複素関数・同演習 宿題 No. 7 (2026 年 11 月 11 日出題, 11 月 17 日 (火) 13:30 〆切。Oh-o! Meiji で提出)

____ 年 ____ 組 _____ 番　氏名_____　(裏面も利用可)

問 7　(1), (2) は等比級数の和の公式を用いて解答すること。

(1) 次の各関数を 0 の周りで冪級数展開して、その収束半径を求めよ。

(a) $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$　(b) $g(z)=\dfrac{4}{2z+3}$　(c) $h(z)=\dfrac{1}{(5z+6)^2}$

(d) $\varphi'(z)=\dfrac{1}{7-z}$, $\varphi(0)=8$ を満たす φ　(e) $r(z)=\dfrac{5z^4+31z^3+48z^2-13z-55}{z^3+5z^2+3z-9}$

(e) は部分分数分解を間違えると大変なので、Mathematica 等で検算することを勧める (`Apart[(5z^4+31z^3 +48z^2-13z-55)/(z^3+5z^2+3z-9)]` とすれば良い)。

(2) $F(z)=\dfrac{1}{3+4z}$ を 2 の周りで冪級数展開し、その収束円を求めよ。

問 7 解答

(1) 以下、考えている冪級数の収束半径を ρ と表す。

(a) (最初の問題なので、ゆっくり変形する。慣れたら適宜スキップすれば良い。)

$$f(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

(等比級数であるから) 収束する $\Leftrightarrow \left|\text{公比}\right|<1 \Leftrightarrow |-z|<1 \Leftrightarrow |z|<1$ であるから、$\rho=1$.

(b)

$$g(z)=\frac{4}{2z+3}=\frac{4}{3+2z}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+2z/3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2z}{3}\right)}=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2z}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot(-2)^n}{3^{n+1}}z^n.$$

(等比級数であるから) 収束する $\Leftrightarrow \left|\text{公比}\right|<1 \Leftrightarrow |-2z/3|<1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}|z|<1 \Leftrightarrow |z|<\frac{3}{2}$ であるから、$\rho=\dfrac{3}{2}$.

(c)

$$\frac{1}{5z+6}=\frac{1}{6(1+\frac{5}{6}z)}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{6}z\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^n}{6^{n+1}}z^n.$$

これは等比級数であるから、収束する $\Leftrightarrow \left|\text{公比}\right|<1 \Leftrightarrow |-5z/6|<1 \Leftrightarrow |z|<\frac{6}{5}$. ゆえに、この冪級数の収束半径は $\dfrac{6}{5}$. (任意の) 冪級数は収束円の内部で項別微分が出来るから

$$-\frac{5}{(5z+6)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{6^{n+1}}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{6^{n+2}}(n+1)z^n.$$

ゆえに

$$h(z)=-\frac{1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{6^{n+2}}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^n}{6^{n+2}}(n+1)z^n.$$

冪級数は項別微分しても収束半径は変わらないので、$\rho = \dfrac{6}{5}$.

(d)

$$\varphi'(z) = \frac{1}{7-z} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-z/7} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{7^{n+1}} \quad (\text{収束半径は } 7).$$

(任意の) 冪級数は収束円の内部で項別積分できることと、$\varphi(0) = 8$ であることから

$$\varphi(z) = 8 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)7^{n+1}} = 8 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{7^n n}.$$

冪級数は項別積分しても収束半径は変わらないので、$\rho = 7$.

(e) $r(z)$ を部分分数分解する。その計算の説明は後回しにして、結果を書くと

$$r(z) = 6 + 5z + \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z+3} + \frac{4}{(z+3)^2}.$$

$a \neq 0$ に対して、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}}z^n.$$

この級数が収束する $\Leftrightarrow \left|\text{公比}\right| < 1 \Leftrightarrow |z/a| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$. ゆえに収束半径は $|a|$. ゆえに

$$\frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n \quad (\text{収束半径} = 3).$$

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad (\text{収束半径} = 1).$$

前者を項別微分することで (このとき収束半径が変わらず 3 であることに注意)

$$\frac{1}{(z+3)^2} = -\left(\frac{1}{z+3}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^{n+1}}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}}z^n.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} r(z) &= 6 + 5z - \sum_{n=0}^{\infty}z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}}z^n \\ &= 6 + 5z - 1 - z - \sum_{n=2}^{\infty}z^n + \frac{2}{3} - \frac{2}{9}z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{3^{n+1}}z^n + \frac{4}{9} - \frac{8}{27}z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}}z^n \\ &= \frac{55}{9} + \frac{94}{27}z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(10+4n)(-1)^n}{3^{n+2}} - 1\right)z^n. \end{aligned}$$

(f の定義式を見て $f(0) = \dfrac{55}{9}$ — この種の検算をお勧めする。)

さて収束半径の計算であるが、収束半径が 1, 3, 3 の冪級数の和であることから、収束半径は 1 である[1)]。

---

1) 「$\sum_n a_n(z-c)^n$, $\sum_n b_n(z-c)^n$ の収束半径がそれぞれ ρ_1, ρ_2 で、$\rho_1 \neq \rho_2$ ならば $\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ である」という定理を 2 回適用すれば良い。

$r(z)$ の部分分数分解　$r(z)$ の分子 $n(z) := 5z^4 + 31z^3 + 48z^2 - 13z - 55$ を分母 $d(z) := z^3 + 5z^2 + 3z - 9$ で割ると、商が $5z + 6$, 余りが $3z^2 + 14z - 1$. つまり

$$n(z) = d(z)(5z + 6) + 3z^2 + 14z - 1.$$

ゆえに

$$r(z) = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{(5z + 6)d(z) + 3z^2 + 14z - 1}{d(z)} = 5z + 6 + \frac{3z^2 + 14z - 1}{d(z)}.$$

$d(z) = (z - 1)(z + 3)^2$ であるから

$$\frac{3z^2 + 14z - 1}{d(z)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 3} + \frac{C}{(z + 3)^2}$$

を満たす定数 A, B, C が存在する。分母を払った

$$3z^2 + 14z - 1 = A(z + 3)^2 + B(z - 1)(z + 3) + C(z - 1)$$

は恒等式である。

$z = 1$ を代入して $16 = 16A$ より $A = 1$.

$z = -3$ を代入して $27 - 42 - 1 = -4C$ より $C = 4$.

最高次の係数を比較して $3 = A + B$ より $B = 2$.

ゆえに

$$r(z) = 5z + 6 + \frac{1}{z - 1} + \frac{2}{z + 3} + \frac{4}{(z + 3)^2}.$$

Mathematica の利用

```
q[z_]:=5z^4+31z^3+48z^2-13z-55
p[z_]:=z^3+5z^2+3z-9
```

$q(z)$ を $p(z)$ で割った商と余りを求めるには

```
PolynomialQuotientRemainder[q[z],p[z],z]
```

$q(z)/p(z)$ の部分分数分解を求めるには、割り算を飛ばして

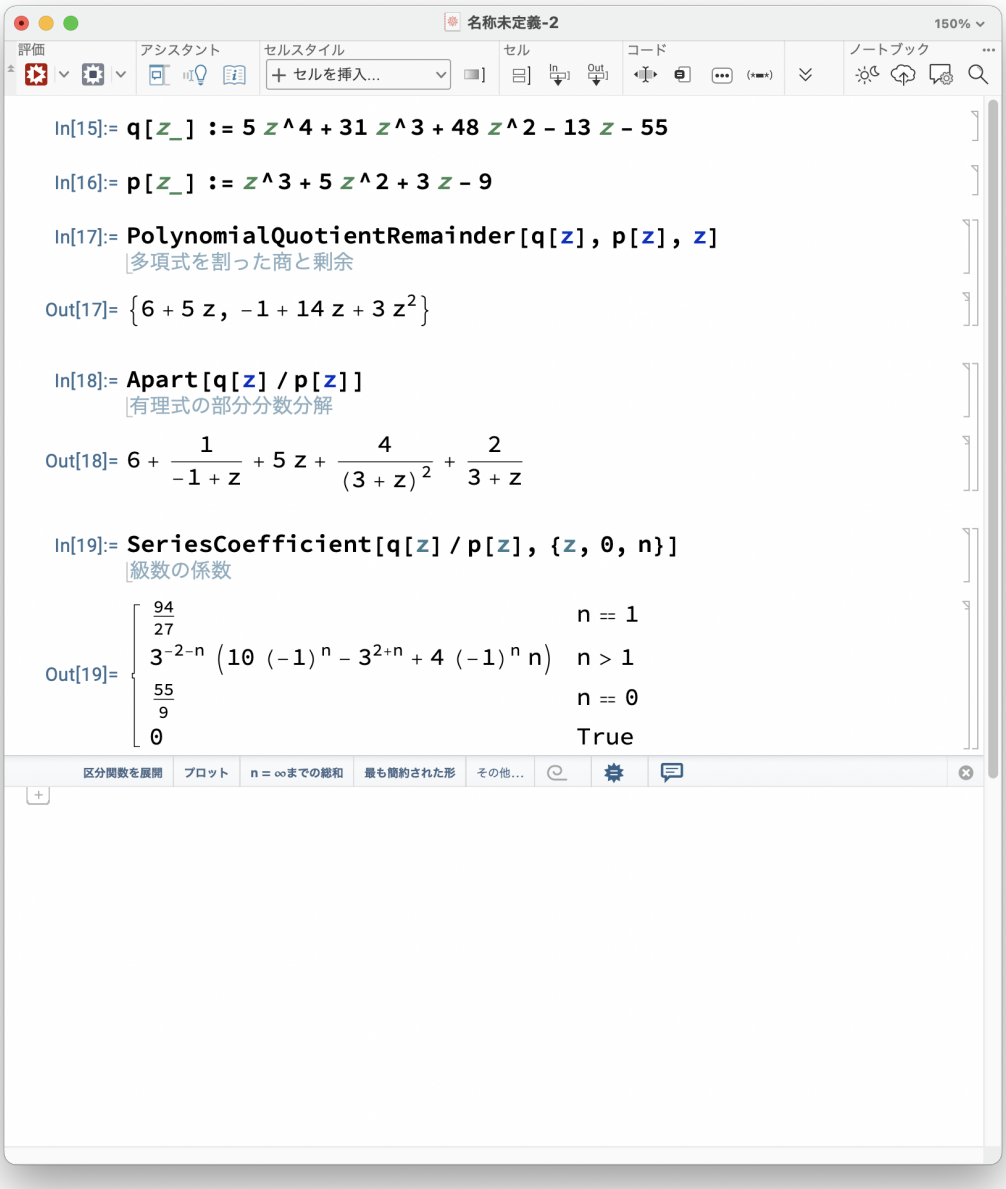
```
Apart[q[z]/p[z]]
```

とすれば良い。

$q(z)/p(z)$ を 0 の周りに冪級数展開したときの n 次の項の係数は

```
SeriesCoefficient[q[z]/p[z],{z,0,n}]
```

で求まる。



(2)

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{3+4z} = \frac{1}{3+4(z-2+2)} = \frac{1}{3+8+4(z-2)} = \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{11}(z-2)} \\
&= \frac{1}{11}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{11}(z-2)\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{11^{n+1}}(z-2)^n.
\end{aligned}
$$

等比級数であるから、

$$
\text{収束する} \Leftrightarrow \left|\text{公比}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{4}{11}(z-2)\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{4}{11}\left|z-2\right| < 1 \Leftrightarrow \left|z-2\right| < \frac{11}{4}.
$$

ゆえに収束円は $D\left(2;\frac{11}{4}\right)$. □