画像処理とフーリエ変換 練習問題 No.1

桂田 祐史
katurada AT meiji.ac.jp
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/

2015 年 10 月 7 日

この文書では、i は虚数単位を表すとする。これまであまり Fourier 級数の計算をしたことがない人は、早目に問 4, 5, 6 を解いてみること。

問 1. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とするとき、関数 $\cos \alpha x$, $\sin \alpha x$, $e^{i\alpha x}$ の周期を求めよ。

問 2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 T の連続関数とするとき ($T > 0$ とする)、$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して次式が成り立つことを確かめよ。

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx.$$

問 3. 三角関数の加法定理を既知として、以下の等式を示せ。

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right),\\
\sin a \sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right),\\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, & \sin A - \sin B &= 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2},\\
\cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, & \cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.
\end{aligned}$$

問 4. 次の定積分の値を求めよ (注意: 場合分けが必要である)。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx \quad (k = 0, 1, \dots), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx \quad (k = 1, 2, \dots), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

問 5. 周期 2π の複素数値関数 f, g に対して、内積 (f, g) を $(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ で定めるとき (ただし $\overline{g(x)}$ は $g(x)$ の共役複素数を表す)、以下の関数系が直交系であることを示せ。

(1) $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (2) $\{\cos kx\}_{k\geq 0} \cup \{\sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$

問 6. 以下の関数 f を区間 $[-\pi, \pi]$ で Fourier 級数展開せよ (必要ならば $[-\pi, \pi]$ の外で適当に拡張して、周期 2π の関数と考えて Fourier 級数展開せよ)。

(1) $f(x) = x$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$.

(2) $f(x) = x^2$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$. (一般に x^k はどうか？)

(3) $f(x) = |x|$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$.

(4) $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$

(5) $f(x) = \cos^2 x$.

(6) $f(x) = \sin^3 x$.

問 7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 T $(T>0)$ の周期関数とするとき、a_n, b_n をどのように定めると

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)$$

が期待できるか？

問 8. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数で滑らかとする。

(1) f が偶関数ならば次式が成り立つことを示せ。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

(2) f が奇関数ならば次式が成り立つことを示せ。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

問 9. 関数の偶関数拡張、奇関数拡張を考えることにより、以下の問に答えよ。ただし L は正の数とする。

(1) $f\colon [0, L] \to \mathbb{C}$ が滑らかな関数とするとき、$f(x)$ を $\cos \dfrac{n\pi x}{L}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ を用いて表せ。

(2) $f\colon [0, L] \to \mathbb{C}$ が滑らかな関数とするとき、$f(x)$ を $\sin \dfrac{n\pi x}{L}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を用いて表せ。その式が任意の $x \in [0, L]$ について成り立つためには、f に追加の条件が必要になる。それを求めよ。(変な尋ね方の問題だけど…)

問 10. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を周期 2π の連続関数として、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots), \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots), \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

とおくとき、

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(a_n - ib_n) & (n > 0) \\ \dfrac{1}{2} a_0 & (n = 0) \\ \dfrac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & (n < 0) \end{cases}$$

であることを確かめよ。

解答 1. $\alpha \neq 0$ とする。($\alpha = 0$ のときは定数関数なので、周期関数と考えない方が良い。) こういう場合は、正の最小の周期を答えるものなので、$\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ が周期である。

$f(x) = \cos\alpha x, \sin\alpha x, e^{i\alpha x}$ のいずれも $f\left(x + \dfrac{2\pi}{\alpha}\right) = f(x)$ を満たす。$\dfrac{2\pi}{\alpha}$ が周期と言っても良いが、普通は絶対値を取った $\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$ を答える。■

解答 3. cos の加法定理

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

から

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

これから

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cos b, \\
\cos(a-b) - \cos(a+b) &= -2\sin a \sin b.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right), \\
\sin a \sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right).
\end{aligned}$$

同様に sin の加法定理

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

から

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

これから

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a \cos b, \\
\sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2\cos a \sin b.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right), \\
\cos a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right).
\end{aligned}$$

任意の実数 A, B が与えられたとき、

$$a + b = A, \quad a - b = B$$

を満たす a, b は一意的に存在して、$a = \dfrac{A+B}{2}$, $b = \dfrac{A-B}{2}$. ゆえに

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \\
\sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}, \\
\cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \\
\cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.
\end{aligned}$$ ■

解答 4. $k=0$ のとき ($\cos 0=1$, $\sin 0=0$, $e^0=1$ であるから)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos 0x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos 0\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 0x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 0\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}0\,dx=0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{kx}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{0x}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{0}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi.$$

$k\neq 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

($\sin k\pi=0$, $\sin(-k\pi)=0$ であるからと言っても良いし、$\sin kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 2π の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=-\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

($\cos k\pi=(-1)^k$, $\cos(-k\pi)=(-1)^{-k}=(-1)^k$ であるからと言っても良いし、$\cos kx$ は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 2π の周期関数であるからと言っても良い。)

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{kx}\,dx=\left[\frac{e^{ikx}}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

($e^{ik\pi}=(-1)^k$, $e^{-ik\pi}=(-1)^{-k}$ であるからと言っても良いし、e^{ikx} は (基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ であるから) 周期 2π の周期関数であるからと言っても良い。) ■

復習　k を整数とするとき、$\sin k\pi=0$, $\cos k\pi=(-1)^k$, $e^{ik\pi}=(-1)^k$.

解答 6. 「$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数で、区分的に C^1 級であれば、

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

とおくとき、f の任意の連続点 x で

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

が成り立つ。」という定理が基本である。

(1) 積分を計算すると $a_k=0$, $b_k=\dfrac{2(-1)^{k-1}}{k}$ となるので、

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\sin kx=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right)\quad(x\in(-\pi,\pi)).$$

$\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を、$(-\pi,\pi)$ で f と一致し、$\widetilde{f}(\pi)=0$, 後は周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に C^1 級で、$\widetilde{f}$ は $(2m-1)\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。

(2) $a_0=\dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_k=\dfrac{4(-1)^k}{k^2}$, $b_k=0$ $(k\in\mathbb{N})$ となるので、

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos kx=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right)\quad(x\in[-\pi,\pi]).$$

$\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を、$[-\pi,\pi]$ で f と一致し、周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に C^1 級であるから、いたるところ収束する。

(3) $a_0=\pi$, $a_k=\dfrac{2\left(-1+(-1)^k\right)}{k^2\pi}$, $b_k=0$ $(k\in\mathbb{N})$ となるので、

$$\begin{aligned}|x|&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\left(-1+(-1)^k\right)}{k^2\pi}\cos kx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)\quad(x\in[-\pi,\pi]).\end{aligned}$$

$\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を、$[-\pi,\pi]$ で f と一致し、周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}$ は連続で区分的に C^1 級であるから、いたるところ収束する。

(4) $a_k=0$, $b_k=-\dfrac{2\left(1+(-1)^{k-1}\right)}{k\pi}$ となるので、

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}x&=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\left(1+(-1)^{k-1}\right)}{k\pi}\sin kx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x\\&=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)\quad(x\in(-\pi,\pi)).\end{aligned}$$

$\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を、$(-\pi,\pi)$ で f と一致し、$\widetilde{f}(\pi)=0$, 後は周期 2π である関数とする。$\widetilde{f}(\pi)$ の値をどのように定めても、区分的に C^1 級で、$\widetilde{f}$ は $m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ で不連続、それ以外の点では連続になる。$\widetilde{f}(0+0)=1$, $\widetilde{f}(0-0)=-1$ であるから、$\dfrac{\widetilde{f}(0+0)+\widetilde{f}(0-0)}{2}=0=\widetilde{f}(0)$ であるから、0 でも収束して $\widetilde{f}(0)$ に等しい。

(5) $a_0=1$, $a_2=\dfrac{1}{2}$, $a_k=0$ $(k\in\mathbb{N},\ k\neq 2)$, $b_k=0$ $(k\in\mathbb{N})$ であるから

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\quad(x\in[-\pi,\pi]).$$

これは倍角の公式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ から導かれる $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ からも得られる。

(6) $a_k=0$, $b_1=\dfrac{3}{4}$, $b_3=-\dfrac{1}{4}$, $b_k=0$ $(k\in\mathbb{N},\ k\neq 1,3)$ であるから、

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\quad(x\in(-\pi,\pi)).$$

これは 3 倍角の公式 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ から導かれる $\sin^3 x=\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{4}$ からも得られる。■

解答 7. (**解法 1**) 直交系 $\{\varphi_n\}$ で $f=\sum_n c_n\varphi_n$ と展開するとき $c_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$ という結果を用いて解答する。

$\varphi_n(x)=\cos\frac{2n\pi x}{T}$ $(n=0,1,\cdots)$, $\psi_n(x)=\sin\frac{2n\pi x}{T}$ $(n=0,1,\cdots)$ $(n\in\mathbb{N})$ とおくとき $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}\cup\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は直交系である。$n\neq 0$ のとき

$$(\varphi_n,\varphi_n)=\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2\frac{2n\pi x}{T}dx=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1+\cos(4n\pi x/T)}{2}dx=\frac{T}{2},$$

$$(\psi_n,\psi_n)=\int_{-T/2}^{T/2}\sin^2\frac{2n\pi x}{T}dx=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1-\cos(4n\pi x/T)}{2}dx=\frac{T}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\\b_n&=\frac{(f,\psi_n)}{(\psi_n,\psi_n)}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx.\end{aligned}$$

一方

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_{-T/2}^{T/2} 1 dx = T$$

であるから

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx.$$

すなわち

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx.$$

まとめると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T} dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T} dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{aligned}$$

(**解法 2**) f が周期 T であることから、

$$F(\xi) := f\left(\frac{T}{2\pi}\xi\right) \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

とおくと、F は周期 2π である。ゆえに

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\cos n\xi\, d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\sin n\xi\, d\xi$$

とおくと

$$F(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi\right).$$

ゆえに

$$f(x) = F\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right).$$

$\xi = \frac{2\pi}{T}x$ であるから、$\xi = -\pi, \pi$ のとき、$x = -T/2, T/2$ であるから

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\, dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\cdot\frac{2\pi}{T}\, dx = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\, dx. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 8.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

とおくと

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n \sin nx\right).$$

(1) f が偶関数であれば、$f(x)\cos nx$ は偶関数、$f(x)\sin nx$ は奇関数であるので、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \\ a_n &= 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

(2) f が奇関数であれば、$f(x)\cos nx$ は奇関数、$f(x)\sin nx$ は偶関数であるので、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n = 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\cdots).\blacksquare$$

解答 9. (1) まず $\widetilde{f}\colon [-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L]) \\ f(-x) & (x\in[-L,0)) \end{cases}$$

で定めると、これは連続かつ区分的に滑らかな偶関数であり、$\widetilde{f}(L)=\widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに $\cos\dfrac{2n\pi x}{2L}=\cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L}=\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問題 7 で $T=2L$ の場合)。

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),$$
$$a_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$
$$b_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f}=\widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は偶関数であり、$[0,L]$ で f に等しいので

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad b_n=0.$$

以上から

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L} \quad (x\in[0,L]), \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

(2) まず $\widetilde{f}\colon [-L,L]\to\mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in[0,L]) \\ -f(-x) & (x\in[-L,0)) \end{cases}$$

で定める。連続であるためには、$f(0)=0$ であることが必要十分である。以下 $f(0)=0$ と仮定する。すると $\widetilde{f}$ は区分的に滑らかな奇関数であり、$\widetilde{f}(L)=-\widetilde{f}(-L)$ を満たす (ともに $f(L)$ に等しい)。$\widetilde{f}(L)=\widetilde{f}(-L)$ が成り立つためには、$f(L)=0$ であることが必要十分である。以下 $f(L)=0$ と仮定する。$\widetilde{f}$ を周期 $2L$ の周期関数 $\hat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ として拡張すると、連続かつ区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数である。ゆえに $\cos\dfrac{2n\pi x}{2L}=\cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{2n\pi x}{2L}=\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ を用いて Fourier 級数展開できる (問 7 で $T=2L$ の場合)。

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),$$
$$a_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$
$$b_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

ここで $[-L,L]$ で $\hat{f}=\widetilde{f}$ であることを用いた。$\widetilde{f}$ は奇関数であり、$[0,L]$ で f に等しいので

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \widetilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

以上から

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad (x\in[0,L]), \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

$f(0)=f(L)=0$ を仮定した (この必要性は、$x=0,L$ で展開が成り立つことからも分かる)。■

解答 10. $n>0$ のとき、$n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx}=\cos(-nx)+i\sin(-nx)=\cos nx-i\sin nx$ であるから、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos nx - i\sin nx\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right). \end{aligned}$$

$n=0$ のとき、$e^{-inx}=e^0=1=\cos nx$ であるから、

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x\,dx=\frac{1}{2}a_0.$$

$n<0$ のとき、$-n\in\mathbb{N}$, $e^{-inx}=\cos(-nx)+i\sin(-nx)$ であるから

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)\,dx + i\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right).\blacksquare \end{aligned}$$