複素関数・同演習 宿題 No. 8 (2026 年 11 月 18 日出題, 11 月 24 日 (火) 13:30 〆切。Oh-o! Meiji で提出)

____ 年 ____ 組 _____ 番　氏名_____　(裏面も利用可)

問 8

(1) すべての複素数 z に対して $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ が成り立つことを示せ。ただし (2026/11/17 の講義のように) 冪級数で e^z, $\cos z$, $\sin z$ を定義したとする。

(2) $f''(z) = -3f(z)$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$ を満たす $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とその収束半径を求めよ。

(チェック用: 実変数の微分方程式として解くと、$f(x) = 2\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\sqrt{3}x\right)$)

(3) 複素数の範囲で次の各方程式を解け (ただし $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ とする)。

(a) $e^z = -e$　(b) $e^z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$　(c) $\sin z = -1$　(d) $\cos z = 2$　(e) $\tan z = 3i$

問 8 解答

(1) (簡単だと思ったけれど、書いてみると意外にてこずる…笑) 定義式を思い出すと

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

いずれの冪級数も収束半径は $+\infty$ であるので、すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して、絶対収束する。ゆえに和を取る順序を変更しても値は変わらないことに注意する。

0 以上の整数 n は、$4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ $(k = 0, 1, \cdots)$ に分類できて、それぞれの場合に i^n の値は 1, i, -1, $-i$ であるから

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} z^{4k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} z^{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} z^{4k+2} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!} z^{4k+3} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} z^{4k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} z^{4k+2} + i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} z^{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!} z^{4k+3} \right). \end{aligned}$$

一方、0 以上の整数 n は、$2k$ と $2k+1$ $(k = 0, 1, \cdots)$ に分類できて、それぞれの場合に $(-1)^n$ の値は 1 と -1 であるから

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} z^{4k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} z^{4k+2}, \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} z^{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!} z^{4k+3}. \end{aligned}$$

ゆえに $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ が成り立つ。

(2) 収束円内では項別微分できるので[1)]

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n,$$
$$f''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n.$$

ゆえに

$$f''(z)=-3f(z)\quad\Leftrightarrow\quad(\forall n\geq 0)\quad(n+2)(n+1)a_{n+2}=-3a_n.$$

条件 $f(0)=2$ より $a_0=2$, $f'(0)=1$ より $a_1=1$ であるので、

$$a_{2k}=\frac{2\cdot(-3)^k}{(2k)!}\quad(k=0,1,2,\cdots),\quad a_{2k+1}=\frac{(-3)^k}{(2k+1)!}\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

(数学的帰納法を使うまでもないでしょう。もちろん使っても良いけれど。)

以上より (収束円内で絶対収束するので、偶数次の項だけ、奇数次の項だけでまとめても値は変わらないことに注意)

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-3)^k}{(2k)!}z^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$

これで $f(z)$ を求めることが出来たが、実は

$$(\heartsuit)\quad f(z)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\sqrt{3}z)^{2k}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\sqrt{3}z)^{2k+1}=2\cos\left(\sqrt{3}z\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}z\right).$$

(収束半径チェック) (♡) が分かった場合など、$f(z)$ は 2 つの収束半径 $+\infty$ の冪級数の和である (cos, sin の収束半径が $+\infty$ であることは既知だから) と分かったならば、$f(z)$ の冪級数展開の収束半径は $+\infty$ である。

あるいは、

$$\frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k+2}|}=\frac{3^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{(2k+2)!}{2\cdot 3^{k+1}}=\frac{2k+2}{6}\to+\infty,$$
$$\frac{|a_{2k}|}{|a_{2k+1}|}=\frac{2\cdot 3^k}{(2k)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{3^k}=2(2k+1)\to+\infty$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=+\infty.$$

ゆえに ratio test より $f(z)$ の冪級数展開の収束半径は $+\infty$ である。

(3) (a) $-e$ の極形式は $-e=ee^{i\pi}$ であるから

$$e^z=-e\quad\Leftrightarrow\quad(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=\log e+i(\pi+2n\pi)=1+(2n+1)\pi i.$$

---

1) あるいは $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$, $f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nz^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$.

(b) $\left|\sqrt{3}-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$.

$$\sqrt{3}-\sqrt{3}i = \sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{6}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

これが $\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ の極形式である。ゆえに

$$z = \log\sqrt{6}+(-\pi/4+2n\pi)i = \frac{1}{2}\log 6+(2n-1/4)\pi i \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

(c) $e^{iz}=X$ とおくと

$$\begin{aligned}\sin z=-1 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-1 \Leftrightarrow \frac{X-1/X}{2i}=-1 \Leftrightarrow X-\frac{1}{X}=-2i \Leftrightarrow X^2+2iX-1=0\\ &\Leftrightarrow X=-i\pm\sqrt{i^2-1\cdot(-1)}=-i \Leftrightarrow e^{iz}=-i=1\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z}) \quad iz=\log 1+\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i=\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi i.\end{aligned}$$

ゆえに

$$z=\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

(d) $e^{iz}=X$ とおくと

$$\begin{aligned}\cos z=2 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2 \Leftrightarrow \frac{X+1/X}{2}=2 \Leftrightarrow X+\frac{1}{X}=4 \Leftrightarrow X^2-4X+1=0\\ &\Leftrightarrow X=2\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 1}=2\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)e^{i0}\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z}) \quad iz=\log(2\pm\sqrt{3})+(0+2n\pi)\,i=\log(2\pm\sqrt{3})+2n\pi i.\end{aligned}$$

ゆえに

$$z=2n\pi-i\log(2\pm\sqrt{3}) \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

実は $-\log\left(2\pm\sqrt{3}\right)=\log\dfrac{1}{2\pm\sqrt{3}}=\log\dfrac{2\mp\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=\log\left(2\mp\sqrt{3}\right)$ なので、$z=2n\pi+i\log(2\mp\sqrt{3})$ と書いても良い (さらに、複号というわけではないので、$\mp$ を $\pm$ と書いても良い)。

(e) $e^{iz}=X$ とおくと

$$\begin{aligned}\tan z=3i &\Leftrightarrow \frac{\sin z}{\cos z}=3i \Leftrightarrow \frac{X-1/X}{2i}\cdot\frac{2}{X+1/X}=3i \Leftrightarrow \frac{X^2-1}{X^2+1}=-3\\ &\Leftrightarrow X^2-1=-3X^2-3 \Leftrightarrow 4X^2=-2 \Leftrightarrow X^2=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow X=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow e^{iz}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm\frac{\pi}{2}i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z}) \quad iz=\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i=-\frac{1}{2}\log 2+\left(2n\pm\frac{1}{2}\right)\pi i.\end{aligned}$$

ゆえに

$$z=\left(2n\pm\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{i}{2}\log 2 \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

□