複素関数・同演習 宿題 No. 4　(2026 年 10 月 21 日出題, 10 月 27 日 13:30 〆切。Oh-o! Meiji で提出)

__年__ 組____番　氏名_____　(裏面も利用可)

問 4　いずれも Cauchy-Riemann 方程式がテーマの問題である。(1), (2), (3) が必修。

(1) Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、f の実部・虚部を u, v とする。

(a) v は調和関数であることを示せ。　(b) v の共役調和関数を求めよ。

(2)　正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+yi \in \Omega\}$,

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \quad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

とおくと、$\det \boldsymbol{f}' = |f'|^2$ が成り立つことを示せ (ただし $\boldsymbol{f}'$ は、$\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列 $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ であり、det は行列式を意味する)。

(3)　$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (\overline{z})^2$ とするとき、f の微分可能性を調べよ。(注意: 微分可能な点も存在する。これはむしろ、先週の講義の範囲内かもしれない。)

(4)　(解かなくても良い。) $\mathbb{C}$ の領域 Ω で定義された正則関数 f が 0 にならず (これは偏角を明確に定義するため)、その偏角の主値 $\operatorname{Arg} f(z)$ が定数関数であるとする。このとき f は定数関数であることを示せ。　(気が付けばすぐ解決。)