

Taylor 展開の剰余項と冪級数展開可能性

桂田 祐史

2026 年 7 月 11 日, 2026 年 7 月 12 日

とある日、微積分の授業で疑問を抱えた学生が持ってきた質問について、一応回答したのだけど、あまり納得してもらえなかったようなので、改めて整理してみた、という話。

1 はじめに — ファースト・コンタクト

「Taylor の定理で、剰余項が 0 に収束する範囲と、級数の収束半径が…(ごにょごにょ)」という質問であった。疑問を抱えている人は、自分で状況が良く整理できていないので、うまく質問できなかつたりする。それは仕方がないことで、こちらがある程度推察して答えないといけない。

微積の講義内容を思い出す 微積分で、無限回微分可能な関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I は定義域で、とりあえず区間としておく) と $a \in I$ があったとき、 f の a における Taylor 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

が定義できる。そして、しばしばこれが収束して $f(x)$ に等しい、ということが起こる。

そのために剰余項

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

というものを導入して、具体的な関数に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

がどういう x について成り立つかを調べる。その結果、例えば以下の式が証明できる。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\mathbb{R}$ 全体では成り立たず、条件付きとなる場合もある。例えば

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1).$$

それ以外に、冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ の収束半径 ρ を求める公式の紹介をされたりする。件の学生は

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

とかを空で話したりできた。ただ収束円とかは、あまりぴんと来ないようだった。微積分では、あまり表に出さないから仕方がないか。質問後半がゴニョゴニョになってしまうのは仕方がないのかな。

$$A := \left\{ x \in I \mid \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \right\}$$

と

$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid a - \rho < x < a + \rho\} \quad (\text{収束円と } \mathbb{R} \text{ の共通部分})$$

の関係を答えると良いのかな。 f が解析関数ならば、級数の収束する範囲と収束円が一致するかどうか (収束円の周上の点での収束の話)、という話だけど…

解析的でない関数も知っているようだった。うーん。そうするとまた話が違って来るね。 $A \subset \overline{B}$ くらい言えるけれど、逆向きはケース・バイ・ケースだね。

この辺でタイムアウト。

以下の 2, 5 がメイン。

2 整理し直し (解析的かどうかに関点を当てる)

2.1 問題の設定

C^∞ 級の関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ と a を固定する。 $x \in I, n \in \mathbb{N}$ に対して、剰余項 $R_n(x)$ を

$$(1) \quad R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

で定める。

$$A := \left\{ x \in I \mid \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \right\},$$

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{ は収束する} \right\}$$

とにおいて、 A と B の関係を論じる (B は前節の B から少し改訂)。

2.2 一般に $A \subset B$ が成り立つ

級数の収束の定義より、任意の $x \in I$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (\text{右辺の級数が収束して和が } f(x) \text{ に等しい})$$

が成り立つことが分かる。特に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{ は収束する.}$$

ゆえに、 $A \subset B$.

2.3 集合 B について

すべての冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ に対して

$$(z \text{ で収束} \wedge |z' - a| < |z - a|) \Rightarrow z' \text{ で収束}$$

が成り立つ。そのことから“収束半径”と“収束円”が定まる、という定理が導かれる。そのことを用いると、 B は次のいずれかである。

- (i) (収束半径が 0 のときは収束円が空集合) $B = \{a\}$
- (ii) (収束半径が $+\infty$ のときは収束円が $\mathbb{C}$ 全体) $B = \mathbb{R}$
- (iii) (収束半径が正の実数 ρ のとき、収束円は $D(a; \rho)$) B は $(a - \rho, a + \rho)$, $(a - \rho, a + \rho]$, $[a - \rho, a + \rho)$, $[a - \rho, a + \rho]$ のいずれかに等しい。

以上より、集合 B はかなり限定された形のものしかないと分かる。

2.4 集合 A について

集合 A はかなりバラエティに富む。 f の Taylor 級数は a の任意に小さい近傍上の f の値で定まるが、 f が C^∞ 級というだけならば、その近傍の外でかなり自由に改変できるから。もしかすると、この辺を理解するのが大事なかもしれない。この辺は多様体の勉強でもすると叩き込まれることだ (例えば松本 [1])。とにかく A は暴れ馬だ。 $A = B$ かなんて問は、ほとんどナンセンスに近い、という気もする。だから何を言うのが良いか少し考えないと…

一般に $A \subset B$ が成り立つので、逆向き $B \subset A$ が成り立つかどうか気にするのが自然だ。それに対して、「それが成り立つことはまったく期待できない」と答えるのが良いだろうか。そのことを見てみよう。

有名な例がある (これは件の学生は知っているようだった)。

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

で定義される f は¹

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすので

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x \leq 0 &\Rightarrow f(x) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \\ x > 0 &\Rightarrow f(x) \neq 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

¹これは Cauchy が元ネタみたいだけれど、Cauchy は $x > 0$ のとき $e^{-\frac{1}{x^2}}$ としたみたいだ。

とにかく $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) は成り立たない、というものであるが、この場合は

$$A = (-\infty, 0], \quad B = \mathbb{R}.$$

A と B は全然異なる。

違いがもっと大きい例も作れる。例えば

$$f(x) := e^{-\frac{1}{|x|}} = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ e^{\frac{1}{x}} & (x < 0) \end{cases}$$

とすると

$$A = \{0\}, \quad B = \mathbb{R}$$

であることが分かる。少し考えると、つねに $a \in A$ であることが分かるので、ある意味でこれは最小の場合である。

3 (おまけ) 剰余項の定義の確認

Taylor の定理の剰余項というと、Lagrange の剰余項というのが微積分の定番であるが、Cauchy の剰余項とか、積分を用いる Schlömilch の剰余項とか色々ある。その辺で混乱してしまう人もいるみたいだけれど、剰余項とは

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

で定義される $R_n(x)$ である²。 n を明示したいときは、 n 次剰余項とよばれる。

色々な名前があるのは、 $R_n(x)$ を何か特定の形の式で表せる、という定理が個別にあって、その場合の特定の式についている名前ということである。

4 (おまけ) ある $x_0 \in I$, $x_0 \neq a$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0) = 0$ となる場合に何が言えるか

オチ: 一点で $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0) = 0$ となってもあまり大したことは言えない。

ある $x_0 \in I$, $x_0 \neq a$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0) = 0$ が成り立つと仮定しよう。このとき

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x_0 - a)^n$$

が成り立つ。詳しくいうと、右辺の級数が収束して、和が $f(x_0)$ に等しい。

特に右辺の級数が収束するということから、冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

² 「 $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$ によって定義される $R_n(x)$ 」と書かれたりするが、要するにそういうことである。移項して $R_n(x) :=$ という形で書く方が誤解の余地が少ないと思う。

の収束半径は $|x_0 - a|$ 以上である。ゆえに複素平面内の円盤

$$D(a; \rho) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \rho\}, \quad \rho := |x_0 - a|$$

において

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

は収束する。その和を $F(z)$ とすると、 F は $D(a; \rho)$ において正則関数である。

f と F の関係については注意が必要である。

$$f(x_0) = F(x_0)$$

であるわけだが、 x_0 (と a) 以外の $x \in I$ について、

$$f(x) = F(x)$$

が成り立つかどうか、つまり

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

が成り立つかどうかは、ケース・バイ・ケースである。

((2) の右辺を変えずに左辺をほとんど自由に換えられる、ということを理解するのが重要なときもあるけれど、微積分の勉強中にそんなことを気にしても仕方がない気がする。)

5 解析的な場合だったら

多くの微積分テキストで考えているのは、ある $r > 0$ に対して、 $(a - r, a + r)$ に属するすべての x で $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ となる場合である。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (x \in (a - r, a + r))$$

が成り立つ、ということである。

これは実はその範囲で f が冪級数展開可能ということだから、解析性の密輸入だとも言えそう (笑)。

このとき、冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

の収束半径は r 以上である。解析関数の場合、 r として実は Taylor 級数の収束半径 ρ を取れることが分かる。

さらに Abel の連続性定理を使って $A = B$ が証明できる、と言えそうだ。

たとえば

$$f(x) = \log(1 + x)$$

の $a = 0$ での Taylor 級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

であるが、これについて

$$A = B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\}.$$

(これは $\mathbb{R}$ の中に限ってあるけれど、 $\mathbb{C}$ で考えても同じだ。)

定理 5.1 (Abel の連続性定理 (Abel's continuity theorem)) 冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が $z = R$ ($R > 0$) で収束したとする。任意の正数 K に対して、

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \quad \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \leq K \right\}$$

とおくとき、 f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で一様収束する。特に f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で連続である。さらに特に

$$\lim_{\substack{x \in [0, R) \\ x \rightarrow R}} f(x) = f(R).$$

6 結び

解析的でない C^∞ 級関数が存在する、というのは常識だから、 A と B は違う、というのは即答できる人が多いと思う。

少し考えて $A \subset B$ も分かる。ここまでは質問を受けた時に分かったことである。

一方で、解析関数に限れば実は $A = B$ というのは、質問を受けた時には気が付かなかった。実は収束円周上の点での挙動はケース・バイ・ケースだし、とか考えていた。それはそうだけれど、質問が $A = B$ かどうかならば、答えは $A = B$ である、なのか。ちょっと驚きだ。まあ、解析的というのは冪級数展開可能ということで、冪級数展開は一意的なのだから、かなり図々しい誘導をした上での話と言えて、そんなに大層な話ではない。でも、等しい、は面白い。

A 色々な例

A.1 Taylor 級数の収束半径が 0 である C^∞ 級関数

C^∞ 級であり、Taylor 級数の収束半径が 0 である関数の例として

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n x}{n!}$$

がある (ハイラー・ワナー [2] 下巻 III.7.5 演習問題 7.6)。

Matthias Lerch, Über die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 103 (1888): pp. 126-138. いわゆる『クレレ誌』103 (1888), p.126-138. III.7

Pringsheim 『一般関数論の基礎』(Grundlagen der allgemeinen Funktionlehre), 『数学百科事典』(Encyklopadie der math. Wiss.) II.1.1, (1899), p.1-53. III.3-4

A.2 任意の冪級数を Taylor 級数に持つ C^∞ 級関数

「数列 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ をまったく任意に与えるとき、 $(-\infty, \infty)$ で、 C^∞ 級で、定められた一点 a において

$$f^{(n)}(a) = \alpha_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots; f^{(0)}(a) \equiv f(a))$$

をみたすような関数 $f(x)$ を作ることができる。」(証明は、岩村 [3] の III 節にある。)

— これは一松 [4] を読んで知った。

A.3 定義域の各点で無限回微分可能なのに、いたるところで解析的でないような関数

定義域の各点で無限回微分可能なのに、いたるところで解析的でないような関数も存在する (Kabaya(Imai)-Iri [5])。

参考文献

- [1] 松本幸夫：多様体の基礎, 東京大学出版会 (1988), Maruzen eBook に入っている。 <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/Viewer/Id/3000046849> でアクセス可能。
- [2] E. ハイラー, G. ヴァンナー：解析教程 上, 下, シュプリンガーフェアラーク東京 (1997), “Analysis by its History” の邦訳. Wanner は元は「ワナー」と綴っていた。
- [3] 岩村聯： C^∞ 級関数の extension, 数学, Vol. 5, No. 2, pp. 91–92 (1953), https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/5/2/5_2_91/_article/-char/ja/ で入手可能。
- [4] 一松信：解析学序説 上, 裳華房 (1962/3/10).
- [5] Kabaya, K. and Iri, M.: Sum of uniformly distributed random variables and a family of nonanalytic C^∞ -functions, *Japan Journal of Applied Mathematics*, Vol. 4, pp. 1–22 (1987).