複素関数・同演習 宿題 No. 5 (2026 年 10 月 28 日出題, 11 月 4 日 (水) 10:50 〆切。Oh-o! Meiji で提出)

____ 年 ____ 組 _____ 番　氏名_____　(裏面も利用可)

問 5　(1)　c は複素数、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、z は複素数の値を取る変数とする。このとき冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径、収束円とは何か？

(2)　次の冪級数 (a)–(e) の収束半径と収束円を求めよ。

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{(n+1)^2}$　(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{4^n}(z+6)^n$　(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(7n)!z^n$　(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^9(z-10)^{11n+1}}{(-8)^n}$　(e) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$

問 5 解説

(1) ρ ($0 \leq \rho < +\infty$ または $\rho = +\infty$) が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径であるとは

$$|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束する}　\text{かつ}　|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散する}$$

を満たすことを言う。

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束円とは、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ のことをいう。ここで ρ は収束半径である。

(2) 冪級数の中心を c, 第 n 次の項の係数を a_n, 収束半径を ρ と書くことにする。

(a) $c = 3$, $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{(1+0)^2}{(1+0)^2} = 1.$$

ゆえに収束半径は 1, 収束円は $D(3;1)$.

(b) $c = -6$, $a_n = \dfrac{n^5}{4^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^5}{4^n} \cdot \frac{4^{n+1}}{(n+1)^5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{(1+1/n)^5} = 4.$$

ゆえに収束半径は 4, 収束円は $D(-6;4)$.

(c) $c = 0$, $a_n = (7n)!$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(7n)!}{(7(n+1))!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(7n+7)(7n+6)(7n+5)(7n+4)(7n+3)(7n+2)(7n+1)} = 0.\end{aligned}$$

ゆえに収束半径は 0, 収束円は $D(0;0) = \emptyset$.

(d) $\zeta := (z-10)^{11}$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^9(z-10)^{11n+1}}{(-8)^n} = (z-10)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^9(z-10)^{11n}}{(-8)^n} = (z-10)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^9\zeta^n}{(-8)^n}.$$

右辺の ζ についてのベキ級数は、中心 0, 係数 $b_n := \dfrac{n^9}{(-8)^n}$ であり、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|n^9|}{|(-8)^n|}\frac{|(-8)^{n+1}|}{(n+1)^9} = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{(1+1/n)^9} = 8$$

であるから収束半径は 8. ゆえに

$|\zeta| < 8$ ならば収束し、$|\zeta| > 8$ ならば発散する。

ゆえに与えられた冪級数は

$|(z-10)^{11}| < 8$ ならば収束し、$|(z-10)^{11}| > 8$ ならば発散する。

(言い換えると、$|z-10| < \sqrt[11]{8}$ ならば収束し、$|z-10| > \sqrt[11]{8}$ ならば発散する。)

ゆえに、収束半径は $\sqrt[11]{8}$, 収束円は $D\left(10;\, \sqrt[11]{8}\right)$.

(e) (e) は解かなくて良いと言ったので参考まで。細かいことだけれど、$\sum_{n=1}^{\infty}$ でなくて、$\sum_{n=0}^{\infty}$ とすれば良かったかな。

(解答) $a_n := \begin{cases} 1 & (n = k^2 \text{ となる } k \in \mathbb{N} \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ とおくと、与えられた級数は $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と表せる。ゆえにこの級数は 0 を中心とする冪級数である。

$|z| < 1$ ならば任意の n に対して $|a_n z^n| \le |z|^n$、かつ $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するので ($\because$ $\left|\text{公比}\right| < 1$ の等比級数)、優級数の定理より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方 $|z| > 1$ のとき、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$n := N^2$ とおくと、$n \ge N$ かつ $|a_n z^n| = |z|^n > 1$ が成り立つから、$\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$ は成り立たない。ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束しない。

以上から収束半径は 1. ゆえに収束円は $D(0;1)$. □

一方、Cauchy-Hadamard の公式を使う、という方法もある。$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ をどうやって求めるか、が焦点となる。

(別解 1) ($\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k$ という公式を利用する。)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

であるから、収束半径 $= \dfrac{1}{1} = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

(別解 2) (講義で説明した上極限の定義に当てはめてみる) $a_n = 1$ または $a_n = 0$ であるから、$\sqrt[n]{|a_n|} \le 1$. 一方、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$n = N^2$ とすると、$n \ge N$ かつ $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$. ゆえに

(a) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)$ $\sqrt[n]{|a_n|} < 1 + \varepsilon$.

(b) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\forall N \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)$ $\sqrt[n]{|a_n|} > 1 - \varepsilon$.

が成り立つ。ゆえに

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

(後略)

注意

- (細かいことだと思うかもしれないが) 収束半径 $= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ がつねに成り立つわけではないので、

$$\text{収束半径} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \cdots$$

と書き出すのは良くない。

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \cdots = \text{何か}$$

を得てから (極限が求まるか、$= +\infty$ になるかを確認してから)

$$\therefore \quad \text{収束半径} = \text{何か}$$

と書くべきである。