複素関数・同演習 宿題 No. 3　(2026 年 10 月 14 日出題, 10 月 20 日 13:30 〆切。Oh-o! Meiji で提出)

__年__ 組____番　氏名_____　(2 ページ目以降は裏面でも何でも可。)

問 3　以下の各 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の実部・虚部 u, v を求めよ。また、偏微分して、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つことを確かめよ。(3) については、$f'(z) = e^z$ であることを示せ (u_x, v_x を求めてあれば、1 行書くだけで良いはず)。

(1) $f(z) = z^4$　($\Omega = \mathbb{C}$)　(2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$　($\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$)　(3) $f(z) = e^z$ ($\Omega = \mathbb{C}$)

(4) $f(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$　($\Omega = \mathbb{C}$)

問 3 解説　Cauchy-Riemann 方程式は間違えのない形で覚えること (間違えて、定期試験で大減点という悲劇が起こる)。こういうのはサボらずに書くことを強く勧める。

(1)

$$f(x+iy) = (x+iy)^4 = x^4+4x^3(iy)+6x^2(iy)^2+4x(iy)^3+(iy)^4 = x^4-6x^2y^2+y^4+i(4x^3y-4xy^3)$$

であるから、f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3.$$

ゆえに

$$u_x = 4x^3 - 12xy^2, \quad u_y = -12x^2y + 4y^3, \quad v_x = 12x^2y - 4y^3, \quad v_y = 4x^3 - 12xy^2.$$

確かに $\mathbb{R}^2$ 全体で Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。

(2) (分母・分子に分母の共役複素数をかけて分母を実数化. $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形にする。)

$$f(x+iy) = \frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2} = \frac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから、f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad v(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

ゆえに (商の微分 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$ の計算をする)

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(x^2+y^2)^2\cdot(2x) - 2(x^2+y^2)(2x)\cdot(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2)\cdot(2x) - 4x\cdot(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ &= \frac{2x\left[(x^2+y^2-2(x^2-y^2)\right]}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2x(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \\ u_y &= \frac{2y(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{(同様なので途中略)}, \end{aligned}$$

$$v_x = \frac{(x^2+y^2)^2\cdot(-2y) - 2(x^2+y^2)(2x)\cdot(-2xy)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2)\cdot(-2y) - 2(2x)\cdot(-2xy)}{(x^2+y^2)^3}$$
$$= \frac{2y(-x^2-y^2+4x^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3},$$
$$v_y = \frac{-2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{(同様なので途中略)}.$$

確かに $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。

(注) この計算は間違えやすいので、4 つとも計算して、Cauchy-Riemann の方程式が成り立つことを真面目にチェックした (と言いつつ、上では途中略にしてしまったけれど…)。u_x を間違えて、それと同じ v_y が書いてあったりするが、もしサボったのだとしたら、せっかくの間違い発見の機会を捨てているわけで、それはもったいない。

(3) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y$ であるから、$u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = e^x\sin y$. これから

$$u_x = e^x\cos y, \quad u_y = -e^x\sin y, \quad v_x = e^x\sin y, \quad v_y = e^x\cos y.$$

確かに Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。

u_x, u_y, v_x, v_y は連続であるから、u と v は C^1 級なので、微分可能である。Cauchy-Riemann 方程式も満たすので、f は正則である。

f が微分可能のとき、$f' = u_x + iv_x$ が成り立つのは証明済みであるから

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^x(\cos y + i\sin y).$$

すなわち $f'(z) = e^z$.

(4) 実は $f(z) = \cos z$ であるが (後の講義で説明する)、解答するためには必要ない。複素指数関数の定義 $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ を用いて、ていねいに計算する。双曲線関数 $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ を使うと式が簡単になって楽である。使えるようにしておこう。

$$f(x+yi) = \frac{e^{i(x+yi)} + e^{-i(x+yi)}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-y+ix} + e^{y-ix}) = \frac{1}{2}\left[(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^y(\cos x - i\sin x)\right]$$
$$= \frac{\cos x(e^{-y}+e^y)}{2} + i\frac{(e^{-y}-e^y)\sin x}{2} = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.$$

であるから、f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y) = \cos x\cosh y, \quad v(x,y) = -\sin x\sinh y.$$

ゆえに ($(\cosh)' = \sinh$, $(\sinh)' = \cosh$ という公式を用いて)

$$u_x = -\sin x\cosh y, \quad u_y = \cos x\sinh y, \quad v_x = -\cos x\sinh y, \quad v_y = -\sin x\cosh y.$$

確かに $\mathbb{R}^2$ 全体で Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。 □

Mathematica で検算

```
f[z_]:=z^4
ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]
ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]
u[x_,y_]:=ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]
v[x_,y_]:=ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]
D[u[x,y],{{x,y}}]
D[v[x,y],{{x,y}}]

f[z_]:=1/z^2
Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
u[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
v[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
Simplify[D[u[x,y],{{x,y}}]]
Simplify[D[v[x,y],{{x,y}}]]

f[z_]:=(Exp[I z]+Exp[-I z])/2 あるいは f[z_]:=Cos[z]
Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
u[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
v[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
Simplify[D[u[x,y],{{x,y}}]]
Simplify[D[v[x,y],{{x,y}}]]
```