複素関数・同演習 第 16 回
～冪級数 やり残し, 対数関数と冪関数～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 11 月 18 日, 2026 年 11 月 25 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3 冪級数 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3.6 収束円周上での収束発散, Abel の 2 つの定理 (続き) ・・・・・・・・・・・・・ 2
3.6.2 Abel の級数変形法 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.6.3 Abel の連続性定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
4 対数関数と冪関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7
4.1 複素対数関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7
4.1.1 $e^w = z$ を解く ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7
5 解答・・ 9
参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 10

0 本日の内容・連絡事項

- 本日説明したいことは、(1) Abel の級数変形法, (2) 複素対数関数 (宿題に解答できる程度) の 2 つである。まず宿題に取りくめるようにするため (2) を説明し (複素対数関数の定義まで行きたい)、残った時間内で (1) を説明する。

3　冪級数 (続き)

3.6　収束円周上での収束発散, Abel の 2 つの定理 (続き)

3.6.2　Abel の級数変形法 (続き)

定理 3.1 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts)**.** $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ は部分和が有界であり、$\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ は単調減少かつ $\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすとする。このとき $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ は収束する。

注意 3.2 (細かい改良)**.** $\{\beta_n\}$ は単調減少かつ $\beta_n \to 0$) という条件を仮定しているが (そう書いてあるテキストが多い)、以下の証明を見ると、$\{\beta_n\}$ が単調減少という条件は、$\{\beta_n\}$ が有界変分 ($\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sum_{n}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$) という条件で置き換えても良いことが分かる。　□

例 3.1 (つづき)**.** $|z| = 1$, $z \neq 1$ とする。$\alpha_n := z^n$, $\beta_n := \dfrac{1}{n}$ とおいて、定理 3.1 の条件をチェックしよう。

$\{\beta_n\}$ が単調減少かつ $\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ は、確かに満たされている。α_n の部分和については

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left|z\frac{1-z^N}{1-z}\right| \leq |z|\frac{1+|z^N|}{|1-z|} \leq \frac{1\cdot(1+1)}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}.$$

この右辺は N によらない定数であるから、この部分和は有界である。

ゆえに Abel の定理 (定理 3.1) が適用できて、$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は収束する。

定理 3.1 の証明

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \quad (n \geq 0)$$

とおくと (次のよく知られた公式が成り立つ)

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0.$$

α_k を s_k の階差で表すことで消去すると、次のように β_k の階差が現れる。

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n\beta_n. \tag{3.1}$$

この式変形を **Abel の級数変形法** (Abel's transformation) と呼ぶ。

実際、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_k &= \alpha_0\beta_0+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k = s_0\beta_0+\sum_{k=1}^{n}(s_k-s_{k-1})\beta_k\\ &= s_0\beta_0+\sum_{k=1}^{n}s_k\beta_k-\sum_{k=1}^{n}s_{k-1}\beta_k = s_0\beta_0+\sum_{k=1}^{n}s_k\beta_k-\sum_{k=0}^{n-1}s_k\beta_{k+1}\\ &= s_0\beta_0+\left(\sum_{k=1}^{n-1}s_k\beta_k+s_n\beta_n\right)-\left(s_0\beta_1+\sum_{k=1}^{n-1}s_k\beta_{k+1}\right)\\ &= s_0(\beta_0-\beta_1)+\sum_{k=1}^{n-1}s_k(\beta_k-\beta_{k+1})+s_n\beta_n \quad (\text{赤と水色それぞれまとめる})\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}s_k(\beta_k-\beta_{k+1})+s_n\beta_n. \quad (\text{赤と水色 }\textstyle\sum_{k=1}\text{ を 1 つの }\sum_{k=0}\text{ にまとめる})\end{aligned}$$

仮定より、ある $M\in\mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad |s_n|\le M$$

であるから、(3.1) の右辺第 2 項 $s_n\beta_n$ について、$|s_n\beta_n|\le M\beta_n\to 0\ (n\to\infty)$.

一方、(3.1) の右辺第 1 項の級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}s_k\left(\beta_k-\beta_{k+1}\right)$ については、

$$\begin{aligned}&|s_k(\beta_k-\beta_{k+1})|\le M\left|\beta_k-\beta_{k+1}\right| = M\left(\beta_k-\beta_{k+1}\right),\\ &\sum_{k=0}^{n}M(\beta_k-\beta_{k+1}) = M\beta_0-M\beta_{n+1}\to M\beta_0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

であるから、優級数の定理より $n\to\infty$ のとき、右辺第 1 項は収束する。[1)]。

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ は収束する。 □

階差 (差分) を微分に、和を積分に対応させるとき、部分求和公式 (summation by parts)

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_k = s_n\beta_n-\sum_{k=0}^{n-1}s_k(\beta_{k+1}-\beta_k)\quad(\text{ただし }\alpha_k\text{ は }s_k\text{ の階差: }\alpha_k=s_k-s_{k-1})$$

は、部分積分 (integration by parts)

$$\int_a^b F'(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

に相当する。つまり、Abel の級数変形法は部分積分の離散バージョンである。

余談 3.46. 微積分の基本定理

(1) $f(x)=F'(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

(2) $\displaystyle F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ならば $F'(x)=f(x)$.

の離散バージョンは

1) $\{\beta_n\}$ が単調減少の代わりに有界変分と仮定した場合は、$|s_k(\beta_k-\beta_{k+1})|\le M\left|\beta_k-\beta_{k+1}\right|\ (k\in\mathbb{Z}_{\ge 0})$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}M\left|\beta_k-\beta_{k+1}\right|<+\infty$ であるから、優級数の定理によって $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}s_k\left(\beta_k-\beta_{k+1}\right)$ は収束する。

(1′) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ならば $\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1$. $\quad (a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ を見慣れてる？)

(2′) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ならば $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$, $s_1 = a_1$.

□

3.6.3 Abel の連続性定理

次の定理も、やはり Abel の級数変形法で証明出来る。

定理 3.47 (Abel の連続性定理). 冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が $z = R$ $(R > 0)$ で収束したとする。このとき、任意の $K > 1$ に対して

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < R, \quad \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \leq K \right\}$$

とおくと、冪級数 $f(z)$ は $\Omega_K \cup \{R\}$ で一様収束する。

従って関数 f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で連続である。特に

$$\lim_{\substack{z \in \Omega_K \\ z \to R}} f(z) = f(R) \qquad (\text{さらに特に } \lim_{\substack{x \in [0,R) \\ x \to R}} f(x) = f(R)).$$

(この辺をきちんと説明するには、少し長い時間が必要になる。この講義の以下の議論にそれほど影響はないので、駆け足で通り抜ける。)

証明の方針

$$\alpha_n := a_n R^n, \quad \beta_n := \left(\frac{z}{R}\right)^n, \quad f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k,$$

とおいて Abel の級数変形法を用いる。詳細は講義ノート p. 94 を見よ。 □

説明補足 定理 3.1 では、$\{\beta_n\}$ は単調減少かつ $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ という条件を仮定したが、ここでは複素数列であるから単調減少性は期待できない。しかし単調減少性を、$\{\beta_n\}$ が有界変分 ($\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sum_{n}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$) という条件で置き換えても良いことに気づく。そうすれば難しくない。 □

Ω_K についても、コンピューターで描いた図を見て納得するにとどめたい。

Mathematica で

```
R=1
Manipulate[RegionPlot[x^2+y^2<R^2 && Abs[1-(x+I y)/R]/(1-Abs[x+I y]/R)<=K,
                      {x,-2,2}, {y,-2,2}],
           {K,1,10,0.1}]
```

とする。

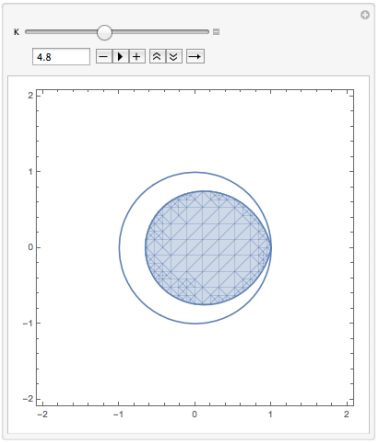

図 1　$R = 1$, $K = 4.8$ **の場合の** Ω_K **と円周** $|z| = R$

多くのテキストで、Abel の連続性定理の結論部分は、次の形で与えられている。

任意の $\alpha \in (0, \pi/2)$ に対して、

$$\lim_{\substack{z \to R \\ |\arg(z-R)-\pi|<\alpha}} f(z) = f(R)$$

「$|\arg(z-R)-\pi| < \alpha$ を満たすようにして $z \to R$ とすると」という近づけ方を「**Stolz の路に沿って** z を R に近づけると」と言う。

z が扇形 $\{z \in \mathbb{C} \mid\ |z-R| < R\cos\alpha,\ |\arg(z-R)-\pi| < \alpha\}$ に属するとき

$$\frac{|1-z/R|}{1-|z|/R} = \frac{|R-z|}{R-|z|} < 2\sec\alpha \quad (\text{念のため: } \sec = \frac{1}{\cos})$$

が成り立つので (証明略, 辻・小松 [1] の p. 91)、$K := 2\sec\alpha$ について $z \in \Omega_K$ である (扇形は Ω_K に含まれる)。ゆえに、上の形の Abel の連続性定理は、定理 3.47 の系として導かれる。

以前、Cauchy 積について 3 つの定理を紹介したが、3 つ目の定理は、定理 3.47 の簡単な応用として証明できる。

問 4. 複素数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\geq 0}$ に対して、$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n \geq 0)$ とおく。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ がいずれも収束するならば、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が成り立つ (Abel, 1826)。 **解答へ**

例 3.48 (グレゴリー・ライプニッツ級数)**.**

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1) \tag{3.2}$$

とおく。

収束半径が 1 とすぐ分かる。ゆえに f は $D(0;1)$ で正則である。

$f(z)$ は、$z = 1$ で収束するので (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数だから)、Abel の連続性定理より

$$f(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1)}} f(x).$$

$f(z)$ が、$z = x \in (-1, 1)$ のとき実関数の $\tan^{-1} x$ と一致することは証明しやすい (ここでは認めることにする)。$\tan^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続であることから、右辺の極限は $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ に等しい。

ゆえに

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

以上の論法は便利である (この論法を使わずに $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ の証明が出来ないわけではないが、少し手間がかかる。Abel の連続性定理を使うと簡単である。)。

冪級数は等比級数に似ていて、収束円内部での収束証明は等比級数と比較する (具体的には優級数の定理や Weierstrass M-test を用いる) ことで証明できる。

しかし収束円周上の点での収束については、その方法では証明できない。Abel の級数変形法などを用いた精密な議論が有効である。

余談 3.49 (Abel の人となり)**.** 昔は、Abel は「5 次方程式は冪根で解けない」ことを証明した人で、若くしてなくなった天才である、ということを、学生も良く知っていたと思うのだけど、最近そういうのに疎い人が多いような気がするので、少し紹介しておく。

Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー) は、冪級数の収束発散についての基礎を確立した (それがこの節の重要な内容だった)。それ以外に

1. α が一般の複素数であるときの $(1+x)^\alpha$ の展開 (一般 2 項定理) の証明
2. 5 次以上の代数方程式は有限回の四則と冪根では解けないことの証明
3. **楕円関数論**

などの仕事を行った。後の二つは、数学読み物にも良く出て来る偉大な仕事である。(偉大な数学者は、彼らの名前を有名にした大きな業績以外に、基礎的なことへの貢献も大きいことが多い、とつねづね感じている。冪級数の理論への貢献をした Abel も例外でない。) □

4　対数関数と冪関数

4 節の短い予告　対数関数 $\log z$ と冪関数 z^α (それと逆三角関数) を複素関数として定義して色々やる。

4.1　複素対数関数

対数関数は、冪級数によって定義すると、収束円が小さくて、満足しにくい。

log の Taylor 展開 (微積の本をのぞく)

$\log x$ は $x = 0$ では定義されない。そこで多くの本で、$\log(x+1)$ の 0 の周りの Taylor 展開を求めている:

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (|x| < 1).$$

これは本質的には、$\log x$ を 1 のまわりで冪級数展開した

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n \quad (|x-1| < 1)$$

と同じものである。

対数関数 log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^α や逆三角関数等は対数関数を用いて定義する。

Cf.　実関数 log (実質的に高校数学) の復習

$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加なので単射、値域は $(0, +\infty)$.
$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, +\infty)$ は全単射であるから、逆関数 $\tilde{f}^{-1}$ が存在する。それを $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ と表す。
$x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, +\infty)$ について、$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$.

一方、複素指数関数 $f\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ については

- 全射ではない ($e^z \neq 0$ つまり $f(z) = 0$ を満たす z は存在しない)。値域は実は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- 単射でもない ($e^{z+2\pi i} = e^z$ を満たすので、f は周期 $2\pi i$ の周期関数であり、無限回同じ値を取る)。

4.1.1 $e^w = z$ を解く

定理 4.1 (方程式 $e^w = z$ の解)**.** 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、w についての方程式 $e^w = z$ の解が存在する。その解は、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$w = \log r + i\,(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{4.1}$$

これは $w = \log|z| + i \arg z$ とも書ける。

証明 $w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ とおくと $e^w = e^u e^{iv}$.

$$\begin{aligned} e^w = z &\Leftrightarrow e^u e^{iv} = re^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow r = e^u \quad \text{かつ} \quad e^{iv} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow u = \log r \quad \text{かつ} \quad (\exists n \in \mathbb{Z}) v = \theta + 2n\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) w = \log r + i\,(\theta + 2n\pi)\,. \end{aligned}$$

□

繰り返しになるが $\Leftrightarrow$ の $\Leftarrow$ は明らか。$\Rightarrow$ については、$e^u e^{iv} = re^{i\theta}$ の両辺の絶対値を取って

$$e^u = \left|e^u e^{iv}\right| = \left|re^{i\theta}\right| = r \ (\neq 0).$$

それで $e^u e^{iv} = re^{i\theta}$ を割って $e^{iv} = e^{i\theta}$. □

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 4.2 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)**.** $e^w = 0$ は解なし。

$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i\cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i\cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i\cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i\cdot \pi}$ の解は $w = \log 2 + (\pi + 2n\pi)i = \log 2 + (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ の解は $w = (2n + 1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -2i = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ の解は $w = \log 2 + (2n - 1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$. □

例 4.3 (三角関数の方程式)**.** (1) $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned} \cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^0 = -1 = 1 \cdot e^{\pi i} \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = (n + 1/2)\,\pi. \end{aligned}$$

(注意: $e^{iz} \neq 0$ であるから、これをかけても、これで割っても同値変形。)

高校生の答えと変わらない？探す範囲を複素数まで広げたが、実数以外の解は見つからなかった、ということ (より強い主張である)。

(別解) $X = e^{iz}$ とおくと

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 0 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 0 \Leftrightarrow X^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow X = \pm i \\ &\Leftrightarrow e^{iz} = \pm i = 1 \cdot e^{\pm\frac{\pi}{2}i} \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log 1 + (2n \pm 1/2)\pi i \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = (2n \pm 1/2)\pi. \quad \square\end{aligned}$$

一見、別解は最初の解と違うように見えるかもしれないが、実は同じである。

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式に持ち込む方が見通し良いかもしれない。

(2) $\sin z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\begin{aligned}\sin z = 2 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = 4i \\ &\Leftrightarrow X^2 - 4iX - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 1 \cdot (-1)} \Leftrightarrow e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i.\end{aligned}$$

$2 \pm \sqrt{3} > 0$ であるから、$2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}$ が極形式である。ゆえに

$$\begin{aligned}\sin z = 2 &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + (2n + 1/2)\,\pi\end{aligned}$$

すなわち

$$z = (2n + 1/2)\pi - i \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

今回は、実数の範囲には解が存在しない方程式に対して、複素数まで広げることで解を発見した。 $\square$

2026/11/18 の講義はここまでです。

5 解答

解答 4.

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

とおく。仮定からいずれの冪級数も $z = 1$ で収束するので、収束半径は 1 以上である。$z \in D(0;1)$ で $f(z), g(z)$ は絶対収束するので

$$f(z)g(z) = h(z).$$

$z = x \in \mathbb{R}$, $x \uparrow 1$ とするとき、Abel の連続性定理により

$$f(x) \to f(1), \quad g(x) \to g(1), \quad h(x) \to h(1)$$

であるから $f(1)g(1) = h(1)$. すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が成り立つ。 □

問題へ戻る

参考文献

[1] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、 祐乗坊瑞満、 水本久夫。