画像処理とフーリエ変換 練習問題 No. 2

桂田 祐史

katurada AT meiji.ac.jp

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/

2015 年 10 月 21 日

内積に慣れて欲しいので、出来る限り以下の問題を解いてみて下さい。見かけはものものしいけれど、やってみると、大したことがないと感じられる問題が多い。アイディアを知らないと解けない、というタイプの問題もあるので、ちょっと考えて分からなければ、解答を読んで構わない (それでアイディアを覚える、という考え方をしよう)。ほとんどが式の計算により解決する問題なので、時間さえかければ勉強はしやすいと思う。

複素数についての 1 行復習: $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、$\bar{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

内積の基本

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする。X が体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間であり、X の任意の 2 元 x, y に対して、$(x, y) \in \mathbb{K}$ が定まっていて [1]、以下の (i), (ii), (iii) を満たすとき、(x, y) を x と y の**内積**と呼び、写像 $(\cdot, \cdot)$ のことも X 上の**内積**という。また、X と写像 $(\cdot, \cdot)$ の組 $(X, (\cdot, \cdot))$ を**内積空間**という。

$(\cdot, \cdot)$ を書くことをサボって、単に X 自身を内積空間ということも多い。

(i) $(\forall x \in X)$ $(x, x) \geq 0$. 等号が成立するのは $x = 0$ のとき、そのときに限る [2]。

(ii) $(\forall x, y \in X)$ $(y, x) = \overline{(x, y)}$.

(iii) $(\forall x_1, x_2, y \in X)$ $(\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K})$ $(c_1 x_1 + c_2 x_2, y) = c_1(x_1, y) + c_2(x_2, y)$.

問 1. 次の (1), (2) を確かめよ。

(1) $x = (x_j), y = (y_j) \in \mathbb{R}^n$ に対して、$(x, y) := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ とおくと、$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の内積である。

(2) $x = (x_j), y = (y_j) \in \mathbb{C}^n$ に対して、$(x, y) := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ とおくと、$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の内積である。

問 2. $\mathbb{R}$ で連続で、周期 2π の、複素数値の周期関数全体の集合を X とする。関数の和や複素数倍を自然に定義して、X は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる (これは証明しなくて良い [3])。さらに $f, g \in X$ に対して

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

と定めると、$(\cdot, \cdot)$ は X 上の内積であることを示せ。

次の 2 問は $\mathbb{C}$ 上の内積に慣れてもらうためのものである (どちらも内積の条件 (ii), (iii) を使う)。

[1] (x, y) という記号は、x と y の順序対を表す場合が多いが、ここでは内積を表すために用いている。記号の使い回しを嫌ってか、内積を表すために $\langle x, y \rangle$ という記号を使っている本も多い。

[2] これは $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ということを意味する。

[3] この証明をするのは、線形代数の良い演習問題だけれど、この講義としては要求しない。

問 3. $\mathbb{C}$ 上の内積空間 X では、任意の $f, g_1, g_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \overline{\lambda_1}\,(f, g_1) + \overline{\lambda_2}\,(f, g_2)\,.$$

問 4. $\mathbb{C}$ 上の内積空間 X では、任意の $f, g \in X$ に対して

$$(f+g, f+g) = (f,f) + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + (g,g)$$

が成り立つことを示せ。($\mathrm{Re}(f,g)$ は、複素数 (f,g) の実部という意味である。)

(注: $\mathbb{R}$ 上の内積空間の場合は、$(f+g, f+g) = (f,f) + 2(f,g) + (g,g)$ という見慣れた式が得られる。)

問5はアイディア一発で難しくない (自力で思いつかなくても、解答を一度見れば覚えられるだろう)。

問 5. 任意の内積空間 X について、

$$(\sharp)\qquad (\forall f, g \in X) \quad |(f,g)|^2 \le (f,f)\,(g,g) \quad (\text{等号} \Leftrightarrow f,\ g\ \text{が}\ 1\ \text{次従属})$$

が成り立つ (この不等式を Schwarz(シュワルツ) の不等式と呼ぶ)。ここでは簡単のため、$\mathbb{R}$ 上の内積空間数を考えることにする。任意の実数 t に対して、(i) より

$$(tf+g, tf+g) \ge 0.$$

左辺を (ii), (iii) を使って変形すると

$$t^2\,(f,f) + 2t(f,g) + (g,g) \ge 0.$$

これを t についての 2 次式とみて、($\sharp$) を導け。(注意: 2 次の係数が 0 かもしれないので慎重に。)

問 6. $\mathbb{C}$ 上の内積空間の場合に Shwarz の不等式を証明せよ。(工夫が必要で、少し難しい。)

問 7. 内積空間の条件 (i) のかわりに

(i$'$) 任意の $f \in X$ に対して $(f,f) \ge 0$.

が成り立つが、$(f,f) = 0$ であっても $f = 0$ とは限らない場合がときどき現れる。そのとき Schwarz の不等式は成り立つか。

問 8. X が $\mathbb{C}$ 上の内積空間であるとき、

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)} \quad (f \in X)$$

とおくと、以下の (a), (b), (c) が成り立つことを確かめよ。

(a) 任意の $f \in X$ に対して $\|f\| \ge 0$. 等号が成立するためには $f = 0$ が必要十分である。

(b) 任意の $f \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\|\lambda f\| = |\lambda|\ \|f\|$.

(c) 任意の $f, g \in X$ に対して $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

注 (a), (b), (c) を満たす関数 $\|\cdot\|$ のことを、X 上の**ノルム**と呼ぶ。ベクトル空間 X が、ノルム $\|\cdot\|$ を備えているとき、X を**ノルム空間**と呼ぶ。任意の内積空間はノルム空間になっているわけである。

問 9. X を内積空間とするとき、任意の $f, g \in X$ に対して

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

が成り立つことを示せ。(注: これ自身は簡単な計算問題だが、図形的に解釈すると有名な「パップスの中線定理」になる。有名な「射影定理」の証明でも鍵となる。)

直交性

最初に記号と用語の確認をしておく。

次式で定義される δ_{nm} を **Kronecker のデルタ**と呼ぶ。

$$\delta_{nm} := \begin{cases} 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq m \text{ のとき}). \end{cases}$$

内積空間 X の 2 元 x, y が**直交する**とは、$(x, y) = 0$ が成り立つことをいう。

この講義では、内積空間 X 内の列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**直交系**であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことと定義する [4]。

(i) $(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \neq m \Rightarrow (\varphi_n, \varphi_m) = 0.$ (ii) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0.$

内積空間 X 内の列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**正規直交系**であるとは、次が成り立つことと定義する [5]。

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) \quad (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

問 10. X は内積空間で、$a_1, \cdots, a_n \in X$ が互いに直交するとき、

$$\|a_1 + a_2 + \cdots + a_n\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \cdots + \|a_n\|^2$$

が成り立つことを示せ (**ピタゴラスの定理**の一般化)。

問 11. 次のことを確認せよ。

(1) 正規直交系は直交系である。 (2) 直交系は 1 次独立である。

今回は用いないが、線形代数で学んだ**グラム・シュミットの直交化法**はマスターしておくと良い。

問 12. グラム・シュミットの直交化法 (単にシュミットの直交化法とも呼ぶ) を説明せよ。

直交系を “正規化” すれば正規直交系になる。これを次の問で確かめておこう。

問 13. X を内積空間、$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の直交系とするとき、

$$\psi_n := \frac{1}{\|\varphi_n\|}\varphi_n$$

で定めた $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X の正規直交系であることを確かめよ。

次はぜひ理解して欲しい (2015/10/14 の講義のテーマ)。

問 14. X は内積空間、V は X の線型部分空間、$f \in X$, $h \in V$ とする。このとき次の (i), (ii) は同値であることを示せ。

(i) $(\forall v \in V)\ (f - h, v) = 0.$

(ii) $\|f - h\| = \inf_{g\in V} \|f - g\|.$

(h を f の V への**直交射影**と呼ぶ。)

注意 (i) $\Rightarrow$ (ii) の証明は簡単である。(ii) $\Rightarrow$ (i) の証明は少し難しい (授業ではうっかり $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の証明だけしか書かなかった)。

[4] 普通は、直交系をきちんと定義せず (条件 (ii) も書かないとか) に議論することが多い。

[5] 注: 直交系、正規直交系などの言葉は、添字の範囲が $\mathbb{N}$ でなく、有限集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ や $\mathbb{Z}$ などの場合にも用いる。そういう場合に定義をどう修正すれば良いかは明らかでしょう。

問 15. (Bessel の不等式の証明) X を内積空間、$\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ を X の正規直交系とするとき、任意の $f \in X$ に対して

$$\sum_{j=1}^{N} |(f, \varphi_n)|^2 \le \|f\|^2$$

が成り立つことを示せ。

(これから $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が正規直交系である場合も、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \le \|f\|^2$ が成り立つ。講義では、$\displaystyle\sum_{j=1}^{N}(f, \varphi_n)\varphi_n$ が f の $\mathrm{Span}\langle\varphi_1, \cdots, \varphi_N\rangle$ への直交射影である ($s_n = h$) と言って証明したけれど、この不等式を証明するだけならば、手短な証明が書ける。それを探してみよう。)

問 16. 内積空間の Bessel の不等式を用いて、次の不等式を示せ (ただし a_n, b_n は実 Fourier 係数とする)。

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \ dx.$$

(ヒント: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が正規直交系であることを用いる。実は不等式でなく、等式が成り立つが (Parseval の等式)、その証明はしない。)

「数学とメディア」で似たような問題が出たみたいなので、一つくらい。

問 17. 関数 $f(x) = |x|$ $(|x| \le \pi)$ の Fourier 級数は

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

であった。

(1) $x = 0$ での値を考察して、$S_{奇} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots$ の値を求めよ。

(2) Parseval の等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \ dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

を用いて、$Q_{奇} = \dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \cdots$ の値を求めよ。

(結果を書いておくと $S_{奇} = \dfrac{\pi^2}{8}$, $Q_{奇} = \dfrac{\pi^4}{96}$.)

余談

$S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $S_{偶} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ とおくと、$S_{偶} = \dfrac{S}{4}$, $S = S_{奇} + S_{偶}$ であるから、$S_{奇} = \dfrac{3}{4}S$.

解答

解答 2. (ii), (iii) はやれば出来るはず。(i) をきちんとやるのは難しいので、書いておく。

(i) の証明　$f \in X$ とするとき、任意の x に対して $|f(x)|^2 \geq 0$ であるから、

$$(f,f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\;dx \geq 0.$$

$f=0$ つまり $(\forall x \in \mathbb{R})$ のとき $f(x)=0$ であれば、$(f,f)=0$ である。逆に $(f,f)=0$ とすると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\;dx = 0.$$

$|f(x)|^2$ は連続関数であるから、$(\forall x \in [-\pi,\pi])$ $|f(x)|^2 = 0$ (もしそうでないとすると、$(\exists x_0 \in [-\pi,\pi])$ $|f(x_0)|^2 \neq 0$. $|f(x_0)|^2 > 0$ であるが、$|f|^2$ の連続性から、x_0 の十分近くでは $|f(x)|^2 \geq |f(x_0)|^2/2 > 0$. すると $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx > 0$ となり矛盾する)。ゆえに $f(x)=0$ $(x \in [-\pi,\pi])$. f は周期 2π の関数だから $f(x)=0$ $(x \in \mathbb{R})$. すなわち $f=0$. ■

解答 3.

$$\begin{aligned}(f,\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2) &= \overline{(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2, f)} = \overline{\lambda_1 (f_1,g) + \lambda_2 (f_2,g)} = \overline{\lambda_1}\;\overline{(g_1,f)} + \overline{\lambda_2}\;\overline{(g_2,f)} \\ &= \overline{\lambda_1}(f,g_1) + \overline{\lambda_2}(f,g_2).\blacksquare\end{aligned}$$

解答 4. 任意の複素数 z に対して、$z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned}(f+g,f+g) &= (f,f+g)+(g,f+g) = (f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g) = (f,f)+(f,g)+\overline{(f,g)}+(g,g) \\ &= (f,f)+2\operatorname{Re}(f,g)+(g,g).\blacksquare\end{aligned}$$

解答 5. 問の文中の解説から、$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$t^2(f,f)+2t(f,g)+(g,g) \geq 0.$$

一般に $(f,f) \geq 0$ であるが、$(f,f)>0$ か、$(f,f)=0$ かで場合分けする。

(a) $(f,f)>0$ の場合、2 次関数の符号が 0 以上ということから、判別式 ≤ 0. ゆえに $(2(f,g))^2 - 4(f,f)(g,g) \leq 0$. 整理すると $(f,g)^2 \leq (f,f)(g,g)$. ゆえに $(\sharp)$ の不等式が成り立つ。

(b) $(f,f)=0$ の場合、$(\forall t \in \mathbb{R})$ $2t(f,g)+(g,g) \geq 0$ より $(f,g)=0$ でなければならない ($(f,g) \neq 0$ ならば矛盾が導かれる)。ゆえに $(\sharp)$ の不等式の両辺とも 0 で、不等式は成立する。

等号の成立条件を考える。

f と g が 1 次従属のとき、等号が成り立つことは簡単に分かるので省略する。

f と g が 1 次独立のときは、上の議論をていねいにたどると、$(f,g)^2 < (f,f)(g,g)$ が導かれる。(実際、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $tf+g \neq 0$ であるので、$(tf+g,tf+g)>0$ であり、2 次関数の符号が正であるから、判別式は負である。) ゆえに $(\sharp)$ で等号が成り立つならば、f と g は 1 次独立ではない。 ■

(少し書き方を変えて) f と g が 1 次従属のとき、$(\exists t \in \mathbb{R})$ $f=tg$ または $(\exists s \in \mathbb{R})$ $g=sf$. 前者の場合、$(\sharp)$ の不等式の両辺はともに $t^2(g,g)^2$. 後者の場合、$(\sharp)$ の不等式の両辺はともに $s^2(f,f)^2$. ゆえに $(\sharp)$ の不等式で等号が成立する。

f と g が 1 次独立のとき (このとき $f \neq 0$ であることに注意)、$(\forall t \in \mathbb{C})$ $tf+g \neq 0$. 特に、$(f,g) = |(f,g)|\,e^{i\theta}$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ を取って、$t = se^{-i\theta}$ $(s \in \mathbb{R})$ とおくと、$t(f,g) = s\,|(f,g)|$ であるから、

$$\begin{aligned}(tf+g,tf+g) &= (tf,tf)+2\operatorname{Re}(tf,g)+(g,g) = |t|^2(f,f)+2\operatorname{Re}\left[t(f,g)\right]+(g,g) \\ &= s^2(f,f)+2s\,|(f,g)|+(g,g).\end{aligned}$$

ゆえに任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して、

$$s^2(f,f) + 2s\,|(f,g)| + (g,g) > 0.$$

判別式は負でなければならないので、$|(f,g)|^2 < (f,f)(g,g)$. ■

解答 6. $f, g \in X$ とする。任意の複素数 λ に対して、

$$0 \le (\lambda f + g, \lambda f + g) = |\lambda|^2 (f,f) + 2\,\mathrm{Re}\,(f,g) + (g,g) \tag{1}$$

が成り立つ。複素数 (f,g) の指数形式を $(f,g) = \rho e^{i\phi}$ ($\rho \ge 0$, $\phi \in \mathbb{R}$) とする。$\rho = |(f,g)|$ である。任意の実数 t に対して、$\lambda := te^{-i\phi}$ とおいて、(1) に代入すると、$\lambda(f,g) = te^{-i\phi} \cdot |(f,g)|\, e^{i\phi} = t\,|(f,g)|$ であるから

$$t^2\,(f,f) + 2t\,|(f,g)| + (g,g) \ge 0.$$

ここから後は、問 6 と同様である。■

解答 7. (準備中) 不等式自体は成り立つ。■

解答 8. 任意の $f \in X$ に対して、$(f,f) \ge 0$ であるから、$\sqrt{(f,f)}$ は意味を持ち、$\|f\|$ が定義できる。

(a) 任意の $f \in X$ に対して、$(f,f) \ge 0$ であるから、$\|f\| = \sqrt{(f,f)} \ge 0$. また $\|f\| = 0 \Leftrightarrow (f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(b) 任意の $f \in X$, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\|\lambda f\| = \sqrt{(\lambda f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\,(f,f)} = \sqrt{|\lambda|^2\,(f,f)} = |\lambda|\,\sqrt{(f,f)} = |\lambda|\,\|f\|\,.$$

(c) 任意の $f,\, g \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) = \|f\|^2 + (f,g) + \overline{(f,g)} + \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\|f\| + \|g\|)^2 - \|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\,\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 - \left(\|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + \|g\|^2\right) \\ &= 2\,(\|f\|\,\|g\| - \mathrm{Re}(f,g)) \\ &\ge 2\,(\|f\|\,\|g\| - |(f,g)|) \ge 0.\end{aligned}$$

最後のところで Schwarz の不等式 $|(f,g)|^2 \le (f,f)(g,g)$ を用いた。これから

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|\,. ■$$

解答 9. 条件 (ii) と問 3 で示したこと、それと $a \in \mathbb{C}$ に対して $a + \overline{a} = 2\,\mathrm{Re}\,a$ であることを用いる。

$$\begin{aligned}(f+g, f+g) &= (f, f+g) + (g, f+g) = (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) \\ &= (f,f) + (f,g) + \overline{(f,g)} + (g,g) = (f,f) + 2\,\mathrm{Re}(f,g) + (g,g). ■\end{aligned}$$

解答 10.

$$\begin{aligned}\|a_1 + \cdots + a_n\|^2 &= \left(\sum_{j=1}^n a_j, \sum_{k=1}^n a_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n (a_j, a_j) + \sum_{1 \le j < k \le n} (a_j, a_k) + \sum_{1 \le k < j \le n} (a_j, a_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2 + \sum_{1 \le j < k \le n} 0 + \sum_{1 \le k < j \le n} 0 = \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2\,. ■\end{aligned}$$

解答 11.

(1) $\{\varphi_n\} \in \mathbb{N}$ を正規直交系とする。$n \neq m$ のとき $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} = 0$. また $(\varphi_n, \varphi_n) = \delta_{nn} = 1 \neq 0$.

(2) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を直交系とする。$N \in \mathbb{N}$, $c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{K}$ が

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j = 0$$

を満たすとするとき、$1 \leq n \leq N$ を満たす n に対して、

$$0 = (0, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_n \right) = \sum_{j=1}^{N} c_j \left(\varphi_j, \varphi_n\right) = \sum_{j=1}^{N} c_j \delta_{jn} = c_n \delta_{nn} = c_n \cdot 1 = c_n.$$

すなわち $c_1 = \cdots = c_N = 0$. ゆえに $\{\varphi_n\}$ は 1 次独立である。■

解答 12. (少し雑だけど、とりあえず) $u_1, u_2, \cdots \in X$ は 1 次独立とするとき、正規直交系 $\{\varphi_n\}$ で、$\mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle = \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle$ が成り立つようなものを求める。

$n = 1, 2, \cdots$ の順に φ_n を定める。まず

(GS1)
$$\varphi_1 := \frac{1}{\|u_1\|} u_1$$

とおくと、$\{\varphi_1\}$ は正規直交系であり ($\because \|\varphi_1\| = 1$)、$\mathrm{Span}\langle u_1\rangle = \mathrm{Span}\langle \varphi_1\rangle$.

$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ まで求まった (正規直交系であり、$\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_k\rangle$ が成り立つ) とする。

(GS2)
$$\psi_{k+1} := u_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j) \varphi_j$$

とおく。$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ は正規直交系だから、

$$\begin{aligned}
(\psi_{k+1}, \varphi_j) &= \left(u_{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_\ell) \varphi_\ell, \varphi_j \right) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - \sum_{\ell=1}^{k} \left(u_{k+1}, \varphi_\ell\right) \left(\varphi_\ell, \varphi_j\right) \\
&= (u_{k+1}, \varphi_j) - (u_{k+1}, \varphi_j) \cdot 1 = 0 \quad (j = 1, \cdots, k).
\end{aligned}$$

また $\psi_{k+1} \neq 0$ である (もしも $\psi_{k+1} = 0$ とすると、$u_{k+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (u_{k+1}, \varphi_j) \varphi_j \in \mathrm{Span}\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ となり、$u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}$ が 1 次独立であることに反する)。

(GS3)
$$\varphi_{k+1} := \frac{1}{\|\psi_{k+1}\|} \psi_{k+1}$$

とおくと、$(\varphi_{k+1}, \varphi_j) = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$, $(\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1}) = 1$. ゆえに $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}$ は正規直交系である。また $\mathrm{Span}\langle \varphi_1, \cdots, \varphi_{k+1}\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \cdots, u_{k+1}\rangle$ が成り立つ。■

解答 13.

$$\begin{aligned}
(\psi_n, \psi_m) &= \left(\frac{1}{\|\varphi_n\|} \varphi_n, \frac{1}{\|\varphi_m\|} \varphi_m, \right) = \frac{1}{\|\varphi_n\| \, \|\varphi_m\|} \left(\varphi_n, \varphi_m\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\|\varphi_n\| \, \|\varphi_n\|} \left(\varphi_n, \varphi_n\right) = 1 & (n = m \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{\|\varphi_n\| \, \|\varphi_m\|} \cdot 0 = 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases} \\
&= \delta_{nm}. \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 14. (準備中。まあほとんどは授業でやったわけで、講義ノートにも書いてあるし。) ■

解答 15. $N\in\mathbb{N}$ とする。$h_N:=\displaystyle\sum_{k=1}^N (f,\varphi_k)\varphi_k$ とおくと、$1\le j\le N$ なる j に対して

$$(f-h_N,\varphi_j)=\left(f-\sum_{k=1}^N(f,\varphi_k)\varphi_k,\varphi_j\right)=(f,\varphi_j)-\sum_{k=1}^N(f,\varphi_k)\left(\varphi_k,\varphi_j\right)$$
$$=(f,\varphi_j)-\sum_{k=1}^N(f,\varphi_k)\delta_{kj}=(f,\varphi_j)-(f,\varphi_j)=0.$$

ゆえに [6]

$$(f-h_N,h_N)=\left(f-h_N,\sum_{j=1}^N(f,\varphi_j)\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^N\overline{(f,\varphi_j)}(f-h_N,\varphi_j)=0.$$

ゆえに

$$\|f\|^2=\|f-h_N+h_N\|^2=\|f-h_N\|^2+2\operatorname{Re}(f-h_N,h_N)+\|h_N\|^2=\|f-h_N\|^2+\|h_N\|^2$$
$$\ge\|h_N\|^2.$$

φ_j $(j=1,\cdots,N)$ は互いに直交しているので (ピタゴラスの定理から)

$$\sum_{k=1}^N|(f,\varphi_k)|^2=\left\|\sum_{k=1}^N(f,\varphi_j)\varphi_j\right\|^2=\|h_N\|^2\le\|f\|^2.$$

これが任意の $N\in\mathbb{N}$ について成り立つことから

$$\sum_{k=1}^\infty|(f,\varphi_k)|^2\le\|f\|^2. ■$$

(テキストによっては、$\|f\|^2$ から始めて、一気に $\|f-h_N\|^N+\|h_N\|^2$ に等しいことを導いているものもある。)

解答 16. まず (念のため) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ は正規直交系であることを確かめよう。$\{\cos nx\}_{n\ge0}\cup\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ が直交系であることは分かっているので、長さが 1 であることを確かめれば良い。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot2\pi=1,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos2nx}{2}\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos2nx}{2}\,;dx=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1.$$

a_0', a_n', b_n' をこの正規直交系に関する係数とする。すなわち

$$a_0'=\left(f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f,1),$$
$$a_n'=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\cos nx),$$
$$b_n'=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f,\sin nx).$$

---

[6] 最初から一気に証明出来なくもない。$(f-h_N,h_N)=\left(f-\displaystyle\sum_{k=1}^N(f,\varphi_k)\varphi_k,\sum_{j=1}^N(f,\varphi_j)\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^N\overline{(f,\varphi_j)}\,(f,\varphi_j)-\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N(f,\varphi_k)\overline{(f,\varphi_j)}\,(\varphi_k,\varphi_j)=\sum_{j=1}^N|(f,\varphi_j)|^2-\sum_{k=1}^N|(f,\varphi_k)|^2=0.$

Bessel の不等式は

$$(\star) \qquad \left|a_0'\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n'\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n'\right|^2 \le \|f\|^2 .$$

ところで

$$a_0=\frac{1}{\pi}(f,1), \quad a_n=\frac{1}{\pi}(f,\cos nx), \quad b_n=\frac{1}{\pi}(f,\sin nx) \quad (n\in\mathbb{N})$$

であるから、

$$a_0'=\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0, \quad a_n'=\sqrt{\pi}a_n, \quad b_n'=\sqrt{\pi}b_n \quad (n\in\mathbb{N}).$$

$(\star)$ に代入すると

$$\frac{\pi}{2}\left|a_0\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left|a_n\right|^2++\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left|b_n\right|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx.$$

両辺を π で割って

$$\frac{1}{2}\left|a_0\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|^2+\left|b_n\right|^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx.\blacksquare$$

解答 17.

(1) (これは収束の話なので、本当は No. 3 に入れるべきかも。) f は連続で区分的に C^1 級なので、f の Fourier 級数は一様収束して、和は f に等しい。特に任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して、

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

$x=0$ を代入して

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}S_{奇}.$$

ゆえに

$$S_{奇}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{8}.$$

(余談になるが、$S=\frac{4}{3}S_{奇}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$.)

(2) $a_0=\pi$, $a_n=\dfrac{4}{n^2\pi}$ (n が奇数), $a_n=0$ (n が正の偶数), $b_n=0$ ($n\in\mathbb{N}$) であるので、

$$\frac{\left|a_0\right|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|^2+\left|b_n\right|^2\right)=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right).$$

一方

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

Parseval の不等式に代入して

$$\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}Q_{奇}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

ゆえに

$$Q_{奇}=\frac{\pi^2}{16}\left(\frac{2\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^4}{96}.\blacksquare$$

余談 (余談になるが、$Q_{偶}=\dfrac{1}{2^4}Q=\dfrac{Q}{16}$ であるから、$Q_{奇}=Q-Q_{偶}=\dfrac{15}{16}Q$ であるので、$Q=\dfrac{16}{15}Q_{奇}=\dfrac{16}{15}\cdot\dfrac{\pi^4}{96}=\dfrac{\pi^4}{90}$. 一つの Fourier 級数展開から S と Q が求まるのはちょっと面白い。)
(参考: Mathematica で `Sum[1/n^4,{n,1,Infinity,2}]` とすると、$\pi^4/96$ と答えてくれる。)