複素関数・同演習 第 14 回
～冪級数 (6) 冪級数の項別微分, 初等関数, 収束円上での収束発散～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 11 月 11 日, 2026 年 11 月 23 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3 冪級数 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3.4 冪級数の項別微分 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3.4.1 冪級数の項別微分定理 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
3.4.2 有理関数の微分を使わない Taylor 展開 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
参考文献 ・・ 7

0 本日の内容・連絡事項

- 冪級数の項別微分定理が証明できると見通しが良くなる。「有理関数の微分を使わない Taylor 展開」は一見細かい計算テクニックのようであるが、後々大きく役立つので、しっかり演習に取り組んでもらいたい。

3 冪級数 (続き)

3.4 冪級数の項別微分 (続き)

3.4.1 冪級数の項別微分定理 (続き)

定理 3.30 は前回証明ずみであるが、参考のために載せておく。

次の定理は特に重要である。

定理 3.30 (冪級数の項別微分定理, Abel)**.** 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、和で定義される関数 f は $D(c;\rho)$ で正則で

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-c)^n \quad (z \in D(c;\rho)).$$

右辺の冪級数の収束半径は ρ である。

証明 (前回やったので省略) □

2026/11/10 の講義はここまででした。

注意 3.31 (上の証明を振り返る (講義ではスキップする))**.** 定理 3.30 の証明は、非常に難しいわけではないが、簡単ではない。極限の定義を導入した Cauchy は色々な定理を証明したが、この定理の証明は間違えた、Abel が初めて正しく証明した、と読んだことがある (そのうち確認したいと思っている)。

基本的な定理なので、身の回りのテキストの多くに証明が書かれているが、細部には相違がある。その中で分かりやすいと思われるものを採用した。g の冪級数が一様収束であることを使っていることから (実はまだ一様収束の概念がはっきり認識される前で、これは先駆的な結果と言えるのだろう)、右辺第 3 項の不等式評価が得られることは分かるが、右辺第 2 項の不等式評価をどう理解すると良いだろうか。

もっと分かりやすい証明はないか考えている。(線積分を用いるというアイディアはあるが、採用するには、講義内容を大幅に入れ替える必要があって躊躇している, 桂田 [1] の付録 A.6 に書いておいた)。 □

上の定理は $\rho = 0$ である場合を除いていないが、$\rho > 0$ の場合のみ考えることが多い (当たり前であろう)。

収束半径が正である (つまり 0 でない) 冪級数を収束冪級数と呼ぶ。

系 3.32 (収束冪級数は Taylor 展開である)**.** 収束冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の定める関数 f は、収束円 $D(c;\rho)$ で無限回微分可能で

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{ゆえに} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z-c)^n.$$

特に関数が c 中心の収束冪級数で表されるならば、表し方はただ一通りしかなく、それはその関数の c における Taylor 展開に一致する。

証明 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、f を k 回項別微分して

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_k (z-c)^{n-k}.$$

$z=c$ を代入すると、$n=k$ の項のみ残って

$$f^{(k)}(c)=k(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot a_k=k!a_k.$$

ゆえに $a_k=f^{(k)}(c)/k!$. □

系 3.33 (収束冪級数は原始関数を持つ). 収束冪級数 $f(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ (収束半径を ρ とする) に対して、

$$F(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}(z-c)^n\quad(z\in D(c;\rho))$$

とおくと、収束半径は同じで、$F'=f$ が成り立つ。

証明 $F(z)$ を定義する冪級数を項別微分した冪級数は、$f(z)$ を定義する冪級に等しい。

$F(z)$ を定義する冪級数の収束半径は $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}}}$ である。これは $f(z)$ の冪級数の収束半径 $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ に等しい ($\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$ であるから)。

項別微分すると $f(z)$ の冪級数展開になることが確認できるので、$F'=f$. □

3.4.2 有理関数の微分を使わない Taylor 展開

上の定理から、どういうやり方でも、$f(z)$ を収束冪級数の形に表せれば、それは f の Taylor 展開である。

以下、f が有理関数の場合に、等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}\quad(\text{収束する}\Leftrightarrow|r|<1)$$

を利用した **Taylor 展開の導出法**を説明する。収束半径は ρ と表す。

もう一つの鍵は、**有理式の部分分数分解**である。

例 3.34 (基本). 等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,$$

収束する $\Leftrightarrow|z|<1$. 特に $|z|<1$ ならば収束、$|z|>1$ ならば発散であるから、$\rho=1$.

これが $\dfrac{1}{1-z}$ の (0 における, 0 のまわりの) Taylor 展開に他ならない。 □

$\dfrac{1}{z+a}$ を 0 の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a\neq 0$ とする。

例 3.35.

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{4+z}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-z/4)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|-z|}{|4|} < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$. ゆえに $\rho = 4$. 収束円は $D(0;4)$.

一般化しておくと: $a \neq 0$ であれば

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

$\rho = |a|$. 収束円は $D(0;|a|)$. □

$\dfrac{1}{z+a}$ を c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$.

例 3.36. $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 を中心とする冪級数に展開せよ。

1 のまわりで Taylor 展開せよ、と同じことである。

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n.$$

$$\text{収束する} \quad\Leftrightarrow\quad \left|-\frac{z-1}{4}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z-1| < 4.$$

ゆえに $\rho = 4$, 収束円は $D(1;4)$. □

例 3.37. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

$$(\sharp) \qquad f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

これは公比 $-z^2$ の等比数列であるから、

$$\text{収束する} \quad\Leftrightarrow\quad \left|-z^2\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|^2 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z| < 1.$$

$f(z)$ は、

$$a_n := \begin{cases} (-1)^k & (n \text{ が偶数のとき、} n = 2k \text{ とおくと}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

とおくと $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と表せるので冪級数であり、$\rho = 1$.

別解 こういうやり方もある。

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$
$$= -\frac{i}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-i)^{n+1}}\right) \qquad \left(\frac{1}{z-a} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}} \text{ を使った}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^n + (-i)^n\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{2}i^n z^n.$$

ここで止めても良いだろう。以下は念のための確認である。

n が奇数のとき、$(-1)^n + 1 = 0$. $n = 2k$ のとき $i^n = i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$, $(-1)^n + 1 = 2$ であるから

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2}(-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} \quad ((\sharp) \text{ と一致する}).$$

□

$\dfrac{1}{(z+a)^n}$ を c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$ とする。

例 3.38. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ を 0 の周りで冪級数展開してみよう。

まず、分母の冪の指数が 1 の場合 $(\dfrac{1}{z-1})$ は、上でやったやり方で

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{(収束半径は 1)}.$$

両辺を微分すると (項別微分定理から)

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad \text{(収束半径は 1)}.$$

$$\text{ゆえに} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad \text{(収束半径は 1)}.$$

原始関数の冪級数展開を求めてみよう (系 3.33 を使う)。

例 3.39. $f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $f(0) = 0$ を満たす f を求めよ (後で定義する $\tan^{-1} z$ に等しいが、そのことは使わない)。

(解答)　$f'(z)$ については既に次が分かっている。

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \quad \text{(収束半径は 1)}.$$

これから

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} + C \quad \text{(収束半径は 1, } C \text{ は積分定数)}.$$

$f(0) = 0$ より $C = 0$. ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}.$$

□

例 3.40. (辻・小松 [2] から拝借)

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}$$

を 0 のまわりで冪級数展開 (Taylor 展開) してみよう。

$f(z)$ の分子 $z^3 - 3z^2 - z + 5$ を分母 $z^2 - 5z + 6$ で割ると、商 $z + 2$, 余り $3z - 7$ であるから、

$$f(z) = \frac{(z+2)(z^2 - 5z + 6) + 3z - 7}{z^2 - 5z + 6} = z + 2 + \frac{3z - 7}{z^2 - 5z + 6}.$$

右辺第 3 項の分母は $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$ と因数分解できる。$z-2$ と $z-3$ は互いに素であるから、次式を満たす定数 A, B が存在するはず。

$$\frac{3z - 7}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}.$$

部分分数分解の原理

多項式 $p(z)$, $q(z)$ が互いに素であれば、任意の多項式 $r(z)$ に対して

$$\frac{r(z)}{p(z)q(z)} = \frac{A(z)}{p(z)} + \frac{B(z)}{q(z)}$$

を満たす多項式 $A(z)$, $B(z)$ が存在する。

$\deg r(z) < \deg(p(z)q(z))$ であれば、$\deg A(z) < \deg p(z)$, $\deg B(z) < \deg q(z)$ を満たす $A(z)$, $B(z)$ が存在する。 (左辺が真分数式ならば、右辺も真分数式にできる。)

$A = 1$, $B = 2$ と求まる。ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2), \qquad \frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3)$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= z + 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{z}{9} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}\right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n \quad (\text{少なくとも } |z| < 2 \text{ で収束}). \end{aligned}$$

収束半径は 2 である。これは $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+2}}} = 2$ を確かめても良いし、収束半径が 2, 3 の冪級数の和であることからも分かる (「収束半径が ρ_1, ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$ の冪級数の和の収束半径は ρ_1 である」— 証明は手頃な演習問題なので略する)。 □

以上より、**有理関数は、部分分数分解が求まれば、容易に冪級数展開できることが分かる**。

上の例では、最後に $n = 0, 1$ の項を抜き出してまとめた。

「なぜそうするのか？」と時々質問されるので、説明しておく。

「c のまわりで冪級数展開する」、つまり $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の等式を得るのが目標という場合、a_n を求めることが期待されている、と考えるべきだろう。

$$f(z) = z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$$

の形のままでは、a_n が何か、すぐには分からない。

$$f(z) = \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n$$

と整理してあれば一目瞭然である。つまり

$$a_0 = \frac{5}{6}, \quad a_1 = \frac{19}{36}, \quad a_n = -\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) \quad (n \geq 2). \quad \square$$

2026/11/11 の講義はこの辺までです。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf (2014〜).

[2] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、 祐乗坊瑞満（ゆうじょうぼうずいまん）、 水本久夫。