複素関数・同演習 第 18 回
～線積分 (2)～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 11 月 25 日, 2026 年 11 月 25 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
5 線積分 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
5.1 線積分の定義 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
5.2 原始関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
5.3 曲線に関する用語の定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
5.4 線積分の性質 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7
6 Cauchy の積分定理・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9
6.1 はじめに ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9
6.2 準備 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 10
6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 11
6.4 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が 0・・・・・・・・・・・・・・ 14
A 解答・・・ 17
参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 17

0 本日の内容・連絡事項

- 休講と補講のお知らせ (前回すでに言ったこと)。
  - 12/16(水曜) 私が校務のため休講にします。
  - 12/22(火曜) いわゆる補講日なので、12/16 の分をここで行う予定です (申請中です。補講の時限は決まっていません。)。12/23(水曜) 大学で臨時休講日です。
- 今日は線積分の話の続きです。

5　線積分 (続き)

5.1　線積分の定義 (続き)

前回の分も一部書いておく。

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路の入り口まで、街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげる感じ。景色がどんどん変わる。)

定義 5.1 (線積分). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$C : z = \varphi(t)\ (t \in [\alpha, \beta])$ は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$f\colon C^* \to \mathbb{C}$ は連続とする。ただし $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$. このとき

$$\int_C f(z)\, dz := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt \tag{5.1}$$

とおき、f の曲線 C に沿う**線積分**と呼ぶ。

また

$$\int_C f(z)\, |dz| := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, |\varphi'(t)|\, dt \tag{5.2}$$

と定める。

例 5.2. $f(z) = z^2$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, \pi])$ のとき (単位円の上半分を右から左に移動する曲線)。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\, dz &= \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta) d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta}\, d\theta = i\int_0^\pi e^{3i\theta}\, d\theta \\ &= i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\left(e^{3i\pi} - e^{3\cdot 0}\right) = \frac{(-1)-1}{3} = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例 5.3. $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, 2\pi])$ のとき (単位円を反時計回りに一周する曲線)。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\, dz &= \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta}\, d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

□

注意事項

(1) 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実 1 変数関数の積分 $\int_a^b f(x)\, dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

(2) φ が区分的に C^1 級であるとは、

$$(\exists\{t_j\}_{j=0}^m)\quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta \wedge \text{各小区間 } [t_{j-1}, t_j] \text{ で } \varphi \text{ は } C^1 \text{ 級}$$

を満たすことである。

C^1 級でなく、区分的に C^1 級とすることで、折り曲がっている曲線 (多角形の周とか) が簡単に式で表せる。

分点 t_j において φ の片側微分係数は存在するが、微分係数 $\varphi'(t_j)$ は存在しないことがありうる。その場合は

$$\int_C f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$$

とみなすべきである。そういう意味では広義積分である。

2026/11/24 はここまで講義しました。11/25 はこの下から始めます。

(3) $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、$U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$ とおいて

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt := \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V(t)\,dt \tag{5.3}$$

と定義しても良い。

$\alpha < \beta$ であれば

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt \tag{5.4}$$

が成り立つ。 Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left|\sum_j F(t_j)\Delta t_j\right| \le \sum_j |F(t_j)|\,\Delta t_j$$

から証明出来る。(5.3) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

(4) (とても良く使う。)

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|\,. \tag{5.5}$$

実際、C が $z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ とすると

$$\left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt$$

と書き換えられるが、これは (5.4) によって確かに成立する。

大抵は、この後

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in C^*}|f(z)| \int_C |dz| = \max_{z\in C^*}|f(z)| \times (C \text{ の弧長})$$

と評価することになる。

注 $C^* = C$ の跡 $= \varphi$ の値域 $= \operatorname{Image}\varphi = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ である。

注 定義より $\displaystyle\int_C |dz| = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,dt$ であるから、これは C の弧長である。

5.2 原始関数

なぜ線積分が重要か。

複素関数においては、それこそが微分の逆演算と考えられるものだからである。

定理 5.4 (微積分の基本定理、のようなもの). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で原始関数 F を持つ ($F' = f$)、C は Ω 内の区分的 C^1 級曲線とするとき、

$$\int_C f(z)\,dz = F(b) - F(a). \tag{5.6}$$

が成り立つ。ただし、a, b はそれぞれ C の始点、終点である。
((5.6) の右辺を、$[F(z)]_a^b$ や $[F(z)]_{z=a}^{z=b}$ で表す。)

証明 C が $z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ と表せて、φ が C^1 級である場合、

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz = \int_C F'(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F\left(\varphi(t)\right)dt \\ &= \left[F\left(\varphi(t)\right)\right]_{t=\alpha}^{t=\beta} = F\left(\varphi(\beta)\right) - F\left(\varphi(\alpha)\right) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

φ が連続かつ区分的 C^1 級の場合、ある $\{t_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta, \quad \varphi \text{ は各 } [t_{j-1}, t_j] \text{ で } C^1 \text{ 級.}$$

このとき

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \sum_{j=1}^m \left(F(\varphi(t_j)) - F(\varphi(t_{j-1}))\right) \\ &= F\left(\varphi(t_m)\right) - F\left(\varphi(t_0)\right) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

(本当はいつもこのように積分範囲を分割して議論すべきだけど、ワンパターンの議論なので、以下では、φ が C^1 級のときの証明だけを書いて済ませることが多い。) □

上の定理は、1 変数実関数の場合とある意味では同じである。 しかし、

連続な 1 変数実関数は必ず原始関数を持つ。

($\because F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ とおくと $F'(x) = f(x)$)

は成り立つが、

連続な 1 変数複素関数は原始関数を持つとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

(このあたりの事情は、ベクトル解析でも同じである。任意のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャル ($\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす F のこと) が存在するとは限らない。もし存在すれば、$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})$.)

前項 (5.1) 最後の 2 つの例を見直してみる。

例 5.5 (原始関数が存在すれば楽々計算　例 5.2 再訪)**.** $f(z) = z^2$, $C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ とする。$F(z) := \dfrac{z^3}{3}$ は $F' = f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3} \quad \text{(もちろん前の計算と一致)}.$$

□

例 5.6 (原始関数が存在しない例　例 5.3 再訪)**.** (前半) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\})$ とする。f の原始関数は存在しない。

実際、もしも原始関数 F が存在すると仮定すると、$C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ は Ω 内の C^1 級曲線であるから

$$\int_C f(z)\,dz = [F(z)]_{z=1}^{z=1} = F(1) - F(1) = 0.$$

ところが前回見たように $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i$ であるから、矛盾が生じる。 □

そういうわけで、原始関数が存在するかどうかが大事である。

- 多項式の場合は、必ず存在する。
- 収束冪級数の場合は、必ず存在する。
- 有理関数の場合は log が出るケースがある。その場合は存在しないかもしれない。要注意。
- $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Arg} z$, $\overline{z}$ は原始関数を持たない。

例 5.6 (原始関数が存在しない例 (つづき)　例 5.3 再訪)**.** (後半) $\Omega' := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ における対数関数の分枝 $\log z$ を、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in (0, 2\pi))$ に対して

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。$F(z) := \log z$ は Ω' で正則であり、$F'(z) = \dfrac{1}{z}$.

$0 < \varepsilon < \pi$ を満たす ε に対して

$$C_\varepsilon\colon z = e^{i\theta} \quad (\varepsilon \le \theta \le 2\pi - \varepsilon)$$

とおく。C_ε は Ω' 内の C^1 級曲線で

$$\begin{aligned}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz &= [F(z)]_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \log e^{i(2\pi-\varepsilon)} - \log e^{i\varepsilon} \\ &= (2\pi - \varepsilon)i - i\varepsilon = 2(\pi - \varepsilon)i.\end{aligned}$$

$\varepsilon \to +0$ のときの極限 $2\pi i$ が、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i$ に一致するのはもっともらしい。

原始関数が存在しない場合は、例えば例 5.2, 5.3 でやったように、定義に戻って計算すると良い。

例 5.7 (原始関数の存在しない例)**.** $C\colon z=(1+2i)t\ (t\in[0,1])$ とする。$f(z)=|z|$ は原始関数を持たない。

$$\begin{aligned}\int_C |z|\,dz &= \int_0^1 \sqrt{t^2+(2t)^2}\cdot(1+2i)\,dt = (1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 |t|\,dt\\ &= (1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 t\,dt = \frac{(1+2i)\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

□

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $C\colon z=\varphi(t)\ (t\in[\alpha,\beta])$ は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\Omega$ 連続) とする。

(1) $\varphi([\alpha,\beta])=\{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ を C **の像**または**跡**と呼び、C^* と表す。
(2) C が C^1 **級**とは、φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、φ' が連続) であることをいう。
(3) C が C^1 **級正則**とは、C が C^1 級かつ $(\forall t\in[\alpha,\beta])\ \varphi'(t)\neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)
(4) C が**区分的** C^1 **級**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$

かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級であることをいう。
(5) C が**区分的** C^1 **級正則**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$

かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級かつ $\varphi'(t)\neq 0$ (ただし $t=t_{j-1},t_j$ では片側微分係数である。) であることをいう。

(6) C が**閉曲線**とは、$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ であることをいう。
(7) C が**単純** (Jordan arc) $\Leftrightarrow$ 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha,\beta)$ で単射であることをいう。
要するに「自分自身と交わらない」こと。
(8) 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** $\Leftrightarrow$ 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理**「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を 2 つの領域 (一方は有界、もう一方は非有界) にわけ、曲線の像は両者の境界である。」証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

例 5.8 (円周)**.** $C\colon z=c+re^{i\theta}\ (\theta\in[0,2\pi])$ は、C^1 級正則単純閉曲線である。C の像は中心 c, 半径が r の円周で、C は正の向きである。単に $|z-c|=r$ と書いたら、この曲線のこととみなす (慣習)。

例 5.9 (正方形の周)**.** 図の正方形の周。

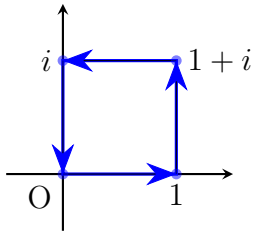


図 1　正方形の周を正の向きに一周する

$$C\colon z=\varphi(t):=\begin{cases} t & (t\in[0,1]) \\ 1+i(t-1) & (t\in[1,2]) \\ 1+i-(t-2) & (t\in[2,3]) \\ i-i(t-3) & (t\in[3,4]) \end{cases}$$

このとき、$C^*=$ 正方形の周. 区分的に C^1 級正則、単純閉曲線、正の向き。
しかし!! 計算をするときに上の式は使わない (もっと楽な方法がある)。 □

定義 5.10 (逆向きの曲線 $-C$, 曲線の和 C_1+C_2)**.** (1) 逆向きの曲線 $-C\colon z=\varphi(-t)$ $(t\in[-\beta,-\alpha])$
(2) C_1 の終点=C_2 の始点のとき。C_1+C_2 を次のように定義する。

$$\varphi(t):=\begin{cases} \varphi_1(t) & t\in[\alpha_1,\beta_1] \\ \varphi_2(t-\beta_1+\alpha_2) & t\in[\beta_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2] \end{cases}$$

教科書は C_2C_1 と表している。これはもっともなところがあるのだけれど…この講義では C_1+C_2 と表す (その方がふつう)。後で終点=始点でない場合にも使う。

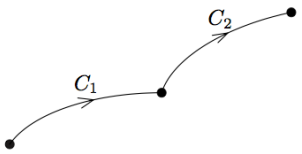


図 2　C_1 の終点 $=C_2$ の始点ならば C_1+C_2 が作れる

5.4 線積分の性質

定理 5.11 (線積分の性質)**.** Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、$\lambda \in \mathbb{C}$, C, C_1, C_2 は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき次が成り立つ。

(1) $\displaystyle\int_C (f(z)+g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz.$
(2) $\displaystyle\int_C \lambda f(z)\,dz = \lambda \int_C f(z)\,dz.$
(3) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|$ (前回説明済みであるが).
(4) $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$
(5) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$

証明 (1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

(3) 一般に連続関数 $F\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ に対して,

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$$

が成り立つことを認めれば、$F(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ について適用して、

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt = \int_C |f(z)|\,|dz|.$$

(4) $z = \varphi(-t)$ $(t \in [-\beta,-\alpha])$ とすると、$dz = -\varphi'(-t)dt$ であるから、

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(\varphi(-t))\cdot(-\varphi'(-t))dt = \int_{-\alpha}^{-\beta} f(\varphi(-t))\varphi'(-t)\,dt.$$

$s = -t$ とおくと、$t = -\alpha$ のとき $s = \alpha$, $t = -\beta$ のとき $s = \beta$, $dt = -ds$ であるから、

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\varphi'(s)\cdot(-1)ds = -\int_C f(z)\,dz. \quad \square$$

注意 5.12. 孤長要素に関する線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,|dz| = \int_C f\,ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z)\,|dz| = \int_C f(z)\,|dz|. \quad \square$$

定理 5.13. 線積分の値は、曲線の向きを変えないパラメーター付けによらない。

証明 一般の場合の証明を書くことはサボるが、次の例を検討すると理解できるであろう。 $\square$

例 5.14. 次の 5 つの曲線について考える。

$C_1\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0,\pi])$

$C_2 : z = e^{i\pi t}$ $(t \in [0,1])$
$C_3 : z = e^{i\pi t^2}$ $(t \in [0,1])$
$C_4 : z = -t + i\sqrt{1-t^2}$ $(t \in [-1,1])$
$C_5 : z = t + i\sqrt{1-t^2}$ $(t \in [-1,1])$

曲線の像はいずれも、原点を中心とする単位円周の上半分である:

$$C_j^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\} \quad (j = 1,2,3,4,5).$$

$j = 1, \cdots, 4$ に対して C_j の向きは同じ、$C_5 = -C_4$ であるので C_5 は逆向きである。

上の定理を認めると、任意の f に対して $\int_{C_j} f(z)\, dz$ の値は皆同じであり、$\int_{C_5} f(z)\, dz = -\int_{C_4} f(z)\, dz$ であることが分かる。

この例については、直接的な変数変換で示すことができる。

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_0^{\pi} f(e^{i\theta}) \cdot ie^{i\theta}\, d\theta. \tag{5.7}$$

(5.7) で、$\theta = \pi t$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot ie^{i\pi t} \cdot \pi\, dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot i\pi e^{i\pi t}\, dt = \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

(5.7) で、$\theta = \pi t^2$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t^t}) \cdot ie^{i\pi t^2} \cdot \pi 2t\, dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot 2\pi i e^{i\pi t^2}\, dt = \int_{C_3} f(z)\, dz.$$

以下同様に証明できる。

問 $\int_{C_4} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz$ であることを示せ。

6 Cauchy の積分定理

いよいよ Cauchy の積分定理を説明する。

一般的な形の Cauchy の積分定理をすぐ扱うのは困難である。段階的に進めて行くことにする。今日は Cauchy の積分定理がどういうものか、直観的に分かる形で説明して、三角形の周の場合 (Goursat-Pringsheim の定理) を述べて、きちんと証明する。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1)]は簡単で

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

1) 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

(a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則 (Ω の任意の点で微分可能)。
(b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

以上は分かりやすいが、次が要注意
(c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ f(z) = \frac{1}{z},\ C\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, 2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、$\int_C f(z)\,dz = 0$ ではない)。

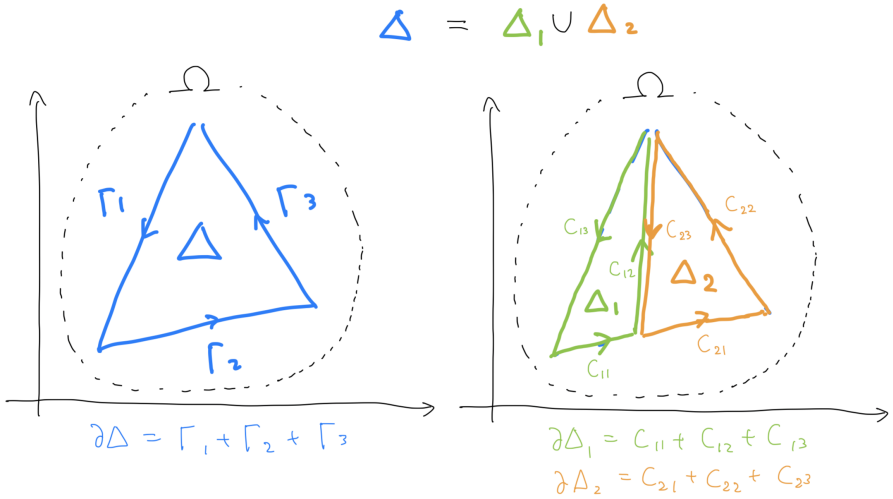
しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従って「囲む」を解釈しても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

6.2 準備

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、Ω に含まれる三角形 Δ を 2 つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ (∂某 は、某 の周を正の向きに一周する曲線)。

(6.1)
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz.$$



実際、

$$\partial\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \partial\Delta_1 = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad \partial\Delta_2 = C_{21} + C_{22} + C_{23}$$

とするとき $C_{23} = -C_{12}$ であるから

$$\int_{C_{23}} f(z)\,dz = \int_{-C_{12}} f(z)\,dz = -\int_{C_{12}} f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z)\,dz + \int_{C_{23}} f(z)\,dz = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz &= \left(\int_{C_{11}} + \int_{C_{12}} + \int_{C_{13}}\right) + \left(\int_{C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{23}}\right) \\ &= \int_{C_{11}+C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{13}} \\ &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = \int_{\partial\Delta}. \quad \square\end{aligned}$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

定理 6.1 (三角形版 Cauchy の積分定理, Goursat-Pringsheim [1]). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、Δ は Ω 内の三角形 (周も内部も Ω に含まれる) とするとき

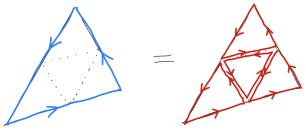
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

ここで $\partial\Delta$ は Δ の周を正の向きに一周する閉曲線とする。

(講義では、次の部分は時間節約のため話さないかもしれない。)

証明のアイディアは、

(a) 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。



(b) 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。

(i) 正則 (微分可能) とは、局所的に 1 次関数 $az+b$ で良く近似できること

(ii) 1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 である: $\int_{\text{閉曲線}} (az+b)dz = 0.$
実際 $\left(\frac{az^2}{2} + bz\right)' = az + b$ であり、1 次関数は原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0.

証明 $M := \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$ とおく。$M = 0$ を示したい。

$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、$\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、$j = 1, 2, 3, 4$ すべてを考えると、2 回現れ、それらは互いに

逆向きになっているので、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまう。ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z)\,dz.$$

これから

$$M = \left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \leq \sum_{j=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|.$$

右辺の 4 つの項 $\left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|$ のうち最大値を与える三角形が Δ_{0j^*} であったとして、それを Δ_1 とおくと、

$$M \leq 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|.$$

ゆえに

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割&選択を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ:

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

区間縮小法の原理により

$$(\exists c \in \mathbb{C}) \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}.$$

$c \in \Delta_0 = \Delta \subset \Omega$ であることに注意する。

1 次関数は必ず原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} (f(c) + f'(c)(z-c))dz = 0 \quad (f \text{ の } c \text{ での 1 次近似式の積分は } 0).$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - (f(c) + f'(c)(z-c))]\,dz.$$

右辺の被積分関数を $g(z)$ とおくと、

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} g(z)\,dz\right| \leq \max_{z\in\partial\Delta_n^*} |g(z)| \int_{\partial\Delta_n} |dz|.$$

$L_n := \int_{\partial\Delta_n} |dz|$ は $\partial\Delta_n$ の弧長である。Δ_n は $\Delta_0 = \Delta$ と相似であり、n が 1 増えるごとに、長さが $1/2$ 倍になる。ゆえに $L_n = \dfrac{L_0}{2^n}$ を満たす。

微分の定義 $\lim_{z\to c} \dfrac{f(z)-f(c)}{z-c} = f'(c)$ によって

$$\lim_{z\to c} \frac{g(z)}{z-c} = \lim_{z\to c} \frac{f(z) - (f(c) + f'(c)(z-c))}{z-c} = 0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta > 0$ が存在して

$$|z-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{g(z)}{z-c}\right| \leq \varepsilon.$$

$c \in \Delta_n$ であるので、十分大きな n に対して、$\Delta_n \subset D(c;\delta)$ が成り立つ。そのような n に対して、$z \in \partial\Delta_n^*$ であれば、$|z-c| < \delta$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*} |g(z)| \leq \varepsilon \max_{z\in\partial\Delta_n^*} |z-c|\,.$$

$z, c \in \Delta_n$ であれば、$|z-c| \leq L_n$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*} |g(z)| \leq \varepsilon L_n.$$

ゆえに

$$\frac{M}{4^n} \leq \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leq \varepsilon L_n \cdot L_n = \frac{\varepsilon L_0^2}{4^n} \quad \text{であるから} \quad 0 \leq M \leq \varepsilon L_0^2.$$

$(\forall \varepsilon > 0)\ 0 \leq M \leq \varepsilon L_0^2$ より $M = 0$ が導かれる。 □

定理 6.1 とその証明から すぐ or 直観的に 分かること

(a) Ω に含まれる任意の “多角形” P の周 $\Gamma := \partial P$ に沿う線積分 $\int_\Gamma f(z)\,dz$ も 0.



実際、多角形は三角形に分割でき、各三角形の周に沿う線積分は (上の Lemma から) 0. これを全部加えると $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

(b) Ω の中にある領域 D の境界が区分的に C^1 級の閉曲線であるとき、D の中に穴はない (ここは曖昧だけど「直観的」なので) とすると $\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$ (正当化には少し手間がかかる).



図 3　D 内に穴がない

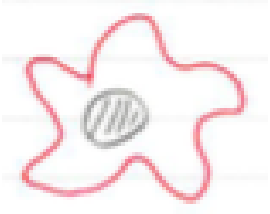


図 4　D 内に穴がある

証明もどき (どうせ後でやるので講義ではカット)

D を細かく分割する: $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$. $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D_k} f(z)\,dz$.
∂D より離れた D_k は三角形が選べて、その周 ∂D_k に沿う線積分は 0.
∂D に近い D_k は三角形が選べないが、Ω 内のある円盤 $D(c;\varepsilon)$ に含まれるように細かく分割しておけば、$F(z) := \displaystyle\int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ $(z \in D(c;\varepsilon))$ が原始関数になる (詳細は来週)。だから線積分は 0.

余談　ベクトル解析履修者向け: 有名な Green の定理を用いる別証明がある。

Green の定理 (講義ではカットする)

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{\partial\Delta} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy) \\ &= \iint_{\Delta} (-v_x - u_y)dx\,dy + i\iint_{\Delta} (u_x - v_y)dx\,dy. \end{aligned}$$

f は正則であるから、Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つ。 ゆえに

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \iint_{\Delta} 0\,dx\,dy + i\iint_{\Delta} 0\,dx\,dy = 0. \quad \square$$

この論法が成立するには、f' の連続性を仮定する必要がある[2]。強い仮定が必要という意味では、定理としては弱くなるが、もしも Green の定理に十分慣れていれば[3]色々な議論が単純になるので、魅力的に感じられるかもしれない。

実は教科書 (神保 [3]) はこの証明を採用しているが、残念ながら Green の定理の説明はあまり詳しくない。この方針のもとに書かれている本のうちで、私のお勧めは、堀川 [4] である (Green の定理のていねいな説明が載っている)。

6.4　原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が 0

Cauchy の積分定理の結論部分は、

2)　テキストによっては、関数が正則であることの定義を、微分可能かつ導関数が連続という条件を満たすこととしている。また、あるテキストでは、P, Q が C^1 級と仮定する代わりに、P, Q が全微分可能かつ $Q_x - P_y$ が連続ならば、$\displaystyle\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$ が成り立つという定理 (Goursat-Bochner の定理) を使って議論している (一松 [2])。

3)　残念ながら、そういうカリキュラムを採用している学科は稀にしかないでしょう。

任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に沿う線積分が 0: $\int_C f(z)\,dz = 0$

という条件だった。

一方で「f が原始関数を持てば」これが成り立つことを知っている ($\int_C f(z)\ dz = F(\text{終点}) - F(\text{始点}) = 0$)。何か関係があるのだろうか？

Ω を $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続とするとき、以下の 3 つの条件の関係について調べよう。

(i) f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)
(ii) Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ
(iii) f は Ω で正則である

すでに (i) ⇒ (ii) は知っているが、実は逆 (ii) ⇒ (i) も成り立つ。証明は難しくないので、このすぐ後で述べる (命題 6.4)。

さらに、実は (i) ⇒ (iii) である。その証明は後日。

> それは Cauchy の積分公式 (まだ説明していない) を用いて得られる「正則ならば、各点の近傍で冪級数展出来る」という定理 (後で証明するこの講義の重要な目標) から、F は何回でも微分できることが分かるので、特に F が 2 回微分可能であることから、$f = F'$ も微分できるからである。

上に述べたように (i) と (ii) は同値なので、(ii) ⇒ (iii) も成り立つ。すなわち「Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について $\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つならば、f は Ω で正則である。」これは通常 **Morera (モレラ) の定理**と呼ばれる。

(これは既に言ってあることだが) (iii) ⇒ (ii) は一般には成り立たない。これは $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0$ という例から分かる。

ここまでをまとめると、

(i) と (ii) は同値で (iii) より強い

(iii) に条件を足して (ii) を導くのが Cauchy の積分定理である、と考えられる。

Ω に何か $+\alpha$ の条件をつけると (iii) ⇒ (ii) が言えて、すべて同値になる。

定理 6.2 (単連結領域における Cauchy の積分定理　とても有名)**.** Ω は $\mathbb{C}$ の単連結あるいは星型の領域とし、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

(単連結、星型の定義は後述する。)

これから

星型領域や単連結領域に対しては、(i), (ii), (iii) は同値である

単連結の場合は特に有名であるが、厳密な証明には少し手間がかかる (講義ノート [5] の**E 節**に載せてある。証明のアイディアは、この講義でも少しずつ紹介してゆく。)。

星型の場合は比較的簡単に証明できて (本日後半)、その定理だけで関数論の多くの重要な結果が導くことが出来る。

余談 6.3 (ベクトル解析を勉強した人に). 実は、ベクトル解析にも、これとよく対応する話がある。

(i) が「ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持つ」, (ii) が $\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=0$, (iii) が $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=0$, ということになる。

(i) と (ii) は同値である。(i) (あるいは (ii)) から (iii) が導かれるが、逆は一般には成り立たず、単連結領域であれば逆も成立する、というのは同じである。 □

では (ii) ⇒ (i) を証明しよう。

定理 6.4 (任意の区分的 C^1 級閉曲線に沿う線積分が 0 ならば原始関数を持つ). Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega\to\mathbb{C}$ は連続で、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\int_C f(z)\,dz=0$ が成り立つとする。このとき、ある正則関数 $F\colon \Omega\to\mathbb{C}$ が存在して、$F'=f$.

証明 Ω 内の任意の点 a を取る。Ω が弧連結であるから、任意の $z\in\Omega$ に対して、a を始点、z を終点とする Ω 内の区分的に C^1 級の曲線 C_z が存在する。

$$F(z):=\int_{C_z} f(\zeta)\,d\zeta$$

とおく。

$F(z)$ の値は C_z の取り方にはよらない。

実際、a を始点、z を終点とする Ω 内の 2 曲線 C_z, C_z' があるとき、$C:=C_z+(-C_z')$ とおくと、C は閉曲線であるので、仮定 (条件 (ii)) から

$$0=\int_C f(\zeta)\,d\zeta=\int_{C_z} f(\zeta)\,d\zeta-\int_{C_z'} f(\zeta)\,d\zeta \quad \text{ゆえに} \quad \int_{C_z} f(\zeta)\,d\zeta=\int_{C_z'} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つからである。

この F が f の原始関数であることを示す。

任意の $z\in\Omega$ に対して、$(\exists\varepsilon>0)\ D(z;\varepsilon)\subset\Omega$. ゆえに $|h|<\varepsilon$ を満たす任意の h に対して、z から $z+h$ に向かう線分 $[z,z+h]$ は Ω に含まれる。C_{z+h} として $C_z+[z,z+h]$ を選ぶことにより、

$$F(z+h)-F(z)=\int_{C_z+[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta-\int_{C_z} f(\zeta)d\zeta=\int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta. \tag{6.2}$$

一方

$$\int_{[z,z+h]} d\zeta=[\zeta]_{\zeta=z}^{\zeta=z+h}=h$$

であるから、$h\neq 0$ とするとき

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)&=\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta-f(z)\cdot\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} d\zeta\\&=\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]}(f(\zeta)-f(z))\,d\zeta.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| &\le \frac{1}{|h|}\int_{[z,z+h]}|f(\zeta)-f(z)|\,|d\zeta| \\ &\le \frac{1}{|h|}\max_{\zeta\in[z,z+h]}|f(\zeta)-f(z)|\int_{[z,z+h]}|d\zeta| \\ &= \max_{\zeta\in[z,z+h]}|f(\zeta)-f(z)|\,.\end{aligned}$$

f は z で連続であるから、$h\to 0$ のとき右辺 $\to 0$. ゆえに $F'(z)=f(z)$. □

A　解答

参考文献

[1] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).

[2] 一松信：解析学序説 下, 裳華房 (1963/3/5).

[3] 神保(じんぼう) 道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.

[4] 堀川穎二(えいじ)：複素関数論の要諦, 日本評論社 (2003/3/10, 2015/8/25).

[5] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf (2014〜).