# 2015 年度 画像処理とフーリエ変換 期末試験問題

2016 年 1 月 27 日 (水曜) 4 限 (14:30〜15:30) 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下、$i$ は虚数単位, $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合, $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合を表す。

**問 1.**　関数 $\varphi_n$ $(n=1,2,\cdots)$ を $\varphi_n(x)=\sin\left[(n-1/2)\,\pi x\right]$ $(n=1,2,\cdots)$ で定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) 関数系 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、区間 $[0,1]$ で直交系であることを示せ。

(2) 関数 $f\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ が、数列 $\{c_n\}$ に対して $f=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n$ を満たすとき、$c_n$ を $f$ で表わせ。

**問 2.**　正数 $a$ に対して、関数 $f$ を $f(x)=e^{-a|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$ で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) $f$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}f(\xi):=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx$ $(\xi\in\mathbb{R})$ を求めよ。
(2) $g:=\mathcal{F}f$ とおくとき、$g$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}g$ を求めよ。

**問 3.**　周期 $2\pi$ の周期関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して、$\mathcal{F}f(n):=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx$ $(n\in\mathbb{Z})$ とおく。また、周期 $2\pi$ の周期関数 $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の畳み込み $f*g$ を $f*g(x)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)\,dy$ $(x\in\mathbb{R})$ で定める。このとき、$\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}f\mathcal{F}g$ が成り立つことを示せ。

**問 4.**　次の (**4A**), (**4B**) のいずれか一方を選択して解答せよ。

(**4A**) Fourier 変換 (定義は問 **2** 中に記したもの) に関する公式 $\dfrac{d}{d\xi}\mathcal{F}f(\xi)=-i\,\mathcal{F}[xf(x)](\xi)$ を示せ。ただし $f$ は遠方で十分速く減衰する滑らかな関数とする。

(**4B**) 離散時間 Fourier 変換 $\mathcal{F}f(\omega)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}$ $(\omega\in\mathbb{R})$ の反転公式 ($f(n)$ を $\mathcal{F}f(\omega)$ で表す式) を求めよ。公式を書くだけでなく、それが正しいことを示せ。(ただし級数は良い収束をすることを仮定する。具体的には $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|<\infty$.)

**問 5.**　$S$ を複素数列 (ただし添字は整数全体の範囲を動く) の全体とする (講義の記号で $S=\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$)。

(1) デジタル・フィルター $F\colon S\to S$ が線形定常とはどういうことか。定義の条件を記せ。

(2) 単位インパルス $\delta$ とは何か説明せよ。

(3) $F\colon S\to S$ が $F[x]=10x$ $(x\in S)$ を満たすとする。(a) $F$ の単位インパルス応答 $h$ を求めよ。(b) $F[x]=h*x$ $(x\in S)$ であることを示せ。

問 3 で、畳込みの定義を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)\,dy$ としましたが、授業で採用したように $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)\,dy$ とすべきでした。混乱させてごめんなさい。

指数関数の微分が出来なかったり、部分積分を間違えたり、そういう人にはつらいよね。

**問 1.** $[0,1]$ で定義された複素数値関数 $f$, $g$ の内積を $(f,g) := \displaystyle\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ で定める。

(1) $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ のとき、$m-n \neq 0$, $m+n-1 \neq 0$ ($\because m+n-1 \geq 1+1-1=1$) であるから

$$\begin{aligned}
(\varphi_m,\varphi_n) &= \int_0^1 \varphi_m(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx = \int_0^1 \sin\left[(m-1/2)\pi x\right]\overline{\sin\left[(n-1/2)\pi x\right]}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\cos\left[(m-1/2)\pi x-(n-1/2)\pi x\right]-\cos\left[(m-1/2)\pi x+(n-1/2)\pi x\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\cos\left[(m-n)\pi x\right]-\cos\left[(m+n-1)\pi x\right]\right\}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left[(m-n)\pi x\right]}{(m-n)\pi}-\frac{\sin\left[(m+n-1)\pi x\right]}{(m+n-1)\pi}\right]_0^1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(2) $m,n \in \mathbb{N}$, $m=n$ のとき、$2m-1 \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned}
(\varphi_m,\varphi_n) = (\varphi_m,\varphi_m) &= \int_0^1 \sin^2\left[(m-1/2)\pi x\right]dx = \int_0^1 \frac{(1-\cos\left[2(m-1/2)\pi x\right])}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos\left[(2m-1)\pi x\right])\,dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin\left[(2m-1)\pi x\right]}{(2m-1)\pi}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(f,\varphi_n) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m\varphi_m, \varphi_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\left(\varphi_m,\varphi_n\right) = c_n\left(\varphi_n,\varphi_n\right).$$

ゆえに

$$c_n = \frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)} = 2\left(f,\varphi_n\right) = 2\int_0^1 f(x)\sin\left[(n-1/2)\pi x\right]dx.\blacksquare$$

**コメント** $c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$ という式を覚えていて使った人がいる。もちろん覚えているのは良いことで、それは評価するけれど (点をあげた)、証明も一緒に身につけてほしい。1 行で済むし、それを理解すると「なぜ直交系というのが大事か」が納得できるはずだから。Fourier 級数は色々な変種が出て来るけれど、すべてこの原理で「係数が決まる」と言って差し支えない。

本当はその先、直交系というのが良く出て来る理由というのがあって、そこまでやりたいところだけど、それはこの講義の範囲外である (そのうちカリキュラムを整理してそこまで話したいような気がする)。

**問 2.**

(1)

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\xi x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-a|x|}e^{-i\xi x}\,dx$$

$x \geq 0$ のとき、$e^{-a|x|}e^{-i\xi x} = e^{-ax}e^{-i\xi x} = e^{-(a+i\xi)x}$ であるから、

$$\int_0^R e^{-a|x|}e^{-i\xi x}\,dx = \int_0^R e^{-(a+i\xi)x}\,dx = \left[\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\right]_0^R = \frac{1-e^{-(a+i\xi)R}}{a+i\xi}.$$

一方、$x < 0$ のとき、$e^{-a|x|}e^{-i\xi x} = e^{ax}e^{-i\xi x} = e^{(a-i\xi)x}$ であるから、

$$\int_{-R}^0 e^{-a|x|}e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-R}^0 e^{(a-i\xi)x}\,dx = \left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\right]_{-R}^0 = \frac{1-e^{-(a-i\xi)R}}{a-i\xi}.$$

$R \to \infty$ のとき、$\left|e^{-(a+i\xi)R}\right| = e^{-aR} \to 0$, $\left|e^{-(a-i\xi)R}\right| = e^{-aR} \to 0$ であるから、

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\xi^2}.$$

(2) $g = \mathscr{F}f$ であるとき、Fourier の反転公式により、$\mathscr{F}^*g = f$ が成り立つ。また任意の関数 $h$, $x \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathscr{F}h(x) = \mathscr{F}^*h(-x)$ が成り立つ (Fourier 変換は、Fourier 逆変換を折り返したもの)。ゆえに、任意の $x$ に対して

$$\mathscr{F}g(x) = \mathscr{F}^*g(-x) = f(-x) = e^{-a|-x|} = e^{-a|x|}.\blacksquare$$

## コメント

- 5 つの具体的な関数 (ガウシアンを除いて、1 つ覚えると、反転公式で自動的にもう 1 つ覚えられるので、数えようによっては 3 つ) の Fourier 変換を計算できるようにしておこう、と授業で言ってある (念の為に注意しておくと、それ以外の関数の Fourier 変換は必要ないということではなく、簡単には計算出来ないことが多いので、公式集か (Mathematica のような) 数式処理系を利用することになる、ということである)。授業で「試験でこういうことを尋ねる」と言っておいても、半数近くの人が対策しないのは、昔だったら考えられないけれど、まあそれはそれで試験問題になっているのだろう。

  それと、なぜか、
  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx$$
  とした人が複数いたけれど、どういうつもりなのかな。$e^{-ix\xi}$ は偶関数と勘違いしたのか？間違いである。虚部は奇関数、実部は偶関数なので
  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx = 2\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{-a|x|}e^{-ix\xi}dx$$
  は正しいけれど (実数値の偶関数である $e^{-a|x|}$ をかけても、虚部は奇関数、実部は偶関数というのは変わらないので、積分すると虚部は 0 になり、実部の積分に等しくなる。するとそれは偶関数なので $[0,\infty)$ での積分の 2 倍になる。ややこしいので、こういう計算をするのは勧めない。)。

- (2) は反転公式の利用で、(1) が解答出来なくても答えられる。昨年の問題の変種である。

## 問 3.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f*g](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f*g(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx\right)g(y)\,dy.\end{aligned}$$

右辺の ( ) 内を置換積分する。変数 $x$ を $z=x-y$ により変数 $z$ に置換する。$dz=dx$, $x=-\pi$ のとき $z=-\pi-y$, $x=\pi$ のとき $z=\pi-y$ であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(z)e^{-in(z+y)}dz = e^{-iny}\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(z)e^{-inz}dz.$$

被積分関数は周期 $2\pi$ であるから

$$\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(z)e^{-inz}dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-inz}dz.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f*g](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-iny}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-inz}\,dz\right)g(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}\,dy\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-inz}\,dz\\ &= 2\pi\mathscr{F}g(n)\mathscr{F}g(n).\blacksquare\end{aligned}$$

**コメント**　この問題は「講義そのまんま」なのだけど、間違える人が多い。

(1) $z=x-y$ と変数変換するので、$x=-\pi,\pi$ にそれぞれ $z=-\pi-y,\pi-y$ が対応して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(z)e^{-in(z+y)}dz$$

となり、ここから被積分関数 $(z\mapsto f(z)e^{-in(z+y)})$ が周期 $2\pi$ であることを言って、積分区間を $[-\pi-y,\pi-y]$ から $[-\pi,\pi]$ に置き換えて、$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-in(z+y)}dz$ に等しい、とするのが授業で説明した道だけど、説明抜きで

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-in(z+y)}dz$$

としてしまう人がいる。ちょっと乱暴。イエローカード (減点)。

(2) 要点は「積分順序を交換してから、内側の積分を変数変換する」なのだけど、積分順序を交換せずに $x-y=z$ として $x$ を $z$ に変数変換する人がいる。$x=-\pi,\pi$ に対して $z=-\pi-y,\pi-y$ が対応するので

$$f*g(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx}dy\right)dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(y)e^{-in(z+y)}dy\right)dz$$

と書くと「$y$ が積分の外にはみ出ている」と、おかしいことに自分で気づくはずだと思うけれど、これをやった人は

$$f*g(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx}\,dy\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(y)e^{-in(z+y)}\,dy\right)dz$$

としてしまっている。うーん、簡単に解けたとか思っているのかな？これは (1) 以上におかしい。レッドカード (この問題については 0 点)。 $\blacksquare$

**4A.**

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

であるから、微分と積分の順序交換[1] をして

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\mathscr{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f(x)e^{-ix\xi}\right)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-ix\xi}\,dx\\ &= -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ix\xi}\,dx = -i\mathscr{F}[xf(x)](\xi).\blacksquare\end{aligned}$$

[1] $\displaystyle\frac{d}{d\xi}\int \quad dx = \int\frac{\partial}{\partial\xi}\quad dx.$

**コメント**　広義積分なので、微分と積分の順序交換が出来ることを証明するのは、実は結構難しくて積分論の良い演習問題なのだけど、そこを無視すれば (この講義ではそうして良いことにしてあって、授業でも上のように説明した) 簡単である。

**4B.**　最初に、$\varphi_n(\omega) := e^{-in\omega}$ $(n \in \mathbb{Z}, \omega \in \mathbb{R})$ とおくと、$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $[-\pi, \pi]$ で直交系をなすことを確かめる。

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x)\overline{\varphi_n(x)}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx.$$

$m \neq n$ とするとき

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \left[\frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{m-n} - (-1)^{n-m}}{i(m-n)} = 0.$$

一方、$m = n$ であるとき

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^0\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

離散時間 Fourier 変換の定義式は

$$\mathscr{F}f(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\varphi_m(\omega)$$

と書ける。$\varphi_n$ との内積を作ると、

$$(\mathscr{F}f, \varphi_n) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\varphi_m, \varphi_n\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\left(\varphi_m, \varphi_n\right) = f(n)\left(\varphi_n, \varphi_n\right) = 2\pi f(n).$$

ゆえに

$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\left(\mathscr{F}f, \varphi_n\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathscr{F}f(\omega)\overline{e^{-in\omega}}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathscr{F}f(\omega)e^{in\omega}\,d\omega. \blacksquare$$

**コメント**　これは問 1(2) と同じような問題でもあるし、昨年の期末試験で出題した問題そのものでもある。これを選択した人 (あまり多くなかった) は解けていました。

**5.**

(1) $F$ が線形定常とは、$F$ が線形であり、かつ定常ということである。$F$ が線形とは、

$$F[x+y] = F[x] + F[y] \quad (x, y \in S),$$

$$F[cx] = cF[x] \quad (c \in \mathbb{C},\ x \in S)$$

を満たすことをいう。$F$ が定常とは、任意の信号 $x \in S$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$F[x(\cdot - k)] = F[x](\cdot - k)$$

が成り立つことをいう。

(2) $\delta(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \end{cases}$ により定まる $\delta \in S$ のことを単位インパルスと呼ぶ。畳み込みの単位元である。すなわち $S$ の任意の元 $x$ に対して、$x * \delta = \delta * x = x$ が成り立つ。

(3) (a) 一般に、フィルター $G$ の単位インパルス応答とは、$G[\delta]$ のことをいう。ゆえに $h = F[\delta] = 10\delta$. すなわち、$h(n) = \begin{cases} 10 & (n = 0) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \end{cases}$ で定められる $h$ が $F$ の単位インパルス応答である。

(b) 任意の $x \in S$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して、($h(0) = 10$, $h(k) = 0$ $(k \neq 0)$ に注意すると)

$$h * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = x(n-0) \cdot 10 = 10x(n).$$

ゆえに $h * x = 10x$. ■