複素関数・同演習 宿題 No. 6 (2026 年 11 月 4 日出題, 11 月 10 日 (火) 13:30 〆切。Oh-o! Meiji で提出)

____ 年 ____ 組 _____ 番　氏名_____　(裏面も利用可)

問 6　(1)　優級数の定理を書け。(注意: 同名で内容の異なるものがある。複素数列版を書くこと。)

(2)　冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ において、ある実定数 M が存在して $(\forall n \geq 0)\ |a_n| \leq M$ が成り立つならば、$|z| < 1$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対してこの冪級数が収束することを示せ (ヒント: 優級数の定理)。この場合に、この冪級数の収束半径 ρ について何が分かるか。

(3)　以下の各 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について、$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ (ヒント: グラフを描いてみよう)。結果だけで良い (証明を省略して良い)。

(a) $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} nx & (-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}) \\ 1 & (\frac{1}{n} \leq x \leq 1) \\ -1 & (-1 \leq x \leq -\frac{1}{n}) \end{cases}$

(b) $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ $(x \in [0,1])$

(c) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x-n)$ $(x \in \mathbb{R})$, $f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(nx)$ $(x \in \mathbb{R})$, $f(x) = e^{-x^2}$

(e) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x/n)$ $(x \in \mathbb{R})$, $f(x) = e^{-x^2}$

問 6 解答

(1) 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、

$$\text{(i) } (\forall n\in\mathbb{N})\ |a_n|\le b_n \quad \text{(ii) } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ は収束する},$$

という 2 条件を満たす $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在するならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。

(2) $|z|<1$ とする。$A_n := a_n z^n$, $b_n := M|z|^n$ とおくと、任意の n に対して

$$|A_n| = |a_n z^n| = |a_n|\,|z|^n \le M|z|^n = b_n.$$

また

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} M|z|^n = \frac{M}{1-|z|} \quad \text{(等比級数で、}\left|\text{公比}\right| = |z| < 1 \text{ であるので、}\left|\text{公比}\right| < 1 \text{ を満たす)}$$

であるから、優級数の定理により $\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する (当然収束する)。

$\rho \ge 1$ であることが分かる。

(図を描いて「分かる」人もいるだろうが、以下では論理的に示す。)

もし $\rho < 1$ ならば $|z| < 1$ を満たす z で収束することに矛盾する ($\rho' := \frac{1+\rho}{2}$ とおくと、$\rho < \rho' < 1$. $z = \rho'$ において $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を考えると、$|z| > \rho$ であるから発散するが、一方 $|z| < 1$ であるから収束する。) ゆえに $\rho \ge 1$. □

($\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$ のように、$M = 1$ について $|a_n| = \frac{1}{3^n} \le M$ を満たすので、$|z| < 1$ で収束するけれど、収束半径は 3 で 1 より大きい、というものある。)

(3) (a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x=0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して、$\frac{1}{n} \le x \le 1$ ならば $f_n(x) = 1$, $-1 \le x \le -\frac{1}{n}$ ならば $f_n(x) = -1$, $f_n(0) = 0$ であることから導かれる。

(b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} r^n$ については、r が実数の場合は高校以来知っているはず。$-1 < r < 1$ ならば 0 に収束、$r = 1$ ならば 1 に収束、それ以外は発散する。複素数の場合も $|r| < 1$ ならば 0 に収束、$r = 1$ ならば 1 に収束、それ以外は発散する。

(c) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

任意の x に対して $n \to \infty$ のとき $(x-n)^2 \to \infty$, $\lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0$ であるから、$f_n(x) = e^{-(x-n)^2} \to 0$.

(d) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \ne 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

$x > 0$ の場合 $n \to \infty$ のとき $nx \to \infty$, $x < 0$ の場合 $n \to \infty$ のとき $nx \to -\infty$, $x = 0$ の場合 $n \to \infty$ のとき $nx \to 0$ に注意する。

(e) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

$n \to \infty$ のとき $x/n \to 0$ に注意する。