

__年__組__番 氏名__ (2 ページ目以降は裏面でも何でも可。)

- 問 2 (1) $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$ のとき、 $e^{i\theta}$ の値を求めよ。
- (2) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ とするとき、 $|z|$ の値、 z の極形式、 $\text{Arg } z$ の値を求めよ。(極形式は
無数にあるが、どれか 1 つ求めればよしとする。)
- (3) 1 と -1 の 6 乗根を、極形式を用いる方法 (10 月 6 日の講義で説明した方法) と、方
程式 $z^6 = 1$, $z^6 = -1$ を解く方法の両方で求めよ。

問 2 解説

- (1) (講義中に言ったことであるが、単位円、考えている点、実軸の正の部分から測った
角度を描いて、値を書く、というようにできて欲しい。cos, sin は書くな、と講義で
言っているのに、聞いていない人が多数。先が思いやられる…)

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i,$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad e^{i\frac{7\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}.$$

- (2) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ とするとき、

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{2 + 6} = 2\sqrt{2}.$$

$$\frac{z}{|z|} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}i}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

であるから、 $z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ が極形式である。 $\text{Arg } z = -\frac{2\pi}{3}$.

($z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$ などとも極形式として認める。 $\text{Arg } z$ は主値なので、 $-\frac{2\pi}{3}$ 以外は誤り。 z
の極形式を計算するときは、絶対値 $|z|$, それから $\frac{z}{|z|}$ を求めるのが安全運転。)

- (3) 1 の極形式は $1 = 1 \cdot e^{i0}$ であるから、1 の 6 乗根は

$$\sqrt[6]{1}e^{i(\frac{0}{6} + k\frac{2\pi}{6})} = e^{i\frac{k\pi}{3}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 5)$$

$$= 1, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

一方

$$z^6 - 1 = (z^3 + 1)(z^3 - 1) = (z - 1)(z^2 + z + 1) \cdot (z + 1)(z^2 - z + 1)$$

であるから、 $z^6 = 1$ の解として

$$z = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

-1 の極形式は $-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ であるから、 -1 の 6 乗根は

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{1}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{6}\right)} &= e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}} \quad (k=0,1,2,\dots,5) = e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}, e^{i7\pi/6}, e^{i3\pi/2}, e^{i11\pi/6} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2}, i, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}-i}{2}.\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}z^6 + 1 &= (z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1) = (z^2 + 1)(z^4 + 2z^2 + 1 - 3z^2) = (z^2 + 1)((z^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}z)^2) \\ &= (z^2 + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)(z^2 - \sqrt{3}z + 1)\end{aligned}$$

であるから、 $z^6 = -1$ の解は (3 つの 2 次方程式の解を合わせて)

$$z = \pm i, \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}. \quad \square$$

(ついでに ± 1 の 6 乗根の図もつけておく。)

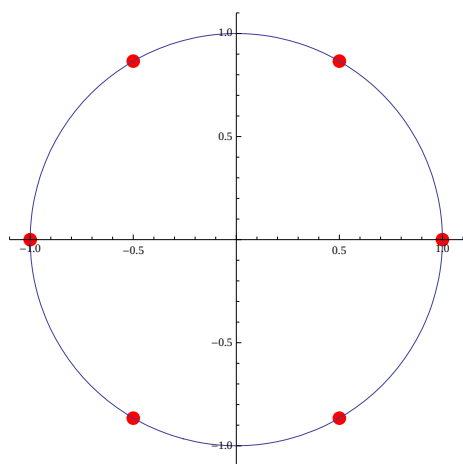


図1 $z^6 = 1$ の解

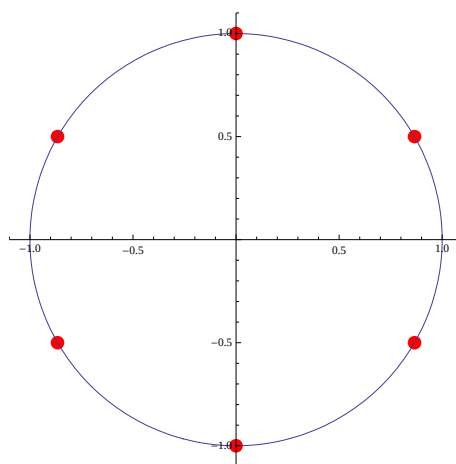


図2 $z^6 = -1$ の解