複素関数・同演習 第 17 回
～対数関数 (2) と線積分～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 11 月 24 日, 2026 年 11 月 25 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
4 対数関数と冪関数 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
4.1 複素対数関数 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
4.1.1 $e^w = z$ を解く (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
4.1.2 複素対数関数の定義, 主値 $\operatorname{Log} z$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
4.1.3 Mathematica で Log を見てみよう ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
4.2 冪関数 (power function) z^α ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5
4.3 初等関数ワールド ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9
5 線積分 ・・ 10
5.1 線積分の定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 10
A 解答・・ 12
参考文献 ・・ 12

0 本日の内容・連絡事項

- 落ち着いて考えてみると、問 8 は少し重かった (分量が多かった) ですね。お疲れさま。
- 今年度は講義日程が不規則です。11 月は 11/24, 11/15 の 2 回の講義があります。12 月は 12/1, 12/2, 12/8, 12/9, 12/15, 12/22 の 6 回しか講義がありません。
  - 12/16(水曜) 私が校務のため休講にします。
  - 12/22(火曜) いわゆる補講日なので、12/16 の分をここで行う予定です (申請中です)。ここに入れないと、12 月の後半は講義がないことになってしまう (次回ま

でひと月近い空き)。

– 12/23(水曜) 大学で臨時休講日です。

1 月に入ってから 4 回の講義 (1/12, 1/13, 1/19, 1/20) があります。例年と同じように授業を進行させると、最後のところで演習がとても忙しくなります。演習向きのことはなるべく早めにやって、そうでないことの説明は後回しにしようと考えています。やや不自然な進行を強いることになり、申し訳ないです。

- 今日は対数関数の話の続きです。例年だと Mathematica の使い方の説明に時間を少しかけますが、今日は端折り気味。それから本来は冪関数 ($f(z) = z^\alpha := e^{\alpha \log z}$) と逆三角関数ですが、逆三角関数について、宿題に解答できるような短時間の説明をすることで済ませて、次の「線積分」に入ります。

4 対数関数と冪関数 (続き)

4.1 複素対数関数 (続き)

4.1.1 $e^w = z$ を解く (続き)

定理 4.1 (方程式 $e^w = z$ の解 (復習))**.** 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、w についての方程式 $e^w = z$ の解が存在する。その解は、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$w = \log r + i\,(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{4.1}$$

これは $w = \log|z| + i \arg z$ とも書ける ($\arg z = \theta + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ だから)。

4.1.2 複素対数関数の定義, 主値 $\operatorname{Log} z$

“複素対数関数” $\log z$ を定義しよう。

やり方が複数ある。

しばらくは色をつけて区別する。黒は実関数としての対数関数、赤は無限多価関数としての対数関数、青は一価正則な分枝。

(1) $e^w = z$ を満たす w 全てを採用する。つまり $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$\log z := \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{4.2}$$

この log は値が複数あるので、写像・関数ではない。

(無限) **多価関数**という。

これと区別するため、普通の関数 (値が一つしかない) を**一価関数**と呼ぶことがある。

(2) I を幅 2π の半開区間とする。

例えば $I=[0,2\pi)$, $I=(-\pi,\pi]$, あるいはより一般に $\alpha\in\mathbb{R}$ として $I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ または $I=(\alpha,\alpha+2\pi]$ とする。このとき、任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して

$$z=re^{i\theta},\quad r>0,\quad \theta\in I \tag{4.3a}$$

を満たす r, θ が一意的に存在するので

$$\log z:=\log r+i\theta \tag{4.3b}$$

と定める。$\log\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ であり、値域は $\{u+iv\mid u\in\mathbb{R},\ v\in I\}$.

$I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ の場合に値域を図示してみること (無限に長い帯の形をしている)。

このように、適当なルールで 1 つの値を選んで一価関数とするとき、その一価関数を元の多価関数の**分枝** (ぶんし) (branch) と呼ぶ。

特に $I=(-\pi,\pi]$ のときの $\log$ を、**複素対数関数の主値** (the principal value of complex logarithm) と呼び、先頭が大文字の $\operatorname{Log} z$ で表す。

対数関数の主値 (覚える)

$$z=re^{i\theta},r>0,\theta\in(-\pi,\pi]\quad \text{とするとき}\quad \operatorname{Log} z:=\log r+i\theta. \tag{4.4}$$

偏角の主値 Arg を用いると

$$\operatorname{Log} z=\log|z|+i\operatorname{Arg} z. \tag{4.5}$$

$\operatorname{Log}\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ であり、値域は $\{u+iv\mid u\in\mathbb{R},\ v\in(-\pi,\pi]\}$.

Log は $N:=\{z\in\mathbb{C}\mid z<0\}$ で不連続である (N を $(-\infty,0)$ と書かせてもらう)。

$x\in N$ とするとき

$$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z>0}}\operatorname{Log} z=\log|x|+i\pi, \tag{4.6a}$$

$$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z<0}}\operatorname{Log} z=\log|x|-i\pi. \tag{4.6b}$$

($\because$ z と原点との距離は $|z|$. $z\to x$ のとき $|z|\to|x|$. $\operatorname{Im} z>0$ と $\operatorname{Im} z<0$ で $z\to x$ とすると、それぞれ $\theta\to\pi$, $\theta\to-\pi$. —— 以上は図を添えて説明すること)

4.1.3 Mathematica で Log を見てみよう

現象数理統計学科 Mac にインストールされている **Mathematica** は、**数式処理系**と呼ばれるソフトウェアである。プログラミング言語の処理系の一種でもあるが、多くのプログラミング言語 (例えば C, Python, MATLAB, …) は、数値計算はできても数式の計算はできない。

これを使うと、従来手計算するしかなかった多くの計算を実行することができる。学習・研究に生かせるように、習得することを勧めたい。

「複素関数と Mathematica」という説明を用意してある (授業 WWW サイトに置いてある, PDF ならばクリックすればブラウザが起動するはず)。その中では、この「複素関数」の宿題に現れるような計算 (実際、過去の年度の宿題に出て来た問題を取り上げている) の実行例が載っている。本日は中をのぞかないことにする。

- 現象数理統計学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、私 (桂田) か池田先生に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに `Wolfram.app` または `Mathematica.app` (名前はバージョンによる) がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- コマンドの最後に shift+return (enter) とタイプする。
- 直前の結果は `%` で参照できる。直前のコマンドは command+L で呼び出せる。
- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。
- `??`関数名 としてマニュアルが開ける (非常に便利なので、これに慣れること)。
- 関数名の大文字・小文字に注意する。Mathematica で用意されている関数名の先頭は大文字である。
- 入力したコマンドと計算結果は、ノートブックとして保存しておける (ファイル名末尾 `.nb`)。
- 既存のノートブックはダブルクリックで開ける。

  コマンドを 1 つ 1 つ shift+return で実行する以外に、メニューから [評価] → [ノートブックを評価] として (上から順番に) 全部実行することもできる。

Mathematica で Log の実部・虚部のグラフを描こう

```
Plot3D[Im[Log[x+I y]],{x,-1,1},{y,-1,1}, RegionFunction->Function[{x,y,z},x^2+y^2<1]]
```

水色部分は $x^2+y^2<1$ の範囲だけでグラフを描くための指定 (なくても描ける)。

`Plot3D[]` の代わりに `ContourPlot[]` にしたり、`Im[]` の代わりに `Re[]` にしたり。

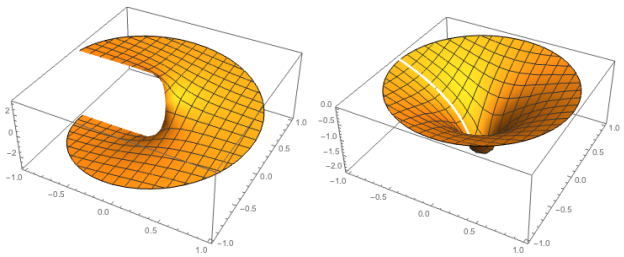

図 1　$\mathrm{Im}\,\mathrm{Log}(x+yi)$, $\mathrm{Re}\,\mathrm{Log}(x+yi)$ **のグラフ** $(x^2+y^2<1)$

(Python でも簡単なはずと思って、生成 AI に投げてみたけれど、パッとしない結果になった。おかしいな。誰かうまく出来たら教えて)

ちなみに無限多価関数 log の虚部の “グラフ” は、上下にずっと続く螺旋階段である。

上では Log の定義域を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とした。すると $N=\{z\in\mathbb{C}\mid z<0\}$ に属する任意の点で不連続であるが、N を除くと ($\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ に制限すると) 連続であるだけでなく、正則になる。実際、次の定理が成り立つ。

定理 4.2 (対数関数の主値の正則性)**.** $\Omega:=\{w\in\mathbb{C}\mid -\pi<\operatorname{Im}w<\pi\}$ とおく。$\operatorname{Log}\colon\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\Omega$ と制限したものは、正則関数

$$f\colon\Omega\to\mathbb{C}\setminus(-\infty,0],\quad f(w)=e^w\quad(w\in\Omega)$$

の逆関数である。この (制限した) Log は $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ で正則であり、$(\operatorname{Log}z)'=\dfrac{1}{z}$.

証明　複素関数においても、逆関数の微分の公式、逆関数定理は成立する (現時点では、導関数が連続である正則関数についてのみ逆関数定理が証明出来ている)。

$f(w)=e^w$ は全単射かつ正則、$f'(w)=e^w$ は連続、$f'(w)=e^w\neq0$ であるから、その逆関数 Log は正則である。$z=e^w$ のとき、$\dfrac{dz}{dw}=e^w=z$ なので

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{z}.\quad\text{すなわち}\quad(\operatorname{Log}z)'=\frac{1}{z}.$$

□

対数関数の正則性は、主値に限らず、任意の連続な分枝について成り立つ。

定理 4.3 (対数関数の分枝の正則性)**.** 幅 2π の任意の半開区間 $I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ あるいは $I=(\alpha,\alpha+2\pi]$ を選んで、$z=re^{i\theta}$ $(r>0,\theta\in I)$ に対して

$$\log z=\log r+i\theta$$

と定めた log も、$\mathbb{C}\setminus N_\alpha$ (ただし $N_\alpha:=\{re^{i\alpha}\mid r\geq0\}$) に制限すると正則関数になり、

$$(\log z)'=\frac{1}{z}.$$

すでに述べたように、一価関数にした log を対数関数の分枝と呼ぶが、N_α のように、それを除くことで 1 つの分枝(ぶんし)を “截(き)り出す” ことができる曲線 (普通は半直線や線分を選ぶ) を、**分岐截線**(ぶんきせっせん) (branch cut) と呼ぶ。

(私は「截」という字が覚えられないので (ふだん使わないし…)、手書きでは branch cut と書くことが多い。「截る」よりは “cut” の方が分かりやすいだろうし。)

4.2　幂関数 (power function) z^α

2026/11/24 の講義では、この項は後回しにします。

まず、高校数学の復習から始めよう。

実数 a, b について、a^b がつねに定義されるわけではなかった。

$a < 0$ かつ $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ のときは a^b を考えないのが普通である。

「そうだったっけ？」「例えば $(-1)^\pi$ の値は？」これは答えに詰まるのが正しい。高校数学では定義されていない。

$a > 0$ のときは、b が何でも良かった。その場合、次式が成り立つ。

$$a^b = e^{b \log a}. \tag{4.7}$$

この関係式 (4.7) を用いて、冪関数を複素関数に拡張する。

後で冪関数を z^α と書くことになるが、しばらく $p(z, \alpha)$ と書くことにする。($\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、z^α は定義済み。それとの衝突を避けるため。)

$$p(z, \alpha) := e^{\alpha \log z}. \tag{4.8}$$

この log として、log (無限多価), log (分枝), Log (主値) など色々考えられる。

もちろん log (分枝), Log (主値) を選べば、1 価の正則関数が得られる。以下では、多価関数の

$$\log z = \log r + i\,(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z};\ \text{ただし } z = re^{i\theta},\ r > 0,\ \theta \in \mathbb{R} \text{ とする})$$

を選んだ場合を考察する (可能な値をすべて考察する、ということ)。

簡単のため、$\alpha \in \mathbb{R}$ の場合を調べよう。すると

$$p(z, \alpha) = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i n\alpha}.$$

このとき ($i\alpha\theta$, $2\pi i n\alpha$ は純虚数なので $\left|e^{i\alpha\theta}\right| = 1$, $|e^{2\pi i n\alpha}| = 1$ であるから)

$$|p(z, \alpha)| = r^\alpha \quad (\text{後の記号で} \quad |z^\alpha| = |z|^\alpha). \tag{4.9}$$

α で場合分けする (整数、整数でない有理数、無理数)。

(前のスライドから) $p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i n\alpha}$.

(a) $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、$n\alpha \in \mathbb{Z}$. ゆえに $e^{2\pi i n\alpha} = 1$. ゆえに

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = r^\alpha \left(e^{i\theta}\right)^\alpha = \left(re^{i\theta}\right)^\alpha = z^\alpha = \begin{cases} \overbrace{z \times \cdots \times z}^{\alpha \text{ 個}} & (\alpha > 0) \\ 1 & (\alpha = 0) \\ 1/\underbrace{(z \times \cdots \times z)}_{-\alpha \text{ 個}} & (\alpha < 0). \end{cases}$$

注意: 以前 $n \in \mathbb{Z}$ のとき $e^{nz} = (e^z)^n$ を証明してあり、$z = i\theta$ として適用した。

($p(z,\alpha) = z^\alpha$ は、無限多価函数を使って定義しても $p(z,\alpha)$ はこれまで通りの冪乗、ということ。)

(b) $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき

(4.10a) $$\alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N},\ p \geq 2,\ q \in \mathbb{Z},\ p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

と表せる。すると

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}} = r^\alpha e^{i\alpha\theta}\omega^{nq} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ただし

$$\omega := e^{2\pi i/p}.$$

n が $\mathbb{Z}$ を動くとき、nq を p で割った余りには、$0, 1, \cdots, p-1$ すべて現れる[1)]。
ゆえに

$$\omega^{nq} = 1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{p-1},$$

(4.10b) $$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}\omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, p-1).$$

これは円周 $|z| = r^\alpha$ の p 等分点である。特に $\alpha = \dfrac{1}{p}$ のときは、z の p 乗根全体である。

(c) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (つまり α は無理数) のとき、$p(z,\alpha)$ は無限個の値を持つ (証明はサボる。用途があまりなさそうなので。コンピューターで計算して納得できる…かも)。 □

まとめると (無限多価 の log を用いて $p(z,\alpha) := e^{\alpha \log z}$ とすると)

(a) $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、$p(z,\alpha) = z^\alpha$ (普通の冪). 1 価関数である。
(b) $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha = \dfrac{q}{p}$ (既約分数, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) のとき、$p(z,\alpha)$ は p 価関数である。
(c) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき、$p(z,\alpha)$ は無限多価関数である。

もちろん、いずれの場合も、$p(z,\alpha) = e^{\alpha \log z}$ と対数関数の分枝 $\log z$ を選ぶことで、1 価関数になる (冪関数の分枝が選べる)。

今後は $p(z,\alpha)$ を z^α と書く。特に $\alpha = \dfrac{1}{p}$ $(p \in \mathbb{N})$ のとき $\sqrt[p]{z}$ と書くことがある。多価関数と考えるのか、分枝を選んで一価関数とするかは case by case である。

例 4.4 ($\sqrt{-1}$ は何か？). (無限多価 の log を用いて $\sqrt{z} = p(z,1/2) := e^{\frac{1}{2}\log z}$ とする場合)

---

1) 実際、p と q は互いに素であるから、$(\exists k, \ell \in \mathbb{Z})$ $kp + \ell q = 1$. ゆえに任意の $m \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して、$mkp + m\ell q = m$. ゆえに $(m\ell)q$ を p で割った余りは m. $n := m\ell$ とおくと $\omega^{nq} = \omega^{m\ell q} = \omega^{-mkp}\omega^m = \omega^m$.

$(-1) = 1 \cdot e^{\pi i}$ より $\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$ であるから

$$\sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(2n+1)\pi i} = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i} = i(-1)^n = \pm i.$$

(別法) $\alpha = \frac{1}{2}$, $z = -1$ とすると、$z = 1 \cdot e^{\pi i}$, $\omega = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$ であるから

$$\sqrt{-1} = z^{1/2} = 1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\cdot\pi i} \cdot \omega^k = i \cdot (-1)^k \quad (k = 0, 1)$$

ゆえに

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

1 つくらい $\alpha \notin \mathbb{R}$ に対する z^α を求めてみよう。

例 4.5 (i の i 乗)**.** 多分応用はないと思うが、i^i を求めてみよう。i の極形式は $i = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$ であるから

$$\log i = \log|1| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに ($a^b = e^{b\log a}$ によって)

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i\cdot\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i} = e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

□

$p(z, \alpha)$ を図示する Mathematica プログラム

```
p[z_, alpha_, maxn_] := Module[{r, t, w},
  r = Abs[z]; t = Arg[z]; w = r^alpha*Exp[ alpha t];
  Table[{Re[w Exp[I n alpha 2 Pi]], Im[w Exp[I n alpha 2 Pi]]}, {n, maxn}]]
g8=ListPlot[p[1,1/8,8], AspectRatio->Automatic, PlotStyle->{PointSize[0.03]}]
groot2a=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 100], AspectRatio -> Automatic]
groot2b=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 1000], AspectRatio -> Automatic]
Manipulate[ListPlot[p[1, Sqrt[2], n], AspectRatio -> Automatic], {n, 1, 1000}]
```

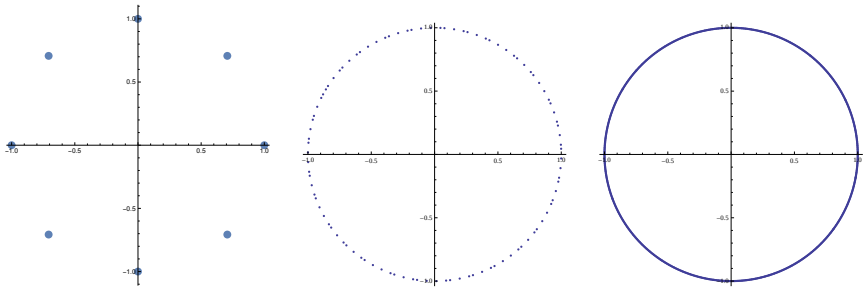

図 2 $p(1, 1/8)$, $p(1, \sqrt{2})$ **(100 個)**, $p(1, \sqrt{2})$ **(1000 個)**

4.3　初等関数ワールド

2026/11/24 の講義では、$\sin z = w$ を満たす z を求めただけで、その後は後日、としました。

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

w が与えられたとき、$\sin z = w$ を満たす z を求めてみよう。$X = e^{iz}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\sin z = w \Leftrightarrow \quad & \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \\
\Leftrightarrow \quad & X^2 - 2iwX - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X = iw \pm \sqrt{(iw)^2 + 1} = iw \pm \sqrt{1 - w^2} \\
\Leftrightarrow \quad & iz = \log\left(iw \pm \sqrt{1 - w^2}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & z = -i \log\left(iw \pm \sqrt{1 - w^2}\right)
\end{aligned}$$

であるから、次のように定義する。

$$\sin^{-1} z = \arcsin z := -i \log\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right).$$

この右辺は、ある意味で冗長である。(log がそうであるように) $\sqrt{\ }$ が多価関数を表すという約束のもとでは

$$\sin^{-1} z = \arcsin z := -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

と書けば十分である。また、一価正則な分枝を選ぶ場合も、log と $\sqrt{\ }$ のそれぞれに適当な分枝を選ぶことにすれば、やはり $\pm$ とする必要はない (ただし $\sqrt{1} = -1$ かもしれないことに注意する)。

同様にして、$\cos^{-1} = \arccos$, $\tan^{-1} = \arctan$, $\sinh^{-1} = \operatorname{arcsinh}$, $\cosh^{-1} = \operatorname{arccosh}$, $\tanh^{-1} = \operatorname{arctanh}$ が定義できる。

(逆双曲線関数の場合は arc でなく、ar (面積 area) あるいは arg (argument) を使うべき、という人達がいるとか。実際に ISO 80000-2 標準 (一体それは何？) では、arsinh, arcosh, artanh を使うそうだ。)

これらは、分枝を選んで一価関数にしなければ多価関数である。多価関数を扱うには、「解析接続」を学んでからとりかかるのが良い。この講義では詳細は省略する。

一通り書いておこう。

$$\begin{aligned}
&\arcsin z = \sin^{-1} z := -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \\
&\arccos z = \cos^{-1} z := i \log\left(z - i\sqrt{1-z^2}\right) = \frac{\pi}{2} + i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \\
&\arctan z = \tan^{-1} z := \frac{i}{2}\left(\log(1-iz) - \log(1+iz)\right), \\
&\sinh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \\
&\cosh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \\
&\tanh^{-1} z := \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.
\end{aligned}$$

問　次式を確かめよ。

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2},$$

$$\left(\sinh^{-1} z\right)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \quad \left(\cosh^{-1} z\right)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad \left(\tanh^{-1} z\right)' = \frac{1}{1-z^2}.$$

($\arctan$, $\tanh^{-1}$ の導関数は一価であるが、他の導関数は二価である。)

問　次式を確かめよ。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z.$$

5　線積分

5.1　線積分の定義

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路の入り口まで、街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげる感じ。景色がどんどん変わる。)

定義 5.1 (線積分). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$C : z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$f : C^* \to \mathbb{C}$ は連続とする。ただし $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$. このとき

$$\int_C f(z)\, dz := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt \tag{5.1}$$

とおき、f の曲線 C に沿う**線積分**と呼ぶ。

また

$$\int_C f(z)\, |dz| := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, |\varphi'(t)|\, dt \tag{5.2}$$

と定める。

例 5.2. $f(z)=z^2$, $C\colon z=\varphi(\theta)=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ のとき (単位円の上半分を右から左に移動する曲線)。$\varphi'(\theta)=ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_0^{\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{\pi}(e^{i\theta})^2\cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{\pi} e^{3i\theta}\,d\theta \\ &= i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\left(e^{3i\pi}-e^{3\cdot 0}\right) = \frac{(-1)-1}{3} = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例 5.3. $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $C\colon z=\varphi(\theta)=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ のとき (単位円を反時計回りに一周する曲線)。$\varphi'(\theta)=ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

□

注意事項

(1) 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実 1 変数関数の積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

(2) φ が区分的に C^1 級であるとは、

$$(\exists\{t_j\}_{j=0}^m)\quad \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta\wedge \text{各小区間 } [t_{j-1},t_j] \text{ で } \varphi \text{ は } C^1 \text{ 級}$$

を満たすことである。

C^1 級でなく、区分的に C^1 級とすることで、折り曲がっている曲線 (多角形の周とか) が簡単に式で表せる。

分点 t_j において φ の片側微分係数は存在するが、微分係数 $\varphi'(t_j)$ は存在しないことがありうる。その場合は

$$\int_C f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$$

とみなすべきである。そういう意味では広義積分である。

(3) $F(t):=f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、$U(t):=\operatorname{Re}F(t)$, $V(t):=\operatorname{Im}F(t)$ とおいて

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt := \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V(t)\,dt \tag{5.3}$$

と定義しても良い。

$\alpha<\beta$ であれば

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt \tag{5.4}$$

が成り立つ。 Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left|\sum_j F(t_j)\Delta t_j\right| \leq \sum_j |F(t_j)|\,\Delta t_j$$

から証明出来る。(5.3) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

(4) (とても良く使う。)

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,|dz|\,. \tag{5.5}$$

実際、C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とすると

$$\left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt$$

と書き換えられるが、これは (5.4) によって確かに成立する。

大抵は、この後

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,|dz| \leq \max_{z\in C^*}|f(z)|\int_C |dz| = \max_{z\in C^*}|f(z)| \times (C\text{ の弧長})$$

と評価することになる。

注　$C^*=C$ の跡 $=\varphi$ の値域 $=\mathrm{Image}\,\varphi=\{\varphi(t)\mid\ t\in[\alpha,\beta]\}$ である。

注　定義より $\displaystyle\int_C |dz| = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,dt$ であるから、これは C の弧長である。

A　解答

参考文献