複素関数・同演習 宿題 No. 4　(2026 年 10 月 21 日出題, 10 月 27 日 13:30 〆切。Oh-o! Meiji で提出)

__年__ 組____番　氏名_____　(裏面も利用可)

問 4　いずれも Cauchy-Riemann 方程式がテーマの問題である。(1), (2), (3) が必修。

(1) Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、f の実部・虚部を u, v とする。

(a) v は調和関数であることを示せ。　(b) v の共役調和関数を求めよ。

(2)　正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+yi \in \Omega\}$,

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \quad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}),$$

とおくと、$\det \boldsymbol{f}' = |f'|^2$ が成り立つことを示せ (ただし $\boldsymbol{f}'$ は、$\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列 $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ であり、det は行列式を意味する)。

(3)　$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (\overline{z})^2$ とするとき、f の微分可能性を調べよ。(注意: 微分可能な点も存在する。これはむしろ、先週の講義の範囲内かもしれない。)

(4)　(解かなくても良い。) $\mathbb{C}$ の領域 Ω で定義された正則関数 f が 0 にならず (これは偏角を明確に定義するため)、その偏角の主値 $\operatorname{Arg} f(z)$ が定数関数であるとする。このとき f は定数関数であることを示せ。　(気が付けばすぐ解決。)

添削をしてみて気になったこと。

- 文字の書き分けが出来ていない答案がちらほら。「筆跡に個性があることは構わないが、異なる二つの文字が同じ、あるいはほとんど同じ形にならないようにすべき」。

  u と v はちゃんと出来ている人も多いので、講義中の注意がそれなりに浸透しているような気がする (出来ていない人は話を聞いていないのかな)。それ以外のところで気になったのは。

  (a) アルファベットの z と数字の 2 が区別しにくい答案がかなりあった。普通の英語の文章であれば、文脈から英字か数字か分かる場合が多いだろうが、数式混じりの文章では分かりにくい。(今回はなかったが、b と 6 もそうだ。) 普通の英文を書くときとは異なる工夫が必要になる。昔は例えば b は筆記体で書くとかする人が多かった (あるいは縦棒をまっすぐ書いて、その右側に丸みをつける、2 画で書くことになる)。z は普通に書けば丸いところがないので 2 と区別しやすいはずだが、難しければ横線を加えた $\mathbf{z}$ にする、というのが良く採用されている。

  (b) 複素関数 $f = f(z)$ から作った 2 実変数のベクトル値関数 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(x, y)$. 後者を複素関数と同じフォントで書いた人が多い。板書では二重線で書いて区別したが、$\boldsymbol{f}$ は判別しにくかっただろうか…しかし意味を考えれば異なることは明らかなのだから (特に導関数は、f' は複素関数で、$\boldsymbol{f}'$ は行列で、それが区別出来ないのはまずい、と気づいて欲しい。)、文字の形で区別できるように書くべきである。

問 4 解答

(1) (a) 一般に正則関数は無限回微分可能なので (講義で証明するのは結構後になります)、u, v は C^2 級である。Cauchy-Riemann 方程式 $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$ を代入すると

$$\triangle v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

(最後の等号は、C^2 級の関数の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらないことによる。) ゆえに v は調和関数である。

(b) $U := v$, V は U の共役調和関数とする。Cauchy-Riemann 方程式

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x$$

が成り立っている必要がある。U を消去して、

$$v_x = V_y, \quad v_y = -V_x.$$

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を代入して v を消去すると

$$-u_y = V_y, \quad u_x = -V_x.$$

これから、実数の定数 C が存在して、$V = -u + C$. 逆にこのとき $V_x = -u_x =$

$-v_y = -U_y$, $V_y = -u_y = v_x = U_x$ であるから、Cauchy-Riemann 方程式

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x$$

が成り立つ。(U, V の微分可能性は明らかだから) ゆえにこの V が U の共役調和関数である。 □

(こういう別解も) $f = u + iv$ から $-if = v - iu$ が導かれるので、v は正則関数 $-if$ の実部である。このことに気づくと、$-u$ は v の共役調和関数 (の 1 つ) であるから、v の共役調和関数は $-u + C$ (C は実定数) であることが分かる。 □

(2) Jacobi 行列の定義から

$$\det \boldsymbol{f}' = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x.$$

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = v_x$ を用いて v_x, v_y を消去すると

$$\det \boldsymbol{f}' = u_x v_y - u_y v_x = (u_x)^2 + (v_x)^2.$$

一方、$f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$ に注意すると

$$|f'|^2 = (u_x)^2 + (v_x)^2.$$

ゆえに $\det \boldsymbol{f}' = |f'|^2$. □

(3) (方法 1) f の実部・虚部をそれぞれ u, v とする。

$$f(x+iy) = \left(\overline{x+yi}\right)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$$

であるから

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = -2xy.$$

これらは (多項式関数であるから) $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級である。ゆえに微分可能である。

u と v が Cauchy-Riemann 方程式を満たすかチェックしよう。

$$u_x(x,y) = 2x, \quad u_y(x,y) = -2y, \quad v_x(x,y) = -2y, \quad v_y(x,y) = -2x.$$

- $(x,y) = (0,0)$ のとき、$u_x = 0 = v_y$ かつ $u_y = 0 = -v_x$ が成り立つので、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。ゆえに f は 0 で微分可能である。
- $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ のとき、$x \neq 0$ または $y \neq 0$ である。$x \neq 0$ のときは $u_x \neq v_y$, また $y \neq 0$ のときは $u_y \neq -v_x$. いずれの場合も Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。ゆえにすべての $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ において f は微分可能ではない。

(方法 2　定義に基づく…意外と面倒) $z \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\left(\overline{z+h}\right)^2 - \overline{z}^2}{h} = \frac{\overline{z}^2 + 2\overline{z}\overline{h} + \overline{h}^2 - \overline{z}^2}{h} = \frac{2\overline{z}\overline{h} + \overline{h}^2}{h} = 2\overline{z}\frac{\overline{h}}{h} + \frac{\overline{h}^2}{h}.$$

準備として

(a) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\overline{h}}{h}$ は存在しない。

> 確認
>
> $h=h_x+ih_y$ で、$h_y=0$ として $h_x\to 0$ と近づけると $\frac{\overline{h}}{h}=\frac{h_x}{h_x}=1\to 1$, $h_x=0$ として $h_y\to 0$ と近づけると $\frac{\overline{h}}{h}=\frac{-ih_y}{ih_y}=-1\to -1$. 両者が食い違うので、$\lim_{h\to 0}\dfrac{\overline{h}}{h}$ は存在しない。

(b) 一方、$\dfrac{\overline{h}^2}{h}\to 0$. 実際 $\left|\dfrac{\overline{h}^2}{h}\right|=|h|\to 0$ $(h\to 0)$.

- $z=0$ の場合、$\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=\dfrac{\overline{h}^2}{h}\to 0$ $(h\to 0)$ であるから、f は 0 で微分可能である。
- $z\neq 0$ の場合、$\lim_{h\to 0}\dfrac{\overline{h}}{h}$ は存在せず $\lim_{h\to 0}\dfrac{\overline{h}^2}{h}=0$ であるから、$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ は存在しない。ゆえに f は z で微分可能でない。

(この方法 2 は、(h が実数の場合、純虚数の場合と考える点で) 結局は Cauchy-Riemann 方程式の 1 つの導出法に近い。極限が存在しないことをいうだけなので、少し簡単になっている。)

(4) (気がつけば簡単である。) 一般に $f(z)=|f(z)|\,e^{i\operatorname{Arg} f(z)}$ が成り立つ。$\Theta:=\operatorname{Arg} f(z)$ とおく。仮定から Θ は定数である。$e^{-i\Theta}f(z)=|f(z)|$ であり、これは正則かつ虚部が恒等的に 0 であるから、(授業で学んだ定理 (定理 2.4 (1) https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex20261020.pdf#page=4) によって) 定数関数である。ゆえに $f(z)=e^{i\Theta}\cdot e^{-i\Theta}f(z)$ も定数関数である。 □