Fourier 級数の部分和のグラフを描く

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/

桂田 祐史

2015 年 10 月 28 日

周期 2π の関数 f, g を

$$f(x) := |x| \quad (x \in [-\pi, \pi)), \quad g(x) := \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & (x \in (-\pi, 0)) \\ 0 & (x = 0, -\pi) \\ -1 & (x \in (0, \pi)) \end{cases}$$

で定めるとき、f と g の Fourier 級数の部分和のグラフを描いてみよう。

複数の関数を扱うので、F の Fourier 級数を $S[F](x)$ と書くことにしよう。つまり、$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を周期 2π の関数とするとき、

$$S[F](x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx\, dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx\, dx.$$

今日のテーマは Fourier 級数を求めることではないので、途中経過は付録に回して、答を書くと

$$S[f](x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right), \tag{1}$$

$$S[g](x) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right). \tag{2}$$

Mathematica で、Fourier 級数の n 項までの部分和を計算する関数 `sf[n,x]`, `sg[n,x]` を作ってみよう。

$S[f]$, $S[g]$ の部分和を計算する関数を定義

```
sf[n_, x_] := Pi/2 - 4/Pi Sum[Cos[k x]/k^2, {k, 1, n, 2}]
sg[n_, x_] := 4/Pi Sum[Sin[k x]/k, {k, 1, n, 2}]
```

`{k, 1, n, 2}` の最後の 2 は、k を 2 ずつ増やすことを意味する。

グラフを描くには `Plot[]` を用いれば良い。周期 2π なので、例えば $[-\pi, \pi]$ の範囲で描けば十分であるが、3 周期分描くことにする。

$S[f]$, $S[g]$ の部分和のグラフを描く

```
g1=Plot[sf[10,x],{x,-3Pi,3Pi}]
g2=Plot[sg[10,x],{x,-3Pi,3Pi}]
```

図を保存するには、例えば `Export["~/Desktop/f10.png", g1]` のようにする (`~/Desktop/` はデスクトップへの保存, 書類に保存するには `~/Documents/`)。

細かく点を取りたいときは `PlotPoints->点の個数` を指定する。n を増やしてどう変わるか見たければ `Manipulate[]` を使う。

$S[g]$ の部分和のグラフ — 項数を増やすとどう変わる?

```
Manipulate[Plot[sg[n, x], {x, -Pi, Pi}, PlotPoints -> 200], {n, 1, 100, 1}]
```

A　f の Fourier 係数

f の Fourier 級数展開を求めてみよう。$|x|$ は偶関数であるから、$b_n = 0$ はすぐ分かる (実際、$|x|\sin nx$ は奇関数であるから $[-\pi,\pi]$ で積分すると 0)。

$|x|\cos nx$ は偶関数で、$x>0$ では $x\cos nx$ に等しいので、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx.$$

部分積分をすると良さそうだが、n の値で場合分けが必要である。

$n=0$ のときは、

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi.$$

$n\neq 0$ のときは

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x)'\frac{\sin nx}{n}dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left(0-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-\cos 0) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right) = \begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & (n\ \text{は奇数})\\ 0 & (n\ \text{は偶数}).\end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに f の Fourier 級数は

$$S[f](x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n\ge 1\\ n\ \text{は偶数}}}\frac{4}{n^2\pi}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

f のグラフを描く

```
f[x_]:=Abs[x]
fp[x_]:=Abs[Mod[x,2Pi,-Pi]]
Plot[fp[x],{x,-3Pi,3Pi}]
```

f のグラフを描くときのことを考えて、`fp[]` では、`Mod[]` を用いて周期 2π であるようにしたが、単に積分を計算するためだけならば、`f[x_]:=Abs[x]` で十分で、その方が計算速度が速い。

a_n が求まる？

```
1/Pi Integrate[f[x]Cos[n x],{x,-Pi,Pi}]
```

$\cos n\pi$, $\sin n\pi$ というのが出て来る。n が整数と仮定していないので、簡単にならない。n が $\mathbb{Z}$ (the set of all integers) の要素 (element) であることを `Element[n,Integers]` と教えてみよう。

```
a[n_]:=Simplify[1/Pi Integrate[f[x]Cos[n x],{x,-Pi,Pi}],Element[n,Integers]]
a[n]
Table[a[n],{n,0,10}]
```

これで、$\dfrac{2\left(-1+(-1)^n\right)}{n^2\pi}$ が得られる。

B　g の Fourier 係数

```
g[x_]:=Sign[x]
b[n_]:=Simplify[1/Pi Integrate[g[x]Sin[n x],{x,-Pi,Pi}],Element[n,Integers]]
Table[b[n],{n,1,10}]
```

g の Fourier 級数展開を求めてみよう。sign x は奇関数であるから、$a_n = 0$ はすぐ分かる (実際、sign $x \cos nx$ は奇関数であるから $[-\pi, \pi]$ で積分すると 0)。

sign $x \sin nx$ は偶関数で、$x > 0$ では $\sin nx$ に等しいので、

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{4}{n\pi} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$S[g](x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

C　補足

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が C^1 級, 周期 2π の関数のとき、

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\, dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\, dx$$

とおくと (要するに f' の Fourier 係数)、部分積分などを行って

$$A_0 = 0, \quad a_n = -\frac{1}{n}B_n, \quad b_n = \frac{1}{n}A_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

が得られる。ただし a_n, b_n は f の Fourier 係数とする。

ゆえに

$$S[f'](x) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx).$$

これを

$$S[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と見比べると、項別微分が成り立っていることが分かる。