複素関数・同演習 第 15 回
～冪級数 (7) 冪級数による微分方程式の解法, 冪級数による初等関数の定義, 収束円周上での収束発散～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 11 月 17 日, 2026 年 11 月 23 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3 冪級数 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3.4 冪級数の項別微分 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.4.2 有理関数の微分を使わない Taylor 展開 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.4.3 微分方程式の冪級数解法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
3.5 冪級数による初等関数の定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
3.6 収束円周上での収束発散, Abel の 2 つの定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
3.6.1 例 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
3.6.2 Abel の級数変形法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7
3.6.3 Abel の連続性定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9
A 解答 ・・ 12
参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 13

0 本日の内容・連絡事項

- いよいよ今日で冪級数の話のおしまいかな。最後も怒涛のように内容豊富です。

3　幂級数 (続き)

3.4　幂級数の項別微分 (続き)

3.4.2　有理関数の微分を使わない Taylor 展開 (続き)

次の例は、どこに配置するのが適切か分からないが (毎年迷う)、結果が有理関数になるので、ここに入れておくことにする。

本日は、説明すべきことがたくさんあるので、次の例は、もし時間が余ったら解説する、という扱いにする。

例 3.41 (a_n が n の多項式の場合の幂級数の和)**.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。

(解答)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = -(z-1)^{-1}$$

を微分して

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (z-1)^{-2}.$$

両辺に z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

つまり微分して、z をかけることで、一般項に n をかけることが出来る。ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \cdot \left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = z\frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1)\cdot z}{(z-1)^4} = -\frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

同様にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}.$$

結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ の和が求まることが分かる。　□

3.4.3　微分方程式の幂級数解法

簡単な例でアイディアを示す。

例 3.41 (微分方程式の幂級数解法)**.** 収束幂級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、

$$f''(z) = -f(z), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

を満たすものを求めよ。

($y'' = -y$, $x = 0$ のとき $y = 0$, $y' = 1$ と書くと頭が働く人が多い？)

(解答)

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n,$$
$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n$$

であるから

$$\begin{aligned} f''=-f &\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (n+2)(n+1)a_{n+2}=-a_n \\ &\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

ただし

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}:=\{n\in\mathbb{Z}\mid\ n\geq 0\}=\{0,1,2,\cdots\}.$$

一方、初期条件から

$$0=f(0)=a_0, \quad 1=f'(0)=a_1.$$

これから

$$a_{2k}=0, \quad a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

ゆえに

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$

この冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、収束円は $\mathbb{C}$ である。すなわち f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。f は $\mathbb{C}$ 全体で $f''(z)=-f(z)$ を満たす。

(この f は、すぐ後で定義する $\sin z$ に他ならない。) □

このアイディアには、実は非常に広い発展がある。

上の例の微分方程式自体は、入門講義で良く知られているもので (単振動の方程式 $x''(t)=-\omega^2 x(t)$ の $\omega=1$ のケース)、「わざわざ解き直した」と言えなくもない (f が $\mathbb{C}$ 全体で微分方程式を満たすことは新しいと言えるかもしれない)。

実は同様のやり方でたくさんの微分方程式が解け、多くの新しい関数 ("**特殊関数**" (special function)) が導入出来る。(特殊関数 $\leftrightarrow$ 初等関数)

係数が定数でない場合 (変数係数) も、特異点を持つ場合も解くことが出来て、応用上も重要な特殊関数が (とてもとても) たくさん得られる。2 つだけ例をあげると

$$x(1-x)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x)\,y'-\alpha\beta y=0 \quad (\textbf{Gauss の超幾何微分方程式}).$$

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\alpha^2\right)y=0 \quad (\textbf{Bessel の微分方程式}).$$

(例えば Bessel の微分方程式の解として Bessel 関数が導入され、円盤領域における熱方程式や波動方程式の解を表すために応用できる。)

3.5 冪級数による初等関数の定義

微積分で学んだ初等関数は、Taylor 展開において、(係数はそのままにして) 変数を複素変数にして、複素関数に拡張できる。

また、上の例で見たように、微分方程式で複素関数に拡張することもできる。

ここで「拡張」という意味は、変数の値が実数であるときに元の関数と一致する、という意味である。

例えば

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (\text{これは再定義となる}\cdots),$$
$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$
$$\cosh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}, \quad \sinh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

これらの冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、関数は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

冪級数による定義のみを用いて、実関数については「良く知っている」性質 (指数法則、加法定理、関数同士の関係、π との関係) などを導くことが出来る。

例えば

(1) $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,
$(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$.

(2) $e^{z+w} = e^z e^w$

(3) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
(これから $e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$. つまり、冪級数として e^z を定義しても、我々の最初の定義と同じことになる。)

(4) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

(5) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(6) 正の実数 π が存在して、…(よく知っている円周率の性質を持つ)

(1) は冪級数の項別微分定理により簡単に証明できる。(2) についてはこの後すぐに説明する。(3) は簡単な練習問題、(3) から (4) はすぐ導ける。(5) は (2) と (4) を使って導ける。(6) をノーヒントで解くのは難しいかもしれない (例えば高橋 [1] 第 1 章 §6 補題 4 を見よ)。円周率にしても、三角関数にしても、小学校以来、図形的直観を頼りに議論を進めてきたが、それを抜きに定義して議論をすることができる、というわけである。

問 1. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ であることを示せ。 解答へ

問 2. $\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w$, $\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w$ を示せ。 **解答へ**

(2) の証明を二通り示す。

証明 1 多くの場合に

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+\ell=n}a_kb_\ell\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right) \tag{3.2}$$

が成り立つ (**Cauchy の積公式** (Cauchy product))。$\sum$ でなく $\cdots$ で書くと

$$(a_0+a_1+a_2+\cdots)(b_0+b_1+b_2+\cdots)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\cdots$$

というもので、いかにも成り立ちそうな式である (もしも無限和でなければ当たり前の展開式である)。

定理とするには、仮定の条件が問題となるが、(強い方から順に)

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ のどちらも絶対収束するならば、右辺も絶対収束して、等式が成り立つ (命題 A.24 (Cauchy, 1821))。

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ のいずれか一方が絶対収束し、他方が収束するならば、右辺も収束して、等式が成り立つ (命題 A.25 (Mertens の定理, 1875))。

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ のいずれも収束するならば、等式が成り立つ (Abel, 1826)。

今の場合、冪級数は収束円内で絶対収束するので、(i) が適用できて

$$\begin{aligned}e^ze^w&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}z^kw^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z^kw^{n-k}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^kw^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}=e^{z+w}.\quad\square\end{aligned}$$

このように、(3.2) が成り立つことを認めれば簡単である。それを保証する定理は重要であり、ぜひ覚えるべきであるが、ここでは詳細は省略する (講義ノートには証明を書いておく)。((i) の場合は、絶対収束することが容易に示せて、有限和からの極限移行で (あるいは「絶対収束 $\Rightarrow$ 可換収束」を用いて) 等式が証明できる。(iii) は後で紹介する定理の簡単な応用問題である。)

証明 2 (アールフォルス [2] §2.3.1) 冪級数の項別微分定理により、$f(z)=e^z$ は $f'(z)=f(z)$ を満たすことが分かる。任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(f(z)f(c-z)\right)&=f'(z)\cdot f(c-z)+f(z)\cdot(-1)f'(c-z)\\&=f(z)f(c-z)-f(z)f(c-z)=0\quad(z\in\mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z) = f(0)f(c) = 1 \cdot f(c) = f(c).$$

すなわち

$$(\forall c \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{Z}) \quad f(z)f(c-z) = f(c).$$

任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $c := a+b$, $z := a$ とおくと、$f(z)f(c-z) = f(c)$ が成り立つので $f(a)f(b) = f(a+b)$. すなわち $e^a e^b = e^{a+b}$. □

一方、次にあげる関数の収束半径は 1 であり、単位円盤 $D(0;1)$ で正則である。

$$\tan^{-1} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1),$$
$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1),$$
$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^k \quad (|z| < 1).$$

ただし α は任意の複素数で (まだ冪乗の定義をしていないので、ここはフライングしている)、$\binom{\alpha}{n}$ は**一般二項係数**である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

これらの冪級数は収束円が小さいので、このままでは不満がある。

実はきれいな解答があり (複素関数としての log を定義して、それを用いて定義する)、次節で紹介する。こうご期待。

3.6 収束円周上での収束発散, Abel の 2 つの定理

冪級数は、その収束円の境界 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$ 上の点で収束するか、発散するか、について考えよう。

3.6.1 例

例 3.42 (収束円周上の任意の点で発散). 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については、すでに「収束する $\Leftrightarrow$ $|z| < 1$」が分かっている。

対偶は「発散する $\Leftrightarrow$ $|z| \geq 1$」.

ゆえに収束半径は 1 であり、収束円 $D(0;1)$ の周上 $|z| = 1$ の任意の点で発散する。 □

例 3.43 (収束円周上の任意の点で収束). 冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ についても、収束半径が 1 であることはすぐに分かる (例えば ratio test をすれば良い)。

収束円 $D(0;1)$ の周 $|z| = 1$ 上の点では、

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

$b_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、$\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \le b_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するので、優級数の定理から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は収束する。(Weierstrass M-test を用いれば、閉円盤 $\overline{D}(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ で一様絶対収束する。) □

例 3.44 (収束円の周上に収束する点・発散する点どちらも存在). 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ の収束半径が 1 であることもすぐに分かる。

収束円の周 $|z| = 1$ 上の点では、収束する・発散する、どちらのケースもある。次の 2 つは知っている (はず)。

- $z = 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (発散).
- $z = -1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$ は収束する。
  (「絶対値が 0 に収束する交代級数は収束する」。実は和は $-\log 2$. 実際、上の冪級数は $-\mathrm{Log}(1-z)$ の 0 の周りの冪級数展開で…)

実は、$|z| = 1$, $z \ne 1$ を満たす任意の z に対して、この冪級数は収束する。それは次に紹介する Abel の定理 (**Abel の級数変形法** (Abel's transformation)) を用いればよい。

3.6.2 Abel の級数変形法

定理 3.45 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts). $\{\alpha_n\}_{n\ge 0}$ は部分和が有界であり、$\{\beta_n\}_{n\ge 0}$ は単調減少かつ $\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。

注意 3.46 (細かい改良). $\{\beta_n\}$ は単調減少かつ $\beta_n \to 0$) という条件を仮定しているが (そう書いてあるテキストが多い)、以下の証明を見ると、$\{\beta_n\}$ が単調減少という条件は、$\{\beta_n\}$ が有界変分 ($\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \displaystyle\sum_{n}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$) という条件で置き換えても良いことが分かる。 □

例 3.45 (つづき). $|z| = 1$, $z \ne 1$ とする。$\alpha_n := z^n$, $\beta_n := \dfrac{1}{n}$ とおいて、定理 3.45 の条件をチェックしよう。

$\{\beta_n\}$ が単調減少かつ $\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ は、確かに満たされている。α_n の部分和については

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left|z\frac{1-z^N}{1-z}\right| \le |z|\frac{1+|z^N|}{|1-z|} \le \frac{1\cdot(1+1)}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}.$$

この右辺は N によらない定数であるから、この部分和は有界である。

ゆえに Abel の定理 (定理 3.45) が適用できて、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は収束する。

定理 3.45 の証明

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \quad (n \ge 0)$$

とおくと (次のよく知られた公式が成り立つ)

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0.$$

α_k を s_k の階差で表すことで消去すると、次のように β_k の階差が現れる。

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n. \tag{3.3}$$

この式変形を **Abel の級数変形法** (Abel's transformation) と呼ぶ。

実際、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k &= \alpha_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = s_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\,\beta_k \\
&= s_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k\beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1}\beta_k = s_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k\beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k\beta_{k+1} \\
&= s_0\beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k\beta_k + s_n\beta_n\right) - \left(s_0\beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k\beta_{k+1}\right) \\
&= s_0(\beta_0 - \beta_1) + \sum_{k=1}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n\beta_n \quad (\text{赤と水色それぞれまとめる}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n\beta_n. \quad (\text{赤と水色} \textstyle\sum_{k=1} \text{を 1 つの} \sum_{k=0} \text{にまとめる})
\end{aligned}$$

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n| \le M$$

であるから、(3.3) の右辺第 2 項 $s_n\beta_n$ について、$|s_n\beta_n| \le M\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

一方、(3.3) の右辺第 1 項の級数 $\sum_{k=0}^{n-1} s_k\,(\beta_k - \beta_{k+1})$ については、

$$\begin{aligned}
&|s_k(\beta_k - \beta_{k+1})| \le M\,|\beta_k - \beta_{k+1}| = M\,(\beta_k - \beta_{k+1})\,, \\
&\sum_{k=0}^{n} M(\beta_k - \beta_{k+1}) = M\beta_0 - M\beta_{n+1} \to M\beta_0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

であるから、優級数の定理より $n \to \infty$ のとき、右辺第 1 項は収束する。[1)]。

ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ は収束する。 □

階差 (差分) を微分に、和を積分に対応させるとき、部分求和公式 (summation by parts)

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_k = s_n\beta_n - \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_{k+1} - \beta_k) \quad (\text{ただし } \alpha_k \text{ は } s_k \text{ の階差: } \alpha_k = s_k - s_{k-1})$$

は、部分積分 (integration by parts)

$$\int_a^b F'(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

1) $\{\beta_n\}$ が単調減少の代わりに有界変分と仮定した場合は、$|s_k(\beta_k - \beta_{k+1})| \le M\,|\beta_k - \beta_{k+1}|$ $(k \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$, $\sum_{k=0}^{\infty} M\,|\beta_k - \beta_{k+1}| < +\infty$ であるから、優級数の定理によって $\sum_{k=0}^{\infty} s_k\,(\beta_k - \beta_{k+1})$ は収束する。

に相当する。つまり、Abel の級数変形法は部分積分の離散バージョンである。

余談 3.46. 微積分の基本定理

(1) $f(x) = F'(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

(2) $\displaystyle F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ならば $F'(x) = f(x).$

の離散バージョンは

(1′) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1.$ $\quad (a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ を見慣れてる？)

(2′) $\displaystyle s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ならば $s_{n+1} - s_n = a_{n+1},\ s_1 = a_1.$

□

3.6.3 Abel の連続性定理

次の定理も、やはり Abel の級数変形法で証明出来る。

定理 3.47 (Abel の連続性定理)**.** 冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が $z = R$ $(R > 0)$ で収束したとする。このとき、任意の $K > 1$ に対して

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < R,\quad \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \le K \right\}$$

とおくと、冪級数 $f(z)$ は $\Omega_K \cup \{R\}$ で一様収束する。

従って関数 f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で連続である。特に

$$\lim_{\substack{z \in \Omega_K \\ z \to R}} f(z) = f(R) \qquad (\text{さらに特に } \lim_{\substack{x \in [0,R) \\ x \to R}} f(x) = f(R)).$$

(この辺をきちんと説明するには、少し長い時間が必要になる。この講義の以下の議論にそれほど影響はないので、駆け足で通り抜ける。)

証明の方針

$$\alpha_n := a_n R^n, \quad \beta_n := \left(\frac{z}{R}\right)^n, \quad f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k,$$

とおいて Abel の級数変形法を用いる。詳細は講義ノート p. 94 を見よ。 □

説明補足 定理 3.45 では、$\{\beta_n\}$ は単調減少かつ $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ という条件を仮定したが、ここでは複素数列であるから単調減少性は期待できない。しかし単調減少性を、$\{\beta_n\}$ が有界変分 ($\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sum_{n}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$) という条件で置き換えても良いことに気づく。そうす

れば難しくない。 □

Ω_K についても、コンピューターで描いた図を見て納得するにとどめたい。

Mathematica で

```
R=1
Manipulate[RegionPlot[x^2+y^2<R^2 && Abs[1-(x+I y)/R]/(1-Abs[x+I y]/R)<=K,
                      {x,-2,2}, {y,-2,2}],
           {K,1,10,0.1}]
```

とする。

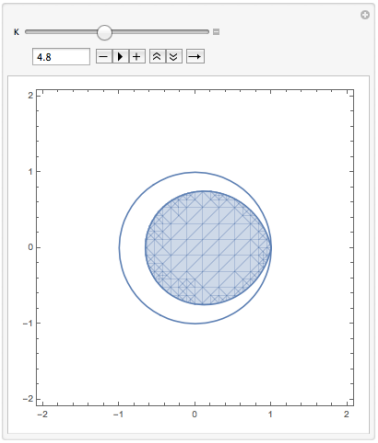

図 1　$R = 1$, $K = 4.8$ **の場合の** Ω_K **と円周** $|z| = R$

多くのテキストで、Abel の連続性定理の結論部分は、次の形で与えられている。

任意の $\alpha \in (0, \pi/2)$ に対して、

$$\lim_{\substack{z \to R \\ |\arg(z-R)-\pi|<\alpha}} f(z) = f(R)$$

「$|\arg(z-R)-\pi| < \alpha$ を満たすようにして $z \to R$ とすると」という近づけ方を「**Stolz の路に沿って** z を R に近づけると」と言う。

z が扇形 $\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z-R| < R\cos\alpha,\ |\arg(z-R)-\pi| < \alpha\}$ に属するとき

$$\frac{|1-z/R|}{1-|z|/R} = \frac{|R-z|}{R-|z|} < 2\sec\alpha \quad (\text{念のため: } \sec = \frac{1}{\cos})$$

が成り立つので (証明略, 辻・小松 [3] の p. 91)、$K := 2\sec\alpha$ について $z \in \Omega_K$ である (扇形は Ω_K に含まれる)。ゆえに、上の形の Abel の連続性定理は、定理 3.47 の系として導かれる。

以前、Cauchy 積について 3 つの定理を紹介したが、3 つ目の定理は、定理 3.47 の簡単な応用として証明できる。

問 4. 複素数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\geq 0}$ に対して、$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n \geq 0)$ とおく。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ がいずれも収束するならば、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が成り立つ (Abel, 1826)。 解答へ

例 3.48 (グレゴリー・ライプニッツ級数)**.**

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1) \tag{3.4}$$

とおく。

収束半径が 1 とすぐ分かる。ゆえに f は $D(0;1)$ で正則である。

$f(z)$ は、$z = 1$ で収束するので (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数だから)、Abel の連続性定理より

$$f(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1)}} f(x).$$

$f(z)$ が、$z = x \in (-1, 1)$ のとき実関数の $\tan^{-1} x$ と一致することは証明しやすい (ここでは認めることにする)。$\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続であることから、右辺の極限は $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ に等しい。

ゆえに

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

以上の論法は便利である (この論法を使わずに $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ の証明が出来ないわけではないが、少し手間がかかる。Abel の連続性定理を使うと簡単である。)。

冪級数は等比級数に似ていて、収束円内部での収束証明は等比級数と比較する (具体的には優級数の定理や Weierstrass M-test を用いる) ことで証明できる。

しかし収束円周上の点での収束については、その方法では証明できない。Abel の級数変形法などを用いた精密な議論が有効である。

余談 3.49 (Abel の人となり)**.** 昔は、Abel は「5 次方程式は冪根で解けない」ことを証明した人で、若くしてなくなった天才である、ということを、学生も良く知っていたと思うのだけど、最近そういうのに疎い人が多いような気がするので、少し紹介しておく。

Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー) は、冪級数の収束発散についての基礎を確立した (それがこの節の重要な内容だった)。それ以外に

1. α が一般の複素数であるときの $(1+x)^{\alpha}$ の展開 (一般 2 項定理) の証明
2. 5 次以上の代数方程式は有限回の四則と冪根では解けないことの証明
3. **楕円関数論**

などの仕事を行った。後の二つは、数学読み物にも良く出て来る偉大な仕事である。(偉大な数学者は、彼らの名前を有名にした大きな業績以外に、基礎的なことへの貢献も大

きいことが多い、とつねづね感じている。冪級数の理論への貢献をした Abel も例外でない。) □

A 解答

解答 1. 定義式を思い出すと

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

いずれの冪級数も収束半径は $+\infty$ であるので、すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して、絶対収束する。ゆえに和を取る順序を変更しても値は変わらないことに注意する。

0 以上の整数 n は、$4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ $(k = 0, 1, \cdots)$ に分類できて、それぞれの場合に i^n の値は 1, i, -1, $-i$ であるから

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} z^{4k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} z^{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} z^{4k+2} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!} z^{4k+3} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} z^{4k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} z^{4k+2} + i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} z^{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!} z^{4k+3} \right). \end{aligned}$$

一方、0 以上の整数 n は、$2k$ と $2k+1$ $(k = 0, 1, \cdots)$ に分類できて、それぞれの場合に $(-1)^n$ の値は 1 と -1 であるから

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} z^{4k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} z^{4k+2}, \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} z^{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!} z^{4k+3}. \end{aligned}$$

ゆえに $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ が成り立つ。 □

問題へ戻る

解答 2. (工事中) まず sin の場合。左辺は

$$\sin(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i}.$$

また右辺は

$$\begin{aligned} &\sin z \cos w + \cos z \sin w \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\ &= \frac{1}{4i} \left(e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw} \right) \\ &= \frac{1}{4i} \left(2e^{iz}e^{iw} - 2e^{-iz}e^{-iw} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)} \right). \end{aligned}$$

ゆえに $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$.

$\cos(z+w)$ についても同様に出来る。 □

問題へ戻る

解答 4.

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

とおく。仮定からいずれの冪級数も $z = 1$ で収束するので、収束半径は 1 以上である。$z \in D(0;1)$ で $f(z), g(z)$ は絶対収束するので

$$f(z)g(z) = h(z).$$

$z = x \in \mathbb{R}, x \uparrow 1$ とするとき、Abel の連続性定理により

$$f(x) \to f(1), \quad g(x) \to g(1), \quad h(x) \to h(1)$$

であるから $f(1)g(1) = h(1)$. すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が成り立つ。 □

問題へ戻る

参考文献

[1] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された．丸善 eBook では、 https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441 でアクセスできる．

[2] L. V. アールフォルス：複素解析, 現代数学社 (1982/3/1), 笠原 乾吉 訳. [4] の翻訳.

[3] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、 祐乗坊瑞満（ゆうじょうぼうずいまん）、 水本久夫。

[4] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (初版は 1953 で、最新版である Third Edition は 1979/1/1？私は 1979 年の秋に教科書として購入した).