i\mathcal{F}\left[xf(x)\right](\xi)$.

問 8. (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}dx$ の値と、e^{-3x^2} の Fourier 変換を求めよ。

(2) Fourier 変換を求めよ。(i) $e^{-3|x|}$ (ii) $\dfrac{1}{x^2+9}$ (iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & (|x|<3) \\ 0 & (|x|>3) \end{cases}$ (iv) $\dfrac{\sin(3x)}{3x}$

(以上は、一般的な形の公式を授業で与えたが、それを覚えて、それに当てはめて解答しても、期末試験で評価しない。自分で式を導出できるようになっておくこと。(2) は順に解答すると、それほど難しくないはず。$\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}^*f(-\xi)$ は使って良い。)

問 9. (熱伝導方程式の初期値問題を 半分 解く。) $u\colon \mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ に対して、$\hat{u}$ を

$$\hat{u}(\xi,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}dx \quad ((\xi,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty))$$

で定める (x についてのみ Fourier 変換をしたもの)。

(1) u が次の偏微分方程式を満たすとき、$\hat{u}$ が満たす微分方程式を求めよ。

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)).$$

(2) u が $u(x,0)=u_0(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ を満たすとき、$\hat{u}(\xi,0)$ を f を用いて表せ。

(3) $\hat{u}$ を求めよ (積分を用いずに表せる)。

離散 Fourier 変換

問 10. $N\in\mathbb{N}$ に対して、$\omega := e^{2\pi i/N}$ とおくとき、以下の (1), (2) が成り立つことを示せ。

(1) $m\in\mathbb{N}, 1\le m\le N-1$ ならば $\omega^m\ne 1$. また $\omega^N=1$.

(2) $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{mj} = \begin{cases} N & (m\equiv 0 \pmod N) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

問 11. $N\in\mathbb{N}$ に対して、

$$\omega := e^{2\pi i/N}, \quad W := \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \omega^{-0\cdot 0} & \omega^{-0\cdot 1} & \cdots & \omega^{-0\cdot(N-1)} \\ \omega^{-1\cdot 0} & \omega^{-1\cdot 1} & \cdots & \omega^{-1\cdot(N-1)} \\ \omega^{-2\cdot 0} & \omega^{-2\cdot 1} & \cdots & \omega^{-2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega^{-(N-1)\cdot 0} & \omega^{-(N-1)\cdot 1} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix}, \quad U := \sqrt{N}W$$

とおくと、U は対称なユニタリ行列であることを示せ。また W^{-1} の成分を求めよ。

(行列の行番号、列番号を 0 から数えることにすると、W の (n,j) 要素は $\dfrac{1}{N}\omega^{-nj}$ である。)

問 12. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数であるとき、$N\in\mathbb{N}$ に対して、

$$h := \frac{2\pi}{N}, \quad \omega := e^{ih} = e^{2\pi i/N}, \quad x_j := jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j\in\mathbb{Z})$$

とおく。$n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

を $F(x) := \dfrac{1}{2\pi}f(x)e^{-inx}$ に関する台形則

$$\left(\frac{1}{2}F(x_0)+\sum_{j=1}^{N-1}F(x_j)+\frac{1}{2}F(x_N)\right)h$$

で近似すると

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\omega^{-nj}$$

となることを示せ。

問 13. 周期 T の関数 f が有限 Fourier 級数で定義できる、つまり $\{c_n\}_{n=-m}^{m} \in \mathbb{C}^{2m+1}$ があって

$$f(t) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

とする。このとき、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、N 項離散 Fourier 変換 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ は

$$C_n = c_n \quad (0 \le n \le m), \quad C_{N-n} = c_{-n} \quad (1 \le n \le m), \quad C_n = 0 \quad (m < n < N-m)$$

を満たすことを示せ。(つまり有限 Fourier 級数に対しては、もとの関数が完全に再生できる。)

離散時間 Fourier 変換

結果が周期 2π の関数になることと、反転公式くらいは押さえておこう。

問 14. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ が

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

を満たすとき

$$\widehat{f}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

が収束し、ω について周期 2π の関数となることを示せ。さらに次式が成り立つことを示せ。

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\omega) e^{inw} d\omega \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

畳み込み

問 15. $\mathbb{R}$ 上定義された関数の畳み込み $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$ $(x \in \mathbb{R})$ について、適当な仮定をおいて (あるいは積分の収束の条件などはとりあえず放置して)、以下の公式を示せ。

(1) $(f_1 + f_2) * g = (f_1 * g) + (f_2 * g)$, $(\lambda f) * g = \lambda (f * g)$.

(2) $f * g = g * f$. (3) $(f * g) * h = f * (g * h)$. (4) $(f * g)' = f' * g$.

問 16. 次の各場合に $\mathcal{F}[f * g]$ を計算して、$\mathcal{F} f \mathcal{F} g$ の定数倍であることを示せ。

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \mathcal{F} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

(2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \mathcal{F} f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(3) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ が周期 N の周期数列で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f * g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \mathcal{F} f(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \omega = e^{2\pi i/N}.$$

(4) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ が数列で、畳込みと、Fourier 変換を次式で定める場合

$$f * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \mathcal{F} f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

解答

ほとんどは講義ノートに書いてあるけれど、サービス精神でここに再録。

解答 1. $\mathbb{R}^n$ の内積に関する Schwarz の不等式

$$\left|\sum_{n=1}^N a_n b_n\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^N b_n^2} \quad ((a_1,\dots,a_N),(b_1,\dots,b_N)\in\mathbb{R}^N)$$

を思い出そう。

$|x_n|$, $|y_n|$ をこの Schwarz の不等式の a_n, b_n とみなすことによって

$$\sum_{n=1}^N |x_n y_n| = \sum_{n=1}^N |x_n|\,|y_n| \le \sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^N |y_n|^2}.$$

0 以上のものはたくさん足した方が大きいので

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^N |y_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^\infty |y_n|^2}.$$

この右辺を M とおくと、

$$\sum_{n=1}^N |x_n y_n| \le M.$$

これは級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n|$ の部分和の作る数列が上に有界ということを示している。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n|$ は収束する。すなわち $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ は絶対収束する。したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ は収束し、

$$\left|\sum_{n=1}^\infty x_n y_n\right| \le \sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \le M = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^\infty |y_n|^2}.\blacksquare$$

(余談) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$ であるような複素数列 $a=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の全体を ℓ^2 と表す。$a, b\in\ell^2$ とするとき

$$(a,b) := \sum_{n=1}^\infty a_n \overline{b_n}$$

により $(a,b)\in\mathbb{C}$ が定義できることがこの問題から分かる。ℓ^2 はこの (a,b) を内積として内積空間になる。

解答 2. 複素数列全体の集合が問題文に定義した和と複素数倍について、$\mathbb{C}$ 上の線形空間をなすことは認めることにする。零ベクトルは $\mathbf{0} := \{0,0,0,\cdots\}$.

$\{x_n\}\in\ell^2$, $\lambda\in\mathbb{C}$ であれば、$\{\lambda x_n\}\in\ell^2$ は容易に分かる。

$|x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \le 2\left(|x|^2 + \|y\|^2\right)$ に注意すると、$\{x_n\},\{y_n\}\in\ell^2$ であれば、

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n| \le 2\left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 + \sum_{n=1}^\infty |y_n|^2\right) < \infty.$$

ゆえに $\{x_n\}+\{y_n\}\in\ell^2$.

$|x|\,|\bar{y}| \le |x|^2 + |y|^2$ であるから、$\{x_n\},\{y_n\}\in\ell^2$ であれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x_n\overline{y_n}$ は収束するので、$\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ が定義できる。

以上から、ℓ^2 は、問題文中の和、複素数倍、$(\cdot,\cdot)$ が定義できる。

$(\cdot,\cdot)$ が内積の公理を満たすことの確認をしよう。

$$(\{x_n\},\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq 0.$$

また

$$(\{x_n\},\{x_n\}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad |x_n|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n\} = \mathbf{0}.$$

線形性 $(\lambda\{x_n\}+\mu\{y_n\},\{z_n\}) = \lambda(\{x_n\},\{z_n\})+\mu(\{y_n\},\{z_n\})$, 対称性 $(\{y_n\},\{x_n\}) = \overline{(\{x_n\},\{y_n\})}$ も容易に確かめられる (サボる)。

以上より ℓ^2 は $\mathbb{C}$ 上の内積空間である。 ■

解答 3.

(1) (グラフを描くのが良い。) 一周期区間 $[-\pi,\pi]$ に制限すると、$x=0,\pm\pi$ で不連続、$(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ で連続である。周期 2π の周期関数であるから、$n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ で不連続で、$x\in\mathbb{R}\setminus\{n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\}$ では連続である。ゆえに不連続点は $n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.

(2) $x=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0)=g(0+0)=1$, $g(x-0)=g(0-0)=-1$. $x=(2k-1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ のとき、$g(x+0)=g(-\pi+0)=-1$, $g(x-0)=g(\pi-0)=1$.

(3) g は周期 2π、 区分的に C^1 級であるので、g の Fourier 級数は各点で収束し、和 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ は

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} g(x) & (x \text{ が } g \text{ の連続点}) \\ \dfrac{g(x+0)+g(x-0)}{2} & (x \text{ が } g \text{ の不連続}). \end{cases}$$

(2) より x が g の不連続点のとき、$g(x+0)+g(x-0) = \pm1+\mp1 = 0 = g(x)$ であるから、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x).$$

(任意の x で $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ となるのは、最初に $g(x)=0$ $(x=0,\pm\pi)$ と定義したからで、もともとそうする必然性はあまりないけれど (どうせ、どうやっても g は不連続なので)、そうしておけば、最後に全部の点で極限が g に等しくなって気持ち良いかな、と思ったくらいの理由しかありません。Fourier 級数の方は積分で定まるので，$x=0,\pm\pi$ での値をどう定義しても変化しないことに注意。) ■

解答 4. f は周期 2π であるから $f(\pi)=f(-\pi)$ であることに注意する。

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(0x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(f(\pi)-f(-\pi)\right) = 0.$$

$n\in\mathbb{N}$ とするとき、部分積分によって

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n\sin nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(0+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) = n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(n\cos nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(0-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right) = -n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -na_n. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 5.

(1) 仮定より、$M_n := |a_n| + |b_n|$ とおくと、$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束し、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| \, |\cos nx| + |b_n| \, |\sin nx| \leq |a_n| \cdot 1 + |b_n| \cdot 1 = M_n.$$

Weierstrass の M-test により $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は一様に絶対収束する。各項 $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ は連続関数であるから、部分和 $\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ は連続であり、その一様収束の極限である $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は連続である。

(2) 連続関数 $|\varphi|$ は $[-\pi, \pi]$ で最大値 M を取ることから、

$$f(x)\overline{\varphi(x)} = \frac{a_0}{2} \, \overline{\varphi(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \, \overline{\varphi(x)}$$

も一様収束する。このことは、(1) と同様に Weierstrass の M-test をしても良いし ($M_n := M \left(|a_n| + \|b_n\| \right)$ とする)、

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in [-\pi,\pi]} \left| f(x)\overline{\varphi(x)} - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \overline{\varphi(x)} \right| \\
&\qquad \leq M \sup_{x \in [-\pi,\pi]} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \right|
\end{aligned}$$

という不等式からも分かる ($N \to \infty$ のとき、右辺が 0 に収束するので、左辺も 0 に収束する)。従って項別積分が可能で

$$\begin{aligned}
(f, \varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\varphi(x)} dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \overline{\varphi(x)} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \overline{\varphi(x)} dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \overline{\varphi(x)} dx \right) \\
&= \frac{a_0}{2} (1, \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (\cos nx, \varphi) + b_n (\sin nx, \varphi) \right). \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 6. (結果のみ) $\mathcal{F}^2 f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F} f)(x) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F} f)(-x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. ゆえに $\mathcal{F}^4 f = f$. $\blacksquare$

解答 7. 講義ノートの **2.3「Fourier 変換の簡単な性質」**に書いてある。 $\blacksquare$

解答 8.

(1) 前半は $\sqrt{3}x = y$ と変数変換して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

後半は、まず定義から

$$\mathcal{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-3x^2} e^{-ix\xi} dx.$$

平方完成して

$$-3x^2 - ix\xi = -3\left(x + \frac{i\xi}{6}\right)^2 - \frac{\xi^2}{12}$$

であるから、

$$\mathscr{F}\left[e^{-3x^2}\right][\xi] = e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(x+i\xi/6)^2}dx = e^{-\xi^2/12}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}dx$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/12} = \frac{e^{-\xi^2/12}}{\sqrt{6}}.$$

(2 つめの等号は、複素関数論の積分路の変形を用いる。詳細は省略。なお、授業では別解も紹介した。講義ノートの 1.4.5 に載せてある。)

(2) (i) 積分区間を、負の範囲と正の範囲で分けて、負の範囲の方は $y = -x$ と変数変換すると [1]

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[e^{-3|x|}\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|}e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{-ix\xi}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-ix\xi}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-3x}e^{ix\xi}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-(3+i\xi)x}}{-(3+i\xi)} + \frac{e^{-(3-i\xi)x}}{-(3-i\xi)}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{3+i\xi} + \frac{1}{3-i\xi}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{6}{\xi^2+9} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\xi^2+9}.
\end{aligned}$$

(ii) 反転公式を用いると、(i) の結果から

$$\mathscr{F}^*\left[\frac{1}{\xi^2+9}\right](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|x|}.$$

公式 $\mathscr{F}f(\xi) = \mathscr{F}^*f(-\xi)$ を用いて

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{x^2+9}\right](\xi) = \mathscr{F}^*\left[\frac{1}{x^2+9}\right](-\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|-\xi|} = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}e^{-3|\xi|}.$$

(iii) これも単純な計算で

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3}^{3}\frac{1}{6}e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-3}^{x=3}$$
$$= \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i3\xi}-e^{i3\xi}}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{3\xi}\frac{e^{i3\xi}-e^{-i3\xi}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin 3\xi}{3\xi}.$$

(iv) はこれを反転させて

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin 3x}{3x}\right](\xi) = \sqrt{2\pi}f(-\xi) = \sqrt{2\pi}\times\begin{cases}\frac{1}{6} & (|\xi|<3)\\ 0 & (|\xi|>3).\end{cases}$$

細かいことを言うと、(不連続点では、片側極限の平均値に収束するので) $\xi = \pm 3$ では $\sqrt{2\pi}\times\dfrac{1}{12}$ という値を取る (試験ではここまで書かなくても良いことにする)。 ■

最後の結果は

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{sign}\ (3-y) + \mathrm{sign}\ (3+y)\right)$$

となるが、

$$= \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\mathrm{sign}\ (3-y) + \mathrm{sign}\ (y+3)}{2}$$

であるから、OK.

[1] この辺は好みの問題で、変数変換しなくても計算できる。

解答 9. (準備中)

解答 10.

(1) 一般に $(e^z)^n = e^{nz}$ であるので、

$$\omega^N = \left(e^{2\pi i/N}\right)^N = e^{2\pi i} = 1.$$

(2) $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le N-1$ とするとき、$0 < m/N < N$ であるから、$0 < 2\pi m/N < 2\pi$, $\cos \dfrac{2\pi m}{N} \ne 1$. ゆえに

$$\omega^m = \left(e^{2\pi i/N}\right)^m = e^{2\pi i m/N} = \cos\frac{2\pi m}{N} + i \sin\frac{2\pi m}{N} \ne 1.$$

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj}$ は公比 ω^m の等比数列であるが、(1), (2) から、$m \equiv 0 \pmod{N}$ のとき $\omega^m = 1$, そうでないとき $\omega^m \ne 1$ である。

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \begin{cases} \dfrac{(\omega^m)^N - 1}{\omega^m - 1} = \dfrac{1-1}{\omega^{m-1}} = 0 & (m \not\equiv 0 \pmod{N}) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} 1 = N & (m \equiv 0 \pmod{N}). \blacksquare \end{cases}$$

解答 11. 講義ノートの **3.2** の命題3.3 (p. 47) は、$W = \left(\dfrac{1}{N}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$W^{-1} = \left(\omega^{(j-1)(n-1)}\right)$ という内容である。この証明を真似すれば良い。

命題 3.3 を使って良いならば、$\overline{\omega} = \omega^{-1}$ であるので、$U = \sqrt{N} W = \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(n-1)(j-1)}\right)$ とするとき、$U^* = \overline{U^T} = \overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-(j-1)(n-1)}\right)} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\omega^{(j-1)(n-1)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1}$. ゆえに $UU^* = \sqrt{N}W\dfrac{1}{\sqrt{N}}W^{-1} = I$. ■

解答 12. 講義ノートの 1.1「離散 Fourier 係数 — なぜそのように定義するか」に書いてある。 ■

解答 13. 今年度は、定理 3.2.4 とした。$N > 2m$ となるように N を取れば良い。命題 3.1.2「離散フーリエ係数の性質」、特に $C_n = \displaystyle\sum_{m \equiv n} c_m$ という式を理解せよ、という問題である。詳しいことは省略する。 ■

解答 14. 離散時間 Fourier 変換については、講義ノートの 5 節に書いてあるわけだが、収束については $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$ の場合に軽く言及しているだけだった。(注意: 繰り返しになるけれど、この講義では、級数や積分の収束の証明を出来ることを要求しない。) 反転公式についても、Fourier 級数の話と同じだよね、で済ませてあった。以下は講義内容の補足として。

収束について　$M_n := |f(n)|$ とおくと、$\left|f(n)e^{-in\omega}\right| = |f(n)| = M_n$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$ であるから、Weierstrass の M-test により $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}$ は一様に絶対収束するので、特に収束する。

周期性について　(これは講義ノートに書いてあるけれど、ついでだから) $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$e^{-i2n\pi i} = 1$ であるから

$$\widehat{f}(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in(\omega+2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega}e^{-i2n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} = \widehat{f}(\omega).$$

ゆえに $\widehat{f}$ は周期 2π である。

反転公式について　これは Fourier 級数の Fourier 係数がどうなるか、という話である。$\left\{e^{-inx}\right\}$ は直交系で

$$\left(e^{-inx}, e^{-inx}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\overline{e^{-inx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

であるから、e^{inx} の係数 $f(n)$ は

$$f(n) = \frac{\left(f, e^{-inx}\right)}{\left(e^{-inx}, e^{-inx}\right)} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{-inx}}\,dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.\blacksquare$$

解答 15. (4) 以外は講義ノート **7.4「畳み込みの基本的な性質の証明」**(pp. 60–60) に書いてある。(4) は **7.3.2「静電場からの例」** に書いてある。 ■

解答 16.

(1) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-ix\xi}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi}dx\right)g(y)dy.
\end{aligned}$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = u + y$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+y)\xi} = e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}e^{-iy\xi}du\right)g(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}du\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\xi}dy \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi).\blacksquare
\end{aligned}$$

(2) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx\right)g(y)dy.
\end{aligned}$$

$u = x - y$ とおくと、$dx = du$, $x = -\pi$ のとき $u = -\pi - y$, $x = \pi$ のとき $u = \pi - y$, $x = u + y$, $e^{-inx} = e^{-in(u+y)n} = e^{-inu}e^{-iny}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}e^{-iny}du\right)g(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}du\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}dy \\
&= \mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n).\blacksquare
\end{aligned}$$

(3) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\right)\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\omega^{-nj}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj}\right)g(k).
\end{aligned}$$

$\ell = j-k$ とおくと、$j=0$ のとき $\ell = -k$, $j = N-1$ のとき $\ell = N-1-k$, $j = \ell + k$, $\omega^{-nj} = \omega^{-in(\ell+k)} = \omega^{-n\ell}\omega^{-nk}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\omega^{-nk}\right)g(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)\omega^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\sum_{k=0}^{N-1} g(k)\omega^{-nk} \\
&= N\mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n). \blacksquare
\end{aligned}$$

(4) $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)\right)e^{-in\xi} \\
&= \sum_{k=-\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)e^{-in\xi}\right)g(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}e^{-ik\xi}\right)g(k) \\
&= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-im\xi}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ik\xi}\right) \\
&= \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi). \blacksquare
\end{aligned}$$

Mathematica で検算

```
ft[f_,x_,y_]:=FourierTransform[f, x, y, FourierParameters -> {0, -1}]

ft[Exp[-3 x^2], x, y]
ft[Exp[-3 Abs[x]],x,y]
ft[1/(x^2+9),x,y]

f[x_] := If[Abs[x] < 3, 1/6, 0]
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
ft[f[x], x, y]

ft[Sin[3x]/(3x),x,y]
```